Resolução - Função quadrática

1. O ponto A tem coordenadas $(x{,}3)$ e pertence à função f por isso conseguimos determinar a sua abcissa:

$$f(x)=3 \Leftrightarrow \tfrac{1}{3}x^2=3 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x=-3 \vee x=3$$

   Assim, as coordenadas do ponto A são $(-3,3)$ e o ponto B como tem abcissa simétrica ao ponto A tem coordenadas $(3,3)$.

   O ponto B pertence à função g, substituindo as coordenadas deste ponto na expressão algébrica da função g conseguimos calcular a constante de proporcionalidade inversa a:

$$g(x)=\tfrac{a}{x} \Leftrightarrow 3=\tfrac{a}{3} \Leftrightarrow a=3\times 3 \Leftrightarrow a=9$$

   A expressão algébrica da função g é $g(x)=\frac{9}{x}$.

   Opção(A)

   2024, 1ª fase

2. O ponto A pertence à função f por isso conseguimos determinar a sua ordenada:

$$f(2)=3\times 2^2=12$$

   Assim, as coordenadas do ponto A são $(2,12)$.

   O ponto A também pertence à função g, substituindo as coordenadas deste ponto na expressão algébrica da função g conseguimos calcular a constante de proporcionalidade inversa a:

$$g(x)=\tfrac{a}{x} \Leftrightarrow 12=\tfrac{a}{2} \Leftrightarrow a=12\times 2 \Leftrightarrow a=24$$

   2023, 1ª fase

3. Usando a fórmula da área do triângulo conseguimos calcular a ordenada do ponto A:

$$A_{[OAB]}=\tfrac{base\times altura}{2} \Leftrightarrow 96=\tfrac{\overline{AB}\times y_A}{2} \Leftrightarrow 96=\tfrac{8\times y_A}{2} \Leftrightarrow y_A=\tfrac{2\times 96}{8} \Leftrightarrow y_A=24$$

O ponto A tem coordenadas $(-4, 24)$.

Como o ponto A pertence à função f, sustituindo as coordenadas do ponto A na expressão algébrica da função f podemos determinar a constante a:

$$f(x) = ax^2 \Leftrightarrow 24 = a \times (-4)^2 \Leftrightarrow a = \tfrac{24}{16} \Leftrightarrow a = \tfrac{3}{2}$$

Opção(B)

2023, 2ª fase

4. O ponto B pertence à função f por isso conseguimos determinar a sua ordenada:

$$f(3) = 3^2 = 9$$

Assim, as coordenadas do ponto B são $(3, 9)$.

O ponto A é simétrico do ponto B relativamente ao eixo Oy, e tem coordenadas $(-3, 9)$.

A área do triângulo $[ABO]$ é igual a:

$$A_{[ABO]} = \tfrac{b \times h}{2} = \tfrac{6 \times 9}{2} = 27$$

Opção(C)

2023, Época especial

5. Base do triângulo $[OAB] = \overline{OA} = 3$

Altura do triângulo $[OAB] = \overline{AB} = f(3) = 2 \times 3^2 = 18$

Calculando a área do triângulo:

$$A_{[OAB]} = \tfrac{b \times h}{2} = \tfrac{3 \times 18}{2} = 27$$

Opção(C)

2022, 1ª fase, caderno 2

6. Como o ponto A e o ponto C pertencem ao gráfico da função f e têm ordenada 9, substituindo na expressão da função f a ordenada por nove conseguimos determinar as abcissas destes dois pontos:

$$f(x) = x^2 \Leftrightarrow 9 = x^3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = -3 \ \vee \ x = 3$$

Assim vem que, $A(-3, 9)$ e $C(3, 9)$.

