

Resolução - Sequências e sucessões

1. Cada termo da sequência dos quadrados cinzentos, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando 2 unidades ao termo anterior, logo a expressão geradora desta sequência é igual a $2n+?$.

Quando $n = 1$, o primeiro termo da sequência dos quadrados cinzentos é igual a 0, desta forma conseguimos determinar o "?":

$$2 \times 1 + ? = 0 \Leftrightarrow ? = -2$$

A expressão geradora da sequência dos quadrados cinzentos é igual a $2n - 2$.

Assim temos a expressão geradora da sequência dos quadrados brancos, que é igual à diferença entre 100 e a expressão geradora da sequência dos quadrados cinzentos:

$$100 - (2n - 2) = 100 - 2n + 2 = 102 - 2n$$

Vamos calcular a ordem do termo da sequência que tem exatamente 26 quadrados brancos:

$$102 - 2n = 26 \Leftrightarrow 102 - 26 = 2n \Leftrightarrow 76 = 2n \Leftrightarrow n = 38$$

A ordem do termo que tem exatamente 26 quadrados brancos é 38.

2024, 1ª fase

2. Cada termo da sequência dos círculos, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando 4 círculos ao termo anterior, logo a expressão geradora desta sequência é igual a $4n+?$.

Quando $n = 1$, o primeiro termo da sequência dos círculos é igual a 12, desta forma conseguimos determinar o "?":

$$4 \times 1 + ? = 12 \Leftrightarrow ? = 8$$

A expressão geradora da sequência dos círculos é igual a $4n + 8$.

Vamos calcular a ordem do termo da sequência dos círculos que é igual a 644:

$$4n + 8 = 644 \Leftrightarrow 4n = 644 - 8 \Leftrightarrow n = \frac{636}{4} \Leftrightarrow n = 159$$

O termo da sequência que tem 644 círculos é o termo de ordem 159.

Cada termo da sequência dos quadrados, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando 2 quadrados ao termo anterior, logo a expressão geradora desta sequência é igual a $2n+?$.

Quando $n = 1$, o primeiro termo da sequência dos quadrados é igual a 5, desta forma conseguimos determinar o "?":

$$2 \times 1 + ? = 5 \Leftrightarrow ? = 3$$

A expressão geradora da sequência dos quadrados é igual a $2n + 3$.

Através da expressão geradora da sequência dos quadrados conseguimos calcular quantos quadrados tem o termo da sequência de ordem 159:

$$2 \times 159 + 3 = 321$$

O termo de ordem 149 tem da sequência tem 321 quadrados.

2024, 2ª fase

3. Cada termo da sequência dos quadrados brancos, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando 4 unidades ao termo anterior, logo a expressão geradora desta sequência é igual a $4n+?$.

Quando $n = 1$, o primeiro termo da sequência dos quadrados brancos é igual a 8, desta forma conseguimos determinar o "?":

$$4 \times 1 + ? = 8 \Leftrightarrow ? = 4$$

A expressão geradora desta sequência é igual à soma da expressão geradora da sequência dos quadrados cinzentos com a expressão geradora da sequência dos quadrados brancos:

$$n^2 + 4n + 4$$

Vamos calcular a ordem do termo da sequência que é igual a 529:

$$\begin{aligned} n^2 + 4n + 4 = 529 &\Leftrightarrow (n + 2)^2 = 529 \Leftrightarrow n + 2 = \pm\sqrt{529} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n + 2 = 23 \vee n + 2 = -23 \Leftrightarrow n = 21 \vee n = -25 \end{aligned}$$

Como n é um número natural $n = 21$, logo o termo desta sequência que tem 529

quadrados é o termo de ordem 21.

O termo de ordem 21 tem $4 \times 21 + 4 = 88$ quadrados brancos.

