

Resolução - Volume

1. Vamos começar por calcular o volume da pirâmide $[ABCDV]$:

$$V_{[ABCDV]} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{1,2 \times 1 \times 11,5}{3} = 4,6 \text{ m}^3$$

Agora vamos determinar o volume da pirâmide $[EFGHV]$ com $11,5 - 2,3 = 9,2$ metros de altura:

$$V_{[EFGHV]} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{0,96 \times 0,8 \times 9,2}{3} = 2,3552 \text{ m}^3$$

O volume do tronco de pirâmide $[ABCDEFGH]$, em metros cúbicos arredondado às unidades é igual a:

$$V_{[ABCDEFGH]} = V_{[ABCDV]} - V_{[EFGHV]} = 4,6 - 2,3552 = 2,2448 \approx 2 \text{ m}^3$$

2024, 1ª fase

2. Vamos começar por calcular o volume do cone reto de vértice V e diâmetro da base $[AB]$:

$$V_{[\text{cone grande}]} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{\pi \times (0,4)^2 \times 2,4}{3} = 0,402 \text{ m}^3$$

Agora vamos determinar o volume do cone reto de vértice V e diâmetro da base $[CD]$ com $2,4 - 0,9 = 1,5$ metros de altura:

$$V_{[\text{cone pequeno}]} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{\pi \times (0,25)^2 \times 1,5}{3} = 0,098 \text{ m}^3$$

O volume do tronco de cone, representado a cinzento-escuro, em metros cúbicos, é igual a:

$$V_{[\text{tronco de cone}]} = V_{[\text{cone grande}]} - V_{[\text{cone pequeno}]} = 0,402 - 0,098 = 0,304 \approx 0,3 \text{ m}^3$$

2024, 2ª fase

3. Vamos começar por calcular o volume do paralelepípedo $[BCEFGHIJ]$:

$$V_{[BCEFGHIJ]} = A_{[GHIJ]} \times h = 25,8 \times 4 = 103,2 \text{ m}^3$$

O volume do prisma triangular $[ABCDEF]$, em metros cúbicos, é igual a:

$$V_{[ABCDEF]} = V_{sólido} - V_{[BCEFGHIJ]} = 134,1 - 103,2 = 30,9 \text{ m}^3$$

2023, 1ª fase

4. Vamos calcular o volume de água que se encontra no recipiente parcialmente cheio:

$$V = A_b \times h = \pi \times raio^2 \times altura = 3,14159 \times \left(\frac{2,5}{2}\right)^2 \times 3 \approx 14,726 \text{ dm}^3$$

O recipiente tem, aproximadamente, 14,726 litros de água.

O número máximo de copos, iguais aos disponibilizados no dispensador, que é possível encher totalmente com a água que se encontra, nesse instante, no recipiente é igual a:

$$\frac{14,726}{0,2} \approx 73 \text{ copos}$$

2023, 2ª fase

5. $V_{sólido} = V_{cilindro} + V_{cone} = \pi \times (2,5)^2 \times 4 + \frac{1}{3} \times \pi \times (2,5)^2 \times 2 \approx 92 \text{ m}^3$

2023, Época especial

6. Vamos começar por calcular o volume da pirâmide $[ABCDI]$:

$$V_{[ABCDI]} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{9^2 \times 36}{3} = 972 \text{ cm}^3$$

Agora vamos determinar o volume da pirâmide $[EFGHI]$ com $36 - 12 = 24$ centímetros de altura:

$$V_{[EFGHI]} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{6^2 \times 24}{3} = 288 \text{ cm}^3$$

O volume do tronco de pirâmide $[ABCDEFGH]$, em centímetros cúbicos, é igual a:

$$V_{[ABCDEFGH]} = V_{[ABCDI]} - V_{[EFGHI]} = 972 - 288 = 684 \text{ cm}^3$$

2022, 1ª fase, caderno 1

7. Vamos começar por calcular o volume do cone pequeno, ou seja, o cone de vértice V , em que $[CD]$ é um diâmetro da base:

$$V_{\text{cone pequeno}} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{\pi \times 1^2 \times 80}{3} \approx 83,7758 \text{ m}^3$$

