Resolução - Semelhança de triângulos

1. Pelo critério AA os triângulos $[EDC]$ e $[ABC]$ são semelhantes:

   - $C\hat{D}E = C\hat{B}A$, porque são ângulos retos;
   - $E\hat{C}D = A\hat{C}B$, pois são o mesmo ângulo.

   Como os triângulos $[EDC]$ e $[ABC]$ são semelhantes sabemos que os seus lados correspondentes são diretamente proporcionais:

   $$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \frac{21}{6} = \frac{\overline{AC}}{a} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{21a}{6} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{7a}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{7}{2}a$$

   Opção(D)

   2024, 1ª fase

2. Pelo critério AA os triângulos $[EDC]$ e $[ABC]$ são semelhantes:

   - $C\hat{D}E = C\hat{A}B$, porque as retas AB e DE são paralelas;
   - $E\hat{C}D = A\hat{C}B$, pois são o mesmo ângulo.

   Como os triângulos $[EDC]$ e $[ABC]$ são semelhantes sabemos que os seus lados correspondentes são diretamente proporcionais:

   $$\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{3}{8} = \frac{a}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{8a}{3} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{8}{3}a$$

   Opção(B)

   2024, 2ª fase

3. Vamos calcular a área do triângulo [ABC]:

   $$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AM}}{2} = \frac{15 \times 12}{2} = 90$$

   Sabemos que os triângulos [AED] e [ABC] são semelhantes porque têm um ângulo comum e os segmentos de reta $\overline{ED}$ e $\overline{BC}$ são paralelos.

   A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre essas figuras, ou seja:

$$\frac{A_{[ABC]}}{A_{[AED]}} = r^2 \Leftrightarrow \frac{90}{10} = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow r = \pm 3 \Leftrightarrow r = 3 \quad (r > 0)$$

Através da razão de semelhança entre os triângulos [AED] e [ABC] podemos determinar o segmento de reta $\overline{AP}$:

$\overline{AM} = 3 \times \overline{AP} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{12}{3} \Leftrightarrow \overline{AP} = 4$

Pela observação da figura vem que:

$\overline{EF} = \overline{PM} = \overline{AM} - \overline{AP} = 12 - 4 = 8$

2023, 1ª fase

4. Pelo critério AA os triângulos $[HIE]$ e $[ABC]$ são semelhantes:
   - $B\hat{A}C = I\hat{H}E$, porque AB//CG e AC//HE;
   - $A\hat{B}C = H\hat{I}E$, pois AB//CG e BD//IE.

   A área do triângulo $[ABC]$ é igual a:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AB}}{2} = \frac{16 \times 12}{2} = 96$$

   Como os triângulos $[ABC]$ e $[HIE]$ são semelhantes sabemos que:

   $\frac{A_{[ABC]}}{A_{[HIE]}} = r^2$, sendo r a razão de semelhança entre os triângulos $[HIE]$ e $[ABC]$.

   Daqui conseguimos determinar a constante r:

   $\frac{96}{24} = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 4 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow r = 2, \quad r > 0$

   Sabendo a razão de semelhança r, podemos determinar $\overline{IE}$:

   $\overline{IE} = \frac{\overline{BC}}{r} = \frac{16}{2} = 8$

   Pela observação da figura temos que:

   $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{IE} = 16 + 8 = 24$

   2023, 2ª fase

5. Vamos começar por calcular a área do triângulo $[CBA]$:

$$A_{[CBA]} = A_{[BCDE]} + A_{[DEA]} = 48 + \frac{4 \times 3}{2} = 54$$

Pelo critério AA os triângulos $[DEA]$ e $[CBA]$ são semelhantes:

- $D\hat{E}A = C\hat{B}A$, porque são ângulos retos;
- $D\hat{A}E = C\hat{A}B$, pois é um ângulo comum.

