Resolução - Trigonometria

1. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, usando a definição de cosseno vem que:

   $\cos(A\hat{C}B) = \frac{c.oposto}{hipotenusa} \Leftrightarrow \cos(A\hat{C}B) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos(11^o) = \frac{960}{\overline{AC}} \Leftrightarrow 0,982 = \frac{960}{\overline{AC}} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{960}{0{,}982} \Leftrightarrow \overline{AC} \approx 978$ cm

   2024, 1ª fase

2. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, usando a definição de tangente vem que:

   $\tan(B\hat{A}C) = \frac{c.oposto}{hipotenusa} \Leftrightarrow \tan(B\hat{A}C) = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} \Leftrightarrow \tan(39^o) = \frac{\overline{BC}}{100} \Leftrightarrow 0,81 = \frac{\overline{BC}}{100} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \overline{BC} = 0,81 \times 100 \Leftrightarrow \overline{BC} \approx 81$ m

   2024, 2ª fase

3. O triângulo $[PMC]$ é retângulo em M, usando a definição de tangente vem que:

   $\tan(C\hat{P}M) = \frac{c.oposto}{c.adjacente} \Leftrightarrow \tan(C\hat{P}M) = \frac{\overline{CM}}{\overline{PM}} \Leftrightarrow \tan(42) = \frac{1{,}8}{\overline{PM}} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow 0,9004 = \frac{1{,}8}{\overline{PM}} \Leftrightarrow \overline{PM} = \frac{1{,}8}{0{,}9004} \Leftrightarrow \overline{PM} \approx 1,9991$ m

   Pela observação da figura sabemos que:

   $$\overline{PB} = \overline{PM} - \overline{MB} = 1,9991 - 1,1 = 0,8891 \approx 0,9 \text{ m}$$

   2023, 1ª fase

4. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, usando a definição de tangente vem que:

   $\tan(B\hat{A}C) = \frac{c.oposto}{c.adjacente} \Leftrightarrow \tan(B\hat{A}C) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \tan(B\hat{A}C) = \frac{432}{565} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow B\hat{A}C = \tan^{-1}\left(\frac{432}{565}\right) \Leftrightarrow B\hat{A}C \approx 37\ ^o$

   2023, 2ª fase

5. O triângulo $[EDC]$ é retângulo em D, usando a definição de tangente vem que:

   $\tan(E\hat{C}D) = \frac{c.oposto}{c.adjacente} \Leftrightarrow \tan(E\hat{C}D) = \frac{\overline{ED}}{\overline{DC}} \Leftrightarrow \tan(77) = \frac{\overline{ED}}{1{,}7} \Leftrightarrow 4,3315 = \frac{\overline{ED}}{1{,}7} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \overline{ED} = 4,3315 \times 1,7 \Leftrightarrow \overline{ED} \approx 7,364$ m

   $\overline{AE} = \overline{ED} + \overline{DA} = 7,364 + 1,7 \approx 9$ m

   2023, Época especial

6. O triângulo $[BAF]$ é retângulo em A, usando a definição de seno vem que:

   $\sin(F\hat{B}A) = \frac{c.oposto}{hipotenusa} \Leftrightarrow \sin(F\hat{B}A) = \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \Leftrightarrow \sin(25) = \frac{116}{\overline{BF}} \Leftrightarrow 0,4226 = \frac{116}{\overline{BF}} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \overline{BF} = \frac{116}{0{,}4226} \Leftrightarrow \overline{BF} \approx 274$ m

   2022, 1ª fase, caderno 1

7. O triângulo $[JFG]$ é retângulo em F, usando a definição de cosseno vem que:

   $\cos(F\hat{G}J) = \frac{c.adjacente}{hipotenusa} \Leftrightarrow \cos(F\hat{G}J) = \frac{\overline{FG}}{\overline{JG}} \Leftrightarrow \cos(26) = \frac{10}{\overline{JG}} \Leftrightarrow 0,8988 = \frac{10}{\overline{JG}} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \overline{JG} = \frac{10}{0{,}8988} \Leftrightarrow \overline{JG} \approx 11,126$ dm

   A área do painel fotovoltaico, representado pelo retângulo $[GHIJ]$, arredondado às unidades, é igual a:

   $$A_{[GHIJ]} = C \times L = 16 \times 11,126 \approx 178 \text{ dm}^2$$

   2022, 2ª fase, caderno 1

8. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, usando a definição de seno vem que:

   $\sin A\hat{C}B = \frac{c.oposto}{hipotenusa} \Leftrightarrow \sin A\hat{C}B = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \sin A\hat{C}B = \frac{6}{7} \Leftrightarrow \sin A\hat{C}B \approx 0,857 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow A\hat{C}B \approx \sin^{-1}(0,857) \Leftrightarrow A\hat{C}B \approx 59^o$