Agora vamos determinar o volume do cone grande, ou seja, o cone de vértice V , em que $[AB]$ é um diâmetro da base:

$$V_{\text{cone grande}} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{\pi \times 2^2 \times 160}{3} \approx 670,2064 \text{ m}^3$$

O volume do tronco de cone, representado a sombreado na figura, em metros cúbicos arredondado às unidades, é igual a:

$$V_{\text{tronco de cone}} = V_{\text{cone grande}} - V_{\text{cone pequeno}} = 670,2064 - 83,7758 \approx 586 \text{ m}^3$$

2022, 2ª fase, caderno 1

8. Vamos começar por calcular o volume do prisma quadrangular reto:

$$V_{[ABCDEFGH]} = A_b \times h = 1,4^2 \times 1,8 = 3,528 \text{ m}^3$$

Calculando o volume da pirâmide reta com 18 metros de altura:

$$V_{[Pirâmide\ reta\ grande]} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{1,2^2 \times 18}{3} = 8,64 \text{ m}^3$$

Calculando o volume da pirâmide reta com $18 - 4,5 = 13,5$ metros de altura e base quadrada $[NOPM]$:

$$V_{[Pirâmide\ reta\ pequena]} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{0,9^2 \times 13,5}{3} = 3,645 \text{ m}^3$$

O volume do obelisco em metros cúbicos, arredondado às unidades é igual a:

$$V_{\text{obelisco}} = V_{[ABCDEFGH]} + V_{[Pirâmide\ reta\ grande]} - V_{[Pirâmide\ reta\ pequena]} =$$

$$= 3,528 + 8,64 - 3,645 = 8,523 \approx 9 \text{ m}^3$$

2021, 1ª fase, caderno 1

9. O futuro contentor terá o mesmo volume e a mesma altura do contentor atual logo temos que:

$$\begin{aligned} V_{\text{Futuro contentor}} &= V_{\text{Contentor atual}} \Leftrightarrow V_{\text{Prisma quadrangular}} = V_{\text{Cilindro}} + V_{\text{Semiesfera}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A_{\text{Quadrado}} \times \text{altura} = A_{\text{Circulo}} \times \text{altura} + \frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{aresta}^2 \times (7,6 + 2,4) = \pi \times 2,4^2 \times 7,6 + \frac{4\pi \times (2,4)^3}{6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{aresta}^2 \times 10 = \pi \times 5,76 \times 7,6 + \frac{4\pi \times 13,824}{6} \Leftrightarrow \text{aresta}^2 = \frac{\pi \times 43,776 + \frac{4\pi \times 13,824}{6}}{10} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{aresta}^2 \approx 16,65 \Leftrightarrow \text{aresta} = \pm\sqrt{16,65} \Leftrightarrow \text{aresta}_{(\text{aresta} > 0)} \approx 4,1 \text{ dm} \end{aligned}$$

2019, 1ª fase, caderno 1

10. Vamos começar por calcular o volume do cilindro:

$$V_{\text{Cilindro}} = A_b \times h = \pi \times r^2 \times h = \pi \times \left(\frac{2,4}{2}\right)^2 \times (6,4 - 2,4) \approx 18,096 \text{ m}^3$$

Sabendo que o raio da esfera é igual ao raio da base do cilindro vem que:

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{2,4}{2}\right)^3 \approx 7,238 \text{ m}^3$$

De acordo com a figura o volume da cisterna é dado por:

$$V_{\text{cisterna}} = V_{\text{Cilindro}} + 2 \times V_{\text{Semiesfera}} = V_{\text{Cilindro}} + V_{\text{Esfera}} \approx 18,096 + 7,238 \approx 25,334 \text{ m}^3$$

O volume da cisterna é igual a 25,3 m³.