Observando a figura vemos que:

Base menor do trapézio $= \overline{OB} = 3$

Base maior do trapézio$= \overline{AC} = 3 + 3 = 6$

Altura do trapézio $= 9$

A área do trapézio $[AOBC]$ é igual a:

$$A_{[AOBC]} = \frac{B+b}{2} \times h = \frac{6+3}{2} \times 9 = 40,5$$

2022, 2ª fase, caderno 2

7. As coordenadas do ponto A são $(4, 3)$, sendo que este ponto pertence à função g.

Sendo a função g uma função de proporcionalidade inversa e sabendo as coordenadas do ponto A podemos calcular a constante de proporcionalidade inversa:

$$k = x \times y = 4 \times 3 = 12$$

Logo a expressão algébrica da função g é:

$$g(x) = \frac{k}{x} = \frac{12}{x}$$

Como o ponto P também pertence à função g conseguimos determinar a sua ordenada:

$$g(2) = \frac{12}{2} = 6$$

Assim, as coordenadas do ponto P são $(2, 6)$.

O ponto P também pertence à função f, substituindo as coordenadas deste ponto na expressão algébrica da função f conseguimos calcular a constante a:

$$f(x) = ax^2 \Leftrightarrow 6 = a \times 2^2 \Leftrightarrow 6 = a \times 4 \Leftrightarrow a = \frac{6}{4} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

A constante a é igual a $\frac{3}{2}$.

2021, 1ª fase, caderno 2

8.

8.1. De acordo com o gráfico da figura sabemos que $d(1) = 2,5$. Portanto ao fim de 1 hora de caminhada as duas amigas estavam a $2,5$ km da praia.

8.2. Observando o gráfico da figura sabemos que:

$$d(0) = 7,5 \text{ e } d(1,5) = 0$$

Opção(B)

2019, 1ª fase, caderno 2

9. Vamos começar por determinar a ordenada do ponto de abcissa 3, substituindo $x = 3$ na expressão algébrica da função f:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^2 \Leftrightarrow f(3) = \frac{2}{3} \times 3^2 \Leftrightarrow f(3) = \frac{18}{3} \Leftrightarrow f(3) = 6$$

Assim sabemos que as coordenadas do ponto A são $(3,6)$, sendo que este ponto também pertence à função g.

Sendo a função g uma função de proporcionalidade inversa e sabendo as coordenadas do ponto A podemos calcular a constante de proporcionalidade inversa:

$$k = x \times y = 3 \times 6 = 18$$

Logo a expressão algébrica da função g é:

$$g(x) = \frac{k}{x} = \frac{18}{x}$$

Substituindo a ordenada do ponto B na expressão algébrica da função g conseguimos determinar a constante c:

$$g(x) = \frac{18}{x} \Leftrightarrow 2 = \frac{18}{c} \Leftrightarrow c = \frac{18}{2} \Leftrightarrow c = 9$$

2019, Época especial, caderno 2

10. Vamos começar por determinar a ordenada do ponto P:

$$f(3) = \frac{4}{3} \times 3^2 = \frac{4}{3} \times 9 = \frac{36}{3} = 12$$

O ponto P tem coordenadas (3,12).

Como o ponto P pertence à função g, substituindo na sua expressão algébrica obtemos constante a:

$$g(x) = \frac{a}{x} \Leftrightarrow 12 = \frac{a}{3} \Leftrightarrow a = 12 \times 3 \Leftrightarrow a = 36$$

2018, 1ª fase, caderno 2

11. Vamos começar por determinar $g(4)$:

$$g(4) = \frac{8}{4} = 2$$

Como $f(3) = g(4)$, o ponto de coordenadas $(3, 2)$ pertence à função f.

Substituindo as coordenadas do ponto $(3, 2)$ na expressão algébrica de f podemos calcular a constante a:

$$f(x) = ax^2 \Leftrightarrow 2 = a \times 3^2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{9}$$

2018, 2ª fase, caderno 2

12. Substituindo a abcissa do ponto P na expressão algébrica da função f, vamos determinar a ordenada do ponto P:

$$f(x) = \frac{6}{x} \Leftrightarrow f(2) = \frac{6}{2} \Leftrightarrow f(2) = 3$$

As coordenadas do ponto P são $(2, 3)$.

De acordo com a figura, o ponto P tembém pertence ao gráfico a função g.