   2021, 1ª fase, caderno 1

9. Vamos começar por determinar $\overline{AC}$.

   O triângulo [ACB] é retângulo em C, usando a definição de seno vem que:

   $\sin A\hat{B}C = \frac{c.oposto}{hipotenusa} \Leftrightarrow \sin 42^o = \frac{\overline{AC}}{18} \Leftrightarrow \overline{AC} = \sin 42^o \times 18 \Leftrightarrow \overline{AC} \approx 0,6691 \times 18$
   $\Leftrightarrow \overline{AC} \approx 12,0438$ m

   De acordo com a figura, a distância do ponto A à reta s é:

   $$\overline{AC} + 2,8 \approx 12,0438 + 2,8 \approx 14,8 \text{ m}$$

   2019, 1ª fase, caderno 1

10. Vamos começar por determinar $\overline{KA}$.

    O triângulo [KMA] é retângulo em A, usando a definição de seno vem que:

    $\sin A\hat{M}K = \frac{c.oposto}{hipotenusa} \Leftrightarrow \sin 66^o = \frac{\overline{KA}}{5} \Leftrightarrow \overline{KA} = \sin 66^o \times 5 \Leftrightarrow \overline{KA} \approx 0,9135 \times 5$
    $\Leftrightarrow \overline{KA} \approx 4,5675$ m

    A distância entre os planos JKL e EFG é igual a 2 m, logo $\overline{FK} = 2$.

    De acordo com a figura, a distância entre os planos ABC e FGH é:

    $$\overline{KA} + \overline{FK} \approx 4,5675 + 2 \approx 6,5675 \approx 6,6 \text{ m}$$

    2019, 2ª fase, caderno 1

11. Observando a figura temos que:

    $$\overline{BA} = \overline{CA} - \overline{CB} = \overline{CA} - \overline{DE} = 8 - 0,16 = 7,84 \text{ m}$$

    O triângulo $[BEA]$ é retângulo em B, usando a definição de seno vem que:

    $\sin\alpha = \frac{c.oposto}{hipotenusa} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\overline{BA}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{7,84}{10,9} \Leftrightarrow \sin\alpha \approx 0,719 \Leftrightarrow \alpha \approx \sin^{-1}(0,719) \Leftrightarrow$

    $\Leftrightarrow \alpha \approx 46^o$

2019, Época especial, caderno 1

12. Usando a fórmula fundamental da trignometria:

$\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1 \Leftrightarrow \cos^2\beta + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2\beta + \frac{5}{9} = 1 \Leftrightarrow \cos^2\beta = 1 - \frac{5}{9} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos\beta = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\beta > 0$ porque β é um ângulo agudo

2019, Época especial, caderno 2

13. Vamos seguir a sugestão e começar por determinar $\overline{AE}$.

O triângulo [ADE] é retângulo em E, usando a definição de cosseno vem que:

$\cos(D\hat{A}E) = \frac{c.adjacente}{hipotenusa} \Leftrightarrow \cos(32) = \frac{\overline{AE}}{0{,}90} \Leftrightarrow \overline{AE} = \cos(32) \times 0,90 \Leftrightarrow \overline{AE} \approx 0,848 \times 0,90 \Leftrightarrow \overline{AE} \approx 0,763$ m

De acordo com a figura temos:

$$\overline{FE} = \overline{FA} - \overline{AE} \approx 1,05 - 0,763 \approx 0,29 \text{ m}$$

2018, 1ª fase, caderno 1

14. Vamos seguir a sugestão e começar por determinar $A\hat{C}M$.

M é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, logo vem que:

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{4{,}62}{2} = 2,31$$

Considerando o triângulo retângulo [AMC] e recorrendo à definição de tangente temos:

$$\tan A\hat{C}M = \frac{\overline{AM}}{\overline{CM}} \Leftrightarrow \tan A\hat{C}M = \frac{2{,}31}{4{,}35} \Leftrightarrow A\hat{C}M = \tan^{-1}\frac{2{,}31}{4{,}35} \Leftrightarrow A\hat{C}M \approx 28^o$$

De acordo com a figura, o segmento $[CM]$ é a bissetriz de $A\hat{C}B$, temos que:

$$A\hat{C}B = 2 \times A\hat{C}M \approx 2 \times 28 = 56^o$$

2018, 2ª fase, caderno 1

15. De acordo com a figura, relativamente aos triângulos [ABC] e [FED] temos que:

$$\overline{AC} = \overline{DE} \quad , \quad B\hat{A}C = F\hat{E}D \quad \text{e} \quad \overline{CB} = \overline{DF}$$

Pelo critério LAL podemos afirmar que os triângulos [ABC] e [FED] são iguais, ou seja, $\overline{AB} = \overline{FE}$.