2019, 2ª fase, caderno 1

11. De acordo com a figura, x corresponde à altura do prisma [ABCDEF].

Vamos calcular x , a altura do prisma:

$$\begin{aligned} V_{[ABCDEF]} &= A_b \times x \Leftrightarrow V_{[ABCDEF]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} \times x \Leftrightarrow 445000 = \frac{78 \times 58,5}{2} \times x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 445000 = 2281,5 \times x \Leftrightarrow x = \frac{445000}{2281,5} \Leftrightarrow x \approx 195,05 \text{ cm} \end{aligned}$$

Calculando a área do painel solar, isto é, do retângulo [ACDE]:

$$A_{[ACDE]} = \overline{AE} \times \overline{DE} = 195,05 \times 97,5 \approx 19017 \text{ cm}^2$$

2019, Época especial, caderno 1

$$12. V_{Prisma} = A_{base} \times altura \Leftrightarrow V_{[STUVWXYZ]} = A_{[UTSV]} \times \overline{SX} \Leftrightarrow 1250 = A_{[UTSV]} \times 15 \\ \Leftrightarrow A_{[UTSV]} = \frac{1250}{15} \Leftrightarrow A_{[UTSV]} = \frac{1250}{15}$$

Como a base [UVST] do prisma é um trapézio temos que:

$$A_{[UTSV]} = \frac{1250}{15} \Leftrightarrow \frac{\overline{VS} + \overline{UT}}{2} \times \overline{UV} = \frac{1250}{15} \Leftrightarrow \frac{15 + \overline{UT}}{2} \times 7 = \frac{1250}{15} \Leftrightarrow 15 + \overline{UT} = \frac{1250 \times 2}{15 \times 7} \\ \Leftrightarrow \overline{UT} = \frac{1250 \times 2}{15 \times 7} - 15 \Leftrightarrow \overline{UT} \approx 8,08 \text{ cm}$$

2018, 1ª fase, caderno 1

13. De acordo com a figura temos que:

$$V_{[EFGHIJKL]} = V_{[EFGHV]} - V_{[JKLIV]}$$

$$V_{[EFGHV]} = \frac{1}{3} A_{[EFGH]} \times altura = \frac{1}{3} \times 9^2 \times 24 = 648 \text{ cm}^3$$

$$V_{[JKLIV]} = \frac{1}{3} A_{[JKLI]} \times altura = \frac{1}{3} \times 3^2 \times (24 - 16) = 24 \text{ cm}^3$$

Assim, o volume do tronco de pirâmide [EFGHIJKL] é:

$$V_{[EFGHIJKL]} = V_{[EFGHV]} - V_{[JKLIV]} = 648 - 24 = 624 \text{ cm}^3$$

2018, 2ª fase, caderno 1

14. Vamos começar por determinar o diâmetro de cada um dos quatro tanques esféricos:

$$V_{Tanque\ Esférico} = 33750 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \pi r^3 = 33750 \Leftrightarrow r^3 = \frac{3 \times 33750}{4\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{101250}{4\pi}} \\ r \approx 20,05 \text{ m}$$

Calculando o diâmetro D de cada um dos tanques:

$$D = 2 \times r \Leftrightarrow D \approx 2 \times 20,05 \Leftrightarrow D \approx 40,1$$

De acordo com a figura, o comprimento do compartimento onde estão colocados os quatro tanques esféricos é igual à soma dos diâmetros dos quatro tanques, logo vem que:

$$x = 4 \times d \approx 4 \times 40,1 \approx 160,4 \approx 160 \text{ m}$$

2018, Época especial, caderno 1

15. Para calcular o volume de uma pirâmide usamos a fórmula: $V_{[AFGE]} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$

$h = \overline{AF} = 9 \text{ cm}$ e $A_b = A_{[FGE]} = \frac{\overline{FG} \cdot \overline{FE}}{2}$ onde $\overline{FG} = \overline{FE}$ porque o prisma [ABC-DEFGH] tem bases quadradas.

Pelo critério AA os triângulos [AFG] e [AST] são semelhantes porque $F\hat{A}G = S\hat{A}T$ e $G\hat{F}A = A\hat{S}T$ (são ambos ângulos retos).