Como os triângulos $[DEA]$ e $[CBA]$ são semelhantes sabemos que:

$\frac{A_{[CBA]}}{A_{[DEA]}} = r^2$, sendo r a razão de semelhança entre os triângulos $[DEA]$ e $[CBA]$.

Daqui conseguimos determinar a constante r:

$\frac{54}{6} = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow r = 3, \quad r > 0$

Sabendo a razão de semelhança r, podemos determinar $\overline{BC}$:

$\overline{BC} = \overline{DE} \times r = 3 \times 3 = 9$

2023, Época especial

6. Os triângulos [ADE] e [ABC] são semelhantes.

Como $\overline{AB} = 3 \times \overline{AD} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = 3$ então a razão de semelhança entre o triângulo [ABC] e o triângulo [ADE] é igual a 3.

A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre essas figuras, ou seja:

$$\frac{A_{[ABC]}}{A_{[ADE]}} = r^2 \Leftrightarrow \frac{A_{[ABC]}}{2} = 3^2 \Leftrightarrow A_{[ABC]} = 9 \times 2 \Leftrightarrow A_{[ABC]} = 18$$

Opção(C)

2022, 1ª fase, caderno 2

7. Os triângulos [ABE] e [ACD] são semelhantes.

   Como $\overline{AC} = 2 \times \overline{AB} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 2$ então a razão de semelhança entre o triângulo [ABE] e o triângulo [ACD] é igual a 2.

   A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre essas figuras, ou seja:

$$\frac{A_{[ACD]}}{A_{[ABE]}} = r^2 \Leftrightarrow \frac{20}{A_{[ABE]}} = 2^2 \Leftrightarrow A_{[ABE]} = \frac{20}{4} \Leftrightarrow A_{[ABE]} = 5$$

   Opção(B)

   2022, 2ª fase, caderno 2

8. Pelo critério AA, os triângulos [ABC] e [EAD] são semelhantes:

$$E\hat{D}A = A\hat{B}C \ \text{ (ângulos retos) } \quad \text{e} \quad E\hat{A}D = B\hat{A}C \ \text{ (ângulos verticalmente opostos)}$$

   Logo os seus lados são proporcionais:

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{AC}}$$

   Observando a figura verificamos que $\overline{DA} = a - \overline{AB}$, assim vem que:

$$\frac{2}{4} = \frac{a-\overline{AB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow 2\overline{AB} = 4(a - \overline{AB}) \Leftrightarrow 2\overline{AB} = 4a - 4\overline{AB} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\overline{AB} + 4\overline{AB} = 4a \Leftrightarrow 6\overline{AB} = 4a \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{4a}{6} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{2}{3}a$$

   2019, 1ª fase, caderno 2

9. Pelo critério AA, os triângulos [AXY] e [ABC] são semelhantes:

$$A\hat{X}Y = A\hat{B}C \ \text{ (ângulos retos) } \quad \text{e} \quad X\hat{A}Y = B\hat{A}C$$

   Logo os seus lados são proporcionais:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{XY}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{AC}}$$

Usando a proporção acima conseguimos determinar $\overline{XY}$:

$$\frac{52}{78} = \frac{\overline{XY}}{58{,}5} \Leftrightarrow \overline{XY} = \frac{52 \times 58{,}5}{78} \Leftrightarrow \overline{XY} = 39 \text{ cm}$$

2019, Época especial, caderno 1

10. Os triângulos [ABI] e [CDI] são semelhantes porque têm um ângulo igual $B\hat{I}A = C\hat{I}D$ (ângulos opostos) e os lados opostos a cada um dos dois ângulos ($\overline{AB}$ e $\overline{CD}$) são paralelos.

    Logo os seus lados são proporcionais:

    $$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IC}}$$

    Opção(C)

    2018, 1ª fase, caderno 2

11. As retas r, s e t são concorrentes num ponto, isto é, as três retas intersetam-se num único ponto, vamos chamar a este ponto o ponto I.