Por observação da figura, sabemos que:

$$\overline{CD} = \overline{BF} = \overline{AE} - (\overline{AB} + \overline{FE}) = (\overline{AC} + \overline{DE}) - 2 \times \overline{AB}$$

Recorrendo à definição de cosseno vamos determinar o lado $\overline{AB}$ do triângulo [ABC]:

$\cos(35^o) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos(35^o) = \frac{\overline{AB}}{46} \Leftrightarrow \overline{AB} = \cos(35^o) \times 46 \Leftrightarrow \overline{AB} \approx 0,82 \times 46 \Leftrightarrow \overline{AB} \approx 37,72$ m

Assim temos que:

$$\overline{CD} = (\overline{AC} + \overline{DE}) - 2 \times \overline{AB} \approx (46 + 46) - 2 \times 37,72 \approx 16,56 \approx 17 \text{ m}$$

2018, Época especial, caderno 1

16. Observando a figura sabemos que $\overline{AB} = \overline{EC} + 0,2$ m (20cm=0,2m).

Recorrendo à definição de cosseno vamos determinar o lado $\overline{EC}$ do triângulo [DCE]:

$$\cos(10^o) = \frac{\overline{EC}}{4,1} \Leftrightarrow \overline{EC} = \cos(10^o) \times 4,1 \Leftrightarrow \overline{EC} \approx 0,985 \times 4,1 \Leftrightarrow \overline{EC} \approx 4,039 \text{ m}$$

A distância do candeeiro ao tabuleiro da ponte, em metros, arredondado às décimas é:

$\overline{AB} \approx 4,039 + 0,2 \approx 4,2$ m

2017, 1ª fase, caderno 1

17. Pela observação da figura sabemos que $\overline{DF} = \overline{BH} + \overline{EF}$

$\overline{AD} - \overline{BC} = 23 - 12 = 11$ m

$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{GE} = \frac{11}{2} = 5,5$ m

Vamos determinar $\overline{BH}$:

$$\tan(30^o) = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \tan(30^o) = \frac{\overline{BH}}{5{,}5} \Leftrightarrow \overline{BH} = 5,5 \times \tan(30^o) \approx 3,174 \text{ m}$$

Vamos determinar $\overline{EF}$:

$$\tan(30^o) = \frac{\overline{FE}}{\overline{GE}} \Leftrightarrow \tan(30^o) = \frac{\overline{FE}}{5{,}5} \Leftrightarrow \overline{GE} = 5,5 \times \tan(30^o) \approx 3,174 \text{ m}$$

$\overline{DF} = \overline{BH} + \overline{EF} = 3,174 + 3,174 = 6,35$ m

2017, 2ª fase, caderno 1

18. Seguindo a sugestão vamos começar por determinar $\overline{ON}$.

Como o triângulo [ONM] é retângulo em N, pela definição de cos temos:

$$\cos(M\hat{O}N) = \frac{c.adjacente}{hipotenusa} \Leftrightarrow \cos(56) = \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} \Leftrightarrow \cos(56) = \frac{\overline{ON}}{2} \Leftrightarrow \overline{ON} \approx 2 \times 0,559$$
$$\overline{ON} \approx 1,118 \text{ m}$$

Observando a figura 2 vem que:

$$\overline{NP} = \overline{OP} - \overline{ON} \approx 2,5 - 1,118 \approx 1,38 \text{ m}$$

2017, Época especial, caderno 1

19. Vamos seguir a sugestão e começar por determinar $\overline{TC}$:

O triângulo [CMT] é retângulo em C. Relativamente a $C\hat{M}T$, $\overline{TC}$ e $\overline{MC}$ são os catetos adjacente e oposto, respetivamente.

Usando a razão trignométrica da tangente vem que:

$\tan(60^o) = \frac{\overline{TC}}{\overline{MC}} \Leftrightarrow \tan(60^o) = \frac{\overline{TC}}{25{,}6} \Leftrightarrow \overline{TC} = \tan(60^o) \times 25,6 \Leftrightarrow \overline{TC} \approx 1,73 \times 25,6$
$\Leftrightarrow \overline{TC} \approx 44,29$ m

Com o valor de $\overline{TC}$ podemos determinar $\overline{CR}$:

O triângulo [TCR] é retângulo em C. Relativamente a $C\hat{R}T$, $\overline{TC}$ e $\overline{CR}$ são os catetos oposto e adjacente, respetivamente.

