Resolução - Ângulos na circunferência

1. $B\hat{A}D$ é o ângulo inscrito relativo ao arco BD, por isso vem que:

$$B\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} \Leftrightarrow 80 = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BD} = 160^o$$

A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o, assim conseguimos determinar $D\hat{O}E$:

$$O\hat{E}D + E\hat{D}O + D\hat{O}E = 180 \Leftrightarrow 30 + 90 + D\hat{O}E = 180 \Leftrightarrow D\hat{O}E = 60^o$$

Os ângulos $D\hat{O}E$ e $D\hat{O}C$ sao suplementares, ou seja, a sua soma é igual a 180^o, logo temos que:

$$D\hat{O}C = 180 - D\hat{O}E = 180 - 60 = 120^o$$

Como $D\hat{O}C$ é um ângulo ao centro então $\overset{\frown}{DC} = 120^o$.

A amplitude, em graus, do arco BC é igual a:

$$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{DC} = 160 - 120 = 40^o$$

2024, 1ª fase

2. Como as cordas [AB] e [CD] são paralelas e iguais então sabemos que:

$$\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{CD} = 120^o$$

$B\hat{C}A$ é o ângulo inscrito relativo ao arco BA, por isso vem que:

$$B\hat{C}A = \frac{\overset{\frown}{BA}}{2} = \frac{120}{2} = 60^o$$

A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o, assim conseguimos determinar $C\hat{A}B$:

$$C\hat{A}B + B\hat{C}A + A\hat{B}C = 180 \Leftrightarrow C\hat{A}B + 60 + 90 = 180 \Leftrightarrow C\hat{A}B = 30^o$$

2024, 2ª fase

3. Os ângulos $A\hat{C}B$ e $B\hat{C}D$ são suplementares, logo a soma das suas amplitudes é igual a 180^o:

$$A\hat{C}B = 180 - B\hat{C}D = 180 - 100 = 80^o$$

$A\hat{C}B$ é o ângulo inscrito relativo ao arco AB, por isso vem que:

$$A\hat{C}B = \frac{\widehat{AB}}{2} \Leftrightarrow 80 = \frac{\widehat{AB}}{2} \Leftrightarrow \widehat{AB} = 160^o$$

Calculando a amplitude, em graus, do arco BCA:

$$\widehat{BCA} = 360 - \widehat{AB} = 360 - 160 = 200^o$$

2023, 1ª fase

4. Pela observação da figura sabemos que $A\hat{O}B$ é o ângulo ao centro relativo ao arco AB, logo $\widehat{AB} = A\hat{O}B = 50^o$

Como os arcos BC e CA são iguais então $\widehat{AB} = \frac{50}{2} = 25^o$

$D\hat{C}E$ é o ângulo inscrito relativo ao arco DE, por isso vem que:

$$D\hat{C}E = \frac{\widehat{DE}}{2} \Leftrightarrow 70 = \frac{\widehat{DE}}{2} \Leftrightarrow \widehat{DE} = 140^o$$

Sabendo que $\overline{CD} = \overline{CE}$ vem que $C\hat{D}E = C\hat{E}D = \frac{180-70}{2} = 55^o$

$C\hat{D}E$ é o ângulo inscrito relativo ao arco EC, por isso vem que:

$$C\hat{D}E = \frac{\widehat{EC}}{2} \Leftrightarrow 55 = \frac{\widehat{EC}}{2} \Leftrightarrow \widehat{EC} = 110^o$$

A amplitude, em graus, do arco BD é igual a:

$$\overset{\frown}{BD} = 360 - \overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{EC} - \overset{\frown}{CB} = 360 - 140 - 110 - 25 = 85^o$$

2023, 2ª fase

5. O triângulo $[OCA]$ é isósceles porque $\overline{OC}$ e $\overline{OA}$ são raios da circunferência.
   Logo $O\hat{C}A = O\hat{A}C = 28^o$.

   Considerando o triângulo $[OCA]$ e sabendo que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o, vem que:

$$C\hat{O}A = 180 - 28 - 28 = 124^o$$

   $C\hat{O}A = \overset{\frown}{AC}$ pois é o ângulo ao centro relativo ao arco AC.