Substituindo as coordenadas do ponto P na expressão algébrica da função g podemos determinar a constante a:

$$g(x) = ax^2 \;\Leftrightarrow\; 3 = a \times 2^2 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{3}{4}$$

2018, Época especial, caderno 2

13. Para calcular a área de um trapézio usamos a fórmula: $A_{[AOCB]} = \frac{B+b}{2} \times h$

    Pela observação do gráfico sabemos que $B = 4$ e $b = 2$
    A altura do trapézio é dada por $\overline{OC}$ que corresponde à ordenada do ponto B.

    Para determinar a ordenada do ponto B basta substituir na expressão da função f a abcissa do mesmo ponto, ou seja: $f(2) = 2 \times 2^2 = 8$

    B(2,8) portanto $\overline{OC} = 8$

    $A_{[AOCB]} = \frac{B+b}{2} \times h = \frac{4+2}{2} \times 8 = 24$

    2017, 1ª fase, caderno 2

14. A base do triângulo [OAB] é igual a 4 e a altura é igual à ordenada do ponto B. Como $\overline{OB} = \overline{AB}$, abcissa do ponto B é igual a 2 ($\frac{0+4}{2} = 2$).

    B(2, $f(2)$)

    Usando a expressão analítica da função f conseguimos calcular a ordenada do ponto B: $f(2) = 4 \times (2)^2 = 16$

    Logo, a a altura do triângulo [OAB] é igual a 16

    $A_{[OAB]} = \frac{b \times h}{2} \;\Leftrightarrow\; A_{[OAB]} = \frac{4 \times 16}{2} = 32$

    2017, 2ª fase, caderno 2

15. Vamos começar por calcular a altura do triângulo [BOA] que é igual à ordenada do ponto B:

$$f(10) = 3 \times 10^2 = 300$$

    De acordo com a figura temos que:

    $A_{região\ sombreada} = A_{[BOA]} - 1000 \Leftrightarrow A_{região\ sombreada} = \frac{10 \times 300}{2} - 1000 \Leftrightarrow A_{região\ sombreada} = 1500 - 1000 \;\Leftrightarrow\; A_{região\ sombreada} = 500$

2017, Época especial, caderno 2 2016, 1ª fase, caderno 2

16. A função g é uma função de proporcionalidade inversa logo a sua expressão algébrica é da forma $g(x) = \frac{k}{x}$

    O ponto P tem coordenadas (2,$f(2)$) onde $f(2) = 2 \times 2^2 = 8$, ou seja, P(2,8).

    Como P pertence à função g, substituindo na sua expressão algébrica obtemos constante k:

    $$g(x) = \frac{k}{x} \;\Leftrightarrow\; 8 = \frac{k}{2} \;\Leftrightarrow\; k = 8 \times 2 \;\Leftrightarrow\; k = 16$$

    Então, a expressão algébrica da função g é : $g(x) = \frac{16}{x}$.

    2016, 2ª fase, caderno 2

    16.1. De acordo com a figura sabemos que a reta AB tem declive negativo e interseta o eixo y no ponto B(0,2), ou seja, a sua ordenada na origem é igual a 2.

    Opção(C)

    16.2. Como a função f é definida por $f(x) = x^2$, a função g, cujo gráfico é simétrico do gráfico da função f relativamente ao eixo Ox, tem expressão algébrica $g(x) = -x^2$.

    Logo, $f(\sqrt{3}) + g(2) = (\sqrt{3})^2 - 2^2 = 3 - 4 = -1$

    2015, 2ª fase, caderno 2

17. Como g é uma função de proporcionalidade inversa, a sua espressão algébrica é da forma:

    $$g(x) = \frac{k}{x}, \quad \text{onde } k \text{ é a constante de proporcionalidade inversa.}$$

    O ponto $(2, f(2))$ pertence a ambas as funçoes f e g. Como $f(2) = 2^2 = 4$ o ponto tem coordenadas (2,4).

    Para calcularmos k basta susbtituir o ponto pertencente à função g na sua expressão algébrica:

$$g(x) = \frac{k}{x} \;\Leftrightarrow\; 4 = \frac{k}{2} \;\Leftrightarrow\; k = 4 \times 2 \;\Leftrightarrow\; k = 8$$

Assim, $g(x) = \frac{8}{x}$

Opção(C)

2015, Época especial, caderno 2