    Os triângulos $[IXU]$ e $[IVY]$ são semelhantes, logo os seus lados são correspondentes:

    $$\frac{UX}{VY} = \frac{UV}{VI} = \frac{XY}{YI} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{4} = \frac{UV}{VI} = \frac{XY}{YI}$$

    Os triângulos $[IXW]$ e $[IYZ]$ também são semelhantes, logo os seus lados também são correspondentes:

    $$\frac{XW}{YZ} = \frac{XY}{YI} = \frac{WZ}{ZI} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{XW}{YZ} = \frac{9}{4} = \frac{WZ}{ZI}$$

    Opção(C)

    2018, 2ª fase, caderno 2

12. Os triângulos [ABC] e [DEC] têm um ângulo comum ($A\hat{C}B = D\hat{C}E$) e os lados opostos a esse ângulo são paralelos, por isso os triângulos [ABC] e [DEC] são semelhantes, ou seja, os seus lados são proporcionais:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{DA}}$$

Opção(A)

2018, Época especial, caderno 2

13. Observando a figura sabemos que $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = 4,5 + 8 = 12,5$ cm

    Os triângulos [ABO] e [CDO] são semelhantes visto que têm um ângulo comum (em O) e os lados opostos a este ângulo ($\overline{AB}$ e $\overline{CD}$) são paralelos.

    Como os lados são proporcionais temos que:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \Leftrightarrow \frac{9{,}6}{\overline{OD}} = \frac{8}{12{,}5} \Leftrightarrow \overline{OD} = \frac{9{,}6 \times 12{,}5}{8} \Leftrightarrow \overline{OD} = 15 \text{ cm}$$

    De acordo com a figura, $\overline{OD} = \overline{OB} + \overline{BD} \Leftrightarrow 15 = 9,6 + \overline{BD} \Leftrightarrow \overline{BD} = 15 - 9,6 = 5,4$ cm

    2016, 1ª fase, caderno 1

14. De acordo com a figura sabemos que *Diâmetro de* $C_2 = \overline{PC}$

    Os triângulos [PCD] e [PAB] são semelhantes visto que têm um ângulo comum (em P) e os lados opostos a este ângulo ($\overline{AB}$ e $\overline{CD}$) são paralelos.

    Como os lados são proporcionais temos que:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \frac{3{,}5}{\overline{PC}} = \frac{2}{6} \Leftrightarrow \overline{PC} = \frac{3{,}5 \times 6}{2} \Leftrightarrow \overline{PC} = 10{,}5 \text{ cm}$$

    Opção(C)

    2016, 2ª fase, caderno 2

15. Os triângulos [OAB] e [OCD] são semelhantes porque têm um ângulo comum $B\hat{O}A = D\hat{O}C$ e os lados opostos a este ângulo ([AB] e [CD]) são paralelos.

    Logo os lados dos triângulos [OAB] e [OCD] são diretamente proporcionais:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \frac{9{,}8}{\overline{OC}} = \frac{5{,}6}{8{,}4} \Leftrightarrow \overline{OC} = \frac{9{,}8 \times 8{,}4}{5{,}6} \Leftrightarrow \overline{OC} = 14,7 \text{ cm}$$

    De acordo com a figura temos que:

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = 14,7 - 9,8 = 4,9 \text{ cm}$$

    2016, Época especial, caderno 1

16. O triângulo [ABC] é retângulo em B e o triângulo [ABD] é retângulo em D. O lado $\overline{AB}$ é a hipotenusa do triângulo [ABD] que corresponde à hipotenusa do triângulo [ABC], ou seja, $\overline{AC}$.

    2015, 1ª fase, caderno 1

17. De acordo com a figura, relativamente aos triângulos [ABC] e [FBE] temos que:

$$A\hat{B}C = F\hat{B}E \quad \text{e} \quad B\hat{A}C = B\hat{F}E$$

    Pelo critério AA podemos afirmar que os triângulos [ABC] e [FBE] são semelhantes.

    2015, 2ª fase, caderno 2