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{FG}} \Leftrightarrow \frac{6}{9} = \frac{4}{\overline{FG}} \Leftrightarrow \overline{FG} = 6 \text{ cm}$$

$$A_b = A_{[FGE]} = \frac{\overline{FG} \cdot \overline{FE}}{2} = \frac{6 \times 6}{2} = 18 \text{ cm}^2$$

$$\text{Portanto, } V_{[AFGE]} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \times 18 \times 9 = 54 \text{ cm}^3$$

2017, 1ª fase, caderno 1

16.

$$V_{\text{cubo}} = a^3 \Leftrightarrow 729 = a^3 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{729} \Leftrightarrow a = 9 \text{ cm}$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times A_b \times h \Leftrightarrow V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 9^2 \times \frac{9}{2} \Leftrightarrow V_{\text{pirâmide}} = 121,5 \text{ cm}^3$$

2017, 2ª fase, caderno 1

17. Vamos começar por determinar a altura da água no reservatório, ou seja, \overline{BP} :

$$\begin{aligned} V_{\text{cilindro sombreado}} = A_{\text{base}} \times \text{altura} &\Leftrightarrow 50 = \pi \left(\frac{4,4}{2}\right)^2 \times \overline{BP} \Leftrightarrow 50 = \pi \times 4,84 \times \overline{BP} \Leftrightarrow \\ \overline{BP} = \frac{50}{\pi \times 4,84} &\Leftrightarrow \overline{BP} \approx 3,29 \text{ m} \end{aligned}$$

De acordo com a figura vem que:

$$a = \overline{BP} + \overline{AP} + \frac{\overline{BC}}{2} \approx 3,29 + 1,5 + 2,2 \approx 7 \text{ m}$$

2017, Época especial, caderno 1

18. A diferença dos volumes do prisma e do cilindro é representada pela fórmula: $V_{\text{Prisma}} - V_{\text{Cilindro}} = A_{\text{Quadrado}} \times h - \frac{1}{3} \times A_{\text{Círculo}} \times h$

Como a diferença dos volumes é de 3000 cm^3 , vem que:

$$\begin{aligned} A_{\text{Quadrado}} \times h - \frac{1}{3} \times A_{\text{Círculo}} \times h = 3000 &\Leftrightarrow 20^2 \times h - \frac{1}{3} \times 10^2 \pi \times h = 3000 \Leftrightarrow \\ h(400 - \frac{1}{3} \times 100\pi) = 3000 &\Leftrightarrow h = \frac{3000}{400 - \frac{1}{3} \times 100\pi} \Leftrightarrow h \approx 35 \text{ cm} \end{aligned}$$

2016, 1ª fase, caderno 1

19. Para calcularmos o volume do prisma quadrangular [ABCDEFGH] usamos a fórmula:

$$V_{[ABCDEFGH]} = A_{[ABCD]} \times a$$

onde $a = \text{altura}_{\text{prisma}} = \text{altura}_{\text{cilindro}} = 5,3 \text{ cm}$

Através do raio do cilindro vamos determinar a área da base quadrada do prisma:

$$A_{[ABCD]} = \overline{BA}^2$$

$$\overline{DB} = 2 \times \text{raio} = 2 \times 3 = 6 \text{ cm}$$

Consideremos o triângulo [DAB] retângulo em A, usando o teorema de pitágoras vem que:

$$h^2 = c^2 + c^2 \Leftrightarrow 6^2 = 2\overline{BA}^2 \Leftrightarrow \frac{36}{2} = \overline{BA}^2 \Leftrightarrow \overline{BA}^2 = 18 \text{ cm}^2$$

Assim,

$$V_{[ABCDEFGH]} = A_{[ABCD]} \times a \Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]} = 18 \times 5,3 \Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]} \approx 95 \text{ cm}^3$$