Mais uma vez, usando a razão trignométrica da tangente vem que:

$\tan(45^o) = \frac{\overline{TC}}{\overline{CR}} \Leftrightarrow \tan(45^o) \approx \frac{\overline{44{,}29}}{\overline{CR}} \Leftrightarrow \overline{CR} \approx \frac{44{,}29}{\tan(45^o)} \Leftrightarrow \overline{CR} \approx \frac{44{,}29}{1} \Leftrightarrow \overline{CR} \approx 44,29$ m

$$\overline{MR} = \overline{MC} + \overline{CR} \approx 25,6 + 44,29 \approx 70 \text{ m}$$

2016, 1ª fase, caderno 1

20. Observando a figura temos que $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}$

Como o triângulo [ABD] é isósceles e $\overline{AC}$ é a altura relativa à base $\overline{BD}$, temos que:

$$\overline{BC} = \overline{CD} \qquad \text{e} \qquad B\hat{A}C = \frac{B\hat{A}D}{2} = \frac{76}{2} = 38^o$$

Pela definição da tangente vem que:

$\tan(38^o) = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \tan(38^o) = \frac{\overline{BC}}{51} \Leftrightarrow \overline{BC} = \tan(38^o) \times 51 \Leftrightarrow \overline{BC} \approx 0,78 \times 51 \Leftrightarrow \overline{BC} \approx 39,78$

Então, $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 2 \times \overline{BC} \approx 2 \times 39,78 \approx 80$ m

2016, 2ª fase, caderno 1

21. O triângulo [AOP] é retângulo em P, usando a definição de tan vem que:

$\tan(A\hat{O}P) = \frac{c.oposto}{c.adjacente} \Leftrightarrow \tan(A\hat{O}P) = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \tan(55) = \frac{225}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{OP} = \tan(55) \times 225 \Leftrightarrow \overline{OP} = \frac{225}{\tan(55)} \Leftrightarrow \overline{OP} \approx \frac{225}{1{,}43} \Leftrightarrow \overline{OP} \approx 157,34$ m

De acordo com a figura temos que:

$$\overline{OR} = \overline{OP} + \overline{PR} \approx 157,34 + 132 \approx 289,34 \text{ m}$$

Como o triângulo [BOR] é retângulo em R, usando a definição de tan vem que:

$\tan(B\hat{O}R) = \frac{\overline{BR}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \tan(B\hat{O}R) \approx \frac{225}{289{,}34} \Leftrightarrow \tan(B\hat{O}R) \approx 0,78 \Leftrightarrow B\hat{O}R \approx \tan^{-1}(0,78) \Leftrightarrow B\hat{O}R \approx 38^o$

2016, Época especial, caderno 1

22. Vamos começar por determinar o raio do semicírculo de diâmetro $\overline{AD}$ usando a definição de :

$$\sin(B\hat{A}O) = \frac{\overline{OB}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \sin 25^o = \frac{1}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \overline{AO} \approx \frac{1}{0{,}423} \Leftrightarrow \overline{AO} \approx 2,364$$

$A_{semicírculo} = \frac{\pi(\overline{AO})^2}{2} \Leftrightarrow A_{semicírculo} \approx \frac{\pi\times(2{,}364)^2}{2} \Leftrightarrow A_{semicírculo} \approx 8,8\ \text{cm}^2$

2015, 2ª fase, caderno 1

23. Vamos começar por determinar $\overline{BM}$. Observando a figura temos que:

$$\overline{AB} = \overline{PB} - \overline{PA} \Leftrightarrow \overline{AB} = 8 - 2 \Leftrightarrow \overline{AB} = 6$$

Como M é o ponto médio da corda [AB], temos que:

$$\overline{BM} = \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{BM} = \frac{6}{2} \Leftrightarrow \overline{BM} = 3$$

De acordo com a figura temos que $\overline{CB}$ é o raio da circunferência assim vem que:

$$\overline{CB} = \overline{CT} = 9,2$$

Como o triângulo [BCA] é isósceles e o ponto M é o ponto médio relativamente a $\overline{AB}$, então $\overline{CM}$ é a altura relativamente a $\overline{AB}$, ou seja, $B\hat{M}C$ é um ângulo reto.

Portanto o triângulo [BCM] é retângulo em M.

Usando a definição de seno vem que:

$\sin(B\hat{C}M) = \frac{c.oposto}{hipotenusa} \Leftrightarrow \sin(B\hat{C}M) = \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \sin(B\hat{C}M) = \frac{3}{9{,}2} \Leftrightarrow \sin(B\hat{C}M) = \frac{3}{9{,}2} \Leftrightarrow \sin(B\hat{C}M) \approx 0,326 \Leftrightarrow B\hat{C}M = \sin^{-1}(0,326) \Leftrightarrow B\hat{C}M = 19^o$

2015, Época especial, caderno 1