2023, 1ª fase

4. A expressão geradora da sequência dos quadrados brancos é igual a:

$$n^2 - n$$

Vamos calcular a ordem do termo desta sequência que tem exatamente 552 quadrados brancos:

$$n^2 - n = 552 \Leftrightarrow n^2 - n - 552 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -1 \quad c = -552$$

Usando a fórmula resolvente temos:

$$\begin{aligned} n &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-552)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2208}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{2209}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n = \frac{1+47}{2} \vee n = \frac{1-47}{2} \Leftrightarrow n = \frac{48}{2} \vee n = -\frac{46}{2} \Leftrightarrow n = 24 \vee n = -23 \end{aligned}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, $n = 24$.

O termo desta sequência que tem 552 quadrados brancos tem ordem 24.

A expressão geradora da sequência dos quadrados cinzentos é igual a n .

Concluimos que o termo que tem exatamente 552 quadrados brancos (termos de ordem 24) tem 24 quadrados cinzentos.

2023, 2ª fase

5. Cada termo da sequência dos quadrados brancos, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando 1 unidade ao termo anterior, logo a expressão geradora desta sequência é igual a n .

A expressão geradora desta sequência é igual à soma da expressão geradora da sequência dos quadrados cinzentos com a expressão geradora da sequência dos quadrados brancos:

$$n^2 + n$$

Vamos calcular a ordem do termo da sequência que é igual a 306:

$$n^2 + n = 306 \Leftrightarrow n^2 + n - 306 = 0$$

$$a = 1 \quad b = 1 \quad c = -306$$

Usando a fórmula resolvente temos:

$$\begin{aligned} n &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times -306}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 1224}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1225}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n = \frac{-1 + 35}{2} \vee n = \frac{-1 - 35}{2} \Leftrightarrow n = \frac{34}{2} \vee n = -\frac{36}{2} \Leftrightarrow n = 17 \vee n = -18 \Leftrightarrow \\ &n = 17, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

O termo desta sequência que tem um total de 306 quadrados tem ordem 17.

O número de quadrados cinzentos do termo que tem ordem 17 é igual a:

$$17^2 = 289$$

2023, Época especial

6. Cada termo desta sequência, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando 5 unidades ao termo anterior, logo a expressão geradora desta sequência é igual a $5n + ?$.

Quando $n = 1$, o primeiro termo da sequência é igual a 9, desta forma conseguimos determinar o "?":

$$5 \times 1 + ? = 9 \Leftrightarrow ? = 4$$

Assim sabemos que a expressão geradora desta sequência é igual a $5n + 4$.

Vamos calcular a ordem do termo da sequência que é igual a 204:

$$5n + 4 = 204 \Leftrightarrow 5n = 204 - 4 \Leftrightarrow 5n = 200 \Leftrightarrow n = 40$$

O termo desta sequência que é igual a 204 tem ordem 40.

2022, 1ª fase, caderno 2

7. O número de quadrados de cada termo desta sequência, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando 2 unidades ao termo anterior, logo a expressão geradora do número de quadrados desta sequência é igual a $2n + 2$.

Vamos calcular a ordem do termo da sequência que tem 32 quadrados:

$$2n + 2 = 32 \Leftrightarrow 2n = 32 - 2 \Leftrightarrow 2n = 30 \Leftrightarrow n = 15$$

O termo desta sequência que tem 32 quadrados é o termo de ordem 15.

O número de octógonos de cada termo desta sequência, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando 1 unidade ao termo anterior, logo a expressão geradora do número de octógonos desta sequência é igual a n .

Logo o número de octógonos do termo desta sequência de ordem 15 é igual a 15.

2022, 2ª fase, caderno 2

8. Como cada termo desta sequência, com exceção do primeiro, obtém-se multiplicando o termo anterior por $\frac{1}{2}$, conseguimos continuar a preencher esta tabela:

1º termo	2º termo	3º termo	4º termo	5º termo	6º termo
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$	$\frac{1}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$	$\frac{1}{32} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$

O termo desta sequência que é igual a $\frac{1}{64}$ tem ordem 6.

2021, 1ª fase, caderno 2

9. Vamos começar por determinar o termo geral da sucessão:

$$u_n = 4n + 1$$

Para saber a ordem do termo da sequência que tem 4021 círculos basta resolver a equação:

$$4n + 1 = 4021 \Leftrightarrow 4n = 4020 \Leftrightarrow n = \frac{4020}{4} \Leftrightarrow n = 1005$$

Assim temos que o termo da sequência de ordem 1005 tem 4021 círculos.