2016, 2ª fase, caderno 1

20. Vamos começar por calcular \overline{VC} . O triângulo [VCA] é retângulo em , logo podemos usar o Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} (\overline{AV})^2 &= (\overline{VC})^2 + (\overline{CA})^2 \Leftrightarrow 15^2 = (\overline{VC})^2 + 6^2 \Leftrightarrow (\overline{VC})^2 = 189 \Leftrightarrow \overline{VC} = \pm\sqrt{189} \\ \Leftrightarrow \overline{VC} &= \sqrt{189}, \quad \overline{VC} > 0 \end{aligned}$$

O volume do sólido é:

$$\begin{aligned} V_{\text{sólido}} &= V_{\text{cone}} + V_{\text{semiesfera}} \Leftrightarrow V_{\text{sólido}} = \frac{1}{3}A_{\text{base}} \times \text{altura} + \frac{\frac{4}{3}\pi \times \text{raio}^3}{2} \Leftrightarrow V_{\text{sólido}} = \\ &= \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times \sqrt{189} + \frac{\frac{4}{3}\pi \times 6^3}{2} \Leftrightarrow V_{\text{sólido}} \approx 518,277 + 452,389 \Leftrightarrow V_{\text{sólido}} \approx 971 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

2016, Época especial, caderno 1

21. O volume total do sólido é representado pela fórmula: $V_{\text{sólido}} = V_{\text{cilindro}} + V_{\text{semiesfera}}$
 $\Leftrightarrow 285 = A_{\text{base}} \times a + \frac{\frac{4}{3}\pi \times r^3}{2} \Leftrightarrow 285 = \pi 3^2 \times \overline{DA} + \frac{\frac{4}{3}\pi \times 3^3}{2} \Leftrightarrow 285 = 9\pi \times \overline{DA} + \frac{4\pi \times 27}{6}$
 $\Leftrightarrow 285 - \frac{4\pi \times 27}{6} = 9\pi \times \overline{DA} \Leftrightarrow \overline{DA} = \frac{285 - \frac{4\pi \times 27}{6}}{9\pi} \Leftrightarrow \overline{DA} \approx 8,1 \text{ cm}$

2015, 1ª fase, caderno 1

22. O sólido é composto por 3 prismas quadrangulares em que 2 deles têm altura igual a e o outro tem altura igual a $\frac{2}{3} \times \overline{DE} = \frac{2}{3} \times 9 = 6 \text{ cm}$. Como as bases dos 3 prismas quadrangulares são iguais entre si, a área da base de cada prisma é igual a s .

O volume do sólido total é igual à soma dos volumes dos 3 prismas quadrangulares:

$$\begin{aligned} V_{\text{sólido}} &= V_{[ABCDEFGH]} + V_{[LKNMHGJI]} + V_{[PQROIJTS]} \Leftrightarrow 248 = s \times 9 + s \times 6 + s \times 9 \\ \Leftrightarrow 248 &= 24s \Leftrightarrow s = \frac{248}{24} \Leftrightarrow s \approx 10,3 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

2015, 2ª fase, caderno 1

23. Vamos seguir a sugestão e calcular a altura da pirâmide [EFGHI]:

$$V_{[EFGHI]} = \frac{1}{3}A_{\text{base}} \times a \Leftrightarrow 6 = \frac{1}{3} \times 3^2 \times a \Leftrightarrow 6 = 3 \times a \Leftrightarrow a = \frac{6}{3} \Leftrightarrow a = 2 \text{ cm}$$

A altura do tronco de pirâmide [ABCDEFGH] é:

$$h = \overline{IJ} - 2 = 15 - 2 = 13 \text{ cm}$$

Assim o volume do tronco da pirâmide quadrangular regular [ABCDEFGH] é:

$$\begin{aligned} V_{[ABCDEFGH]} &= \frac{h}{3}(L^2 + L \times l + l^2) \Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]} = \frac{13}{3}(8^2 + 8 \times 3 + 3^2) \Leftrightarrow \\ V_{[ABCDEFGH]} &= \frac{13}{3}(73 + 24) \Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]} = \frac{13 \times 97}{3} \Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]} \approx 420 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

2015, Época especial, caderno 1