2019, 1ª fase, caderno 2

10. Analisando com atenção os primeiros três termos desta sequência podemos concluir que o número de círculos total de cada termo é sempre igual ao triplo de círculos cinzentos mais um.

$$\text{Número de círculos total} = 3 \times \text{Número de círculos cinzentos} + 1$$

Sabendo que um termo da sequência tem 110 círculos cinzentos então esse mesmo termo tem, no total, $3 \times 110 + 1 = 331$ círculos.

2019, 2ª fase, caderno 2

11. Observando a sequência sabemos que:

- O número total de segmentos de reta do termo de ordem 1 da sucessão é 11
- O número total de segmentos de reta do termo de ordem 2 da sucessão é 17

Opção(D)

2018, 1ª fase, caderno 2

12. No primeiro dia o aparelho recolheu 12 amostras, a partir do segundo dia o mesmo aparelho foi reprogramado e passou a recolher 6 amostras, ou seja:

$n = 1$ Número total de amostras de água recolhidas pelo aparelho = 12

$n = 2$ Número total de amostras de água recolhidas pelo aparelho = 6

$n = 3$ Número total de amostras de água recolhidas pelo aparelho = 6

...

Opção(D)

2018, 2ª fase, caderno 2

13. O termo geral desta sequência é $3n + k$, visto que cada termo da sequência (com exceção do primeiro) tem mais 3 círculos que o termo anterior.

A constante k determina-se a partir do primeiro termo, ou seja, para $n = 1$ o termo geral é $3 + k$ que tem de ser igual a 7, logo $k = 4$.

Então o termo geral desta sequência é $3n + 4$.

Opção(C)

2018, Época especial, caderno 2

14. O termo geral desta sequência é $3n+k$, visto que cada termo da sequência (com exceção do primeiro) tem mais 3 círculos que o termo anterior.

A constante k determina-se a partir do primeiro termo, ou seja, para $n = 1$ o termo geral é $3 + k$ que tem de ser igual a 6, logo $k = 3$.

Então o termo geral desta sequência é $3n + 3$, fazendo $n = 100$ obtemos o número de círculos que tem o centésimo termo da sequência: $3 \times 100 + 3 = 303$ círculos.

2017, 1ª fase, caderno 2

15. Através do tabela sabemos que o primeiro termo da sucessão é igual a -2, logo $b^1 = -2$, ou seja, $b = -2$.

2017, 2ª fase, caderno 2

16. Pela observação da figura temos que o número de cubos cinzentos, em cada termo, é igual ao número do termo. Desta maneira sabemos que o termo de ordem n tem n cubos cinzentos.

Então o número de cubos brancos do termo de ordem n da sucessão é igual à diferença do número total de cubos com o número de cubos cinzentos:

$$n^2 - n \quad \text{cubos brancos}$$

2017, Época especial, caderno 2

17. Vamos calcular o número total de círculos (brancos e pretos) no 100º termo através da expressão dada:

$$3 \times 100 + 6 = 306$$

Pela observação da figura 3 temos que o número de círculos pretos, em cada termo, é igual ao número do termo. Desta maneira sabemos que o termo de ordem 100 tem 100 círculos pretos.

Então o número de círculos brancos do 100º termo da sequência é igual à diferença do número total de círculos com o número de círculos pretos:

$$306 - 100 = 206 \quad \text{círculos brancos}$$

2016, 2ª fase, caderno 2

18. De acordo com a figura temos que:

$$u_1 = 5 \quad u_2 = 8 \quad u_3 = 11$$

Opção(D)

2016, Época especial, caderno 2

19. O termo de ordem n desta sequência tem ao todo n^2 bolas sendo que n são bolas pretas. Assim, o número de bolas brancas do termo de ordem n é dado pela expressão:

$$n^2 - n$$

Logo o número de bolas brancas do décimo termo é igual a $10^2 - 10 = 90$.

2015, Época especial, caderno 2