   $C\hat{B}A$ é o ângulo inscrito relativo ao arco AC, por isso vem que:

$$C\hat{B}A = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{124}{2} = 62^o$$

   2023, Época especial

6. Pela observação da figura sabemos que:

$$\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{DB} - \overset{\frown}{DC} = 180 - 110 = 70^o$$

   $B\hat{D}C$ é o ângulo inscrito relativo ao arco CB, por isso vem que:

$$B\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{CB}}{2} = \frac{70}{2} = 35^o$$

   Opção(D)

   2022, 1ª fase, caderno 1

7. Pela observação da figura sabemos que $A\hat{C}B$ é o ângulo inscrito relativo ao arco AB, por isso vem que:

$$A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{60}{2} = 30^o$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o vem que:

$180 = A\hat{C}B + B\hat{E}C + C\hat{B}E \Leftrightarrow 180 = 30 + 90 + C\hat{B}E \Leftrightarrow C\hat{B}E = 60^o$

$C\hat{B}E$ é o ângulo inscrito relativo ao arco CD, por isso vem que:

$$C\hat{B}E = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \Leftrightarrow 60 = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD} = 120^o$$

Opção(B)

2022, 2ª fase, caderno 1

8. Pela observação da figura os arcos são iguais entre si.

$$\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{ED} = \overset{\frown}{DC} = \frac{360}{5} = 72^o$$

$E\hat{C}A$ é o ângulo inscrito relativo ao arco AE, por isso vem que:

$$E\hat{C}A = \frac{\overset{\frown}{AE}}{2} = 36^o$$

$C\hat{A}D$ é o ângulo inscrito relativo ao arco CD, por isso vem que:

$$C\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = 36^o$$

Considerando o triângulo [CJA] e sabendo que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o, vem que:

$$A\hat{J}C = 180 - 36 - 36 = 108^o$$

2021, 1ª fase, caderno 2

9. De acordo com a figura, se $\overline{AB} = \overline{BC}$ então $\overline{CD} = \overline{DA}$. Assim sabemos que:

$$\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{CD} = 110^o$$

Logo, $\overset{\frown}{CA} = 360 - 110 - 110 = 140^o$

Como o ângulo $A\hat{D}C$ é o ângulo inscrito relativo a $\overset{\frown}{CA}$, então a sua amplitude é igual a metade da amplitude do arco correspondente:

$$A\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{CA}}{2} = \frac{140}{2} = 70^o$$

2019, 1ª fase, caderno 2

10. Como o ângulo $B\hat{C}A$ é o ângulo inscrito relativo a $\overset{\frown}{BA}$, então a sua amplitude é igual a metade da amplitude do arco correspondente:

$$B\hat{C}A = \frac{\overset{\frown}{BA}}{2} \Leftrightarrow 30^o = \frac{\overset{\frown}{BA}}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BA} = 2 \times 30 \Leftrightarrow \overset{\frown}{BA} = 60^o$$

Aplicando uma regra de três simples conseguimos determinar o perímetro do círculo:

Perímetro (cm)		Ângulo (graus)
x	——	360^o
5	——	60^o

$$x = \frac{5 \times 360}{60} = 30 \text{ cm}$$

O perímetro do círculo é igual a 30 cm.

2019, 2ª fase, caderno 2

11. Observando a figura 9 e como $[CA]$ é um diâmetro da semicircunferência então temos que $\overset{\frown}{CA} = 180^o$.

O ângulo $A\hat{B}D$ é o ângulo ao centro relativo a $\overset{\frown}{DA}$, ou seja, $\overset{\frown}{DA} = 130^o$.

Assim vem que:

$$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{CA} - \overset{\frown}{DA} = 180 - 130 = 50^o$$

Como o ângulo $D\hat{E}C$ é o ângulo inscrito relativo a $\overset{\frown}{CD}$, então a sua amplitude é igual a metade da amplitude do arco correspondente:

$$D\hat{E}C = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{50}{2} = 25^o$$

2019, Época especial, caderno 2

12. O ângulo $B\hat{E}C$ é um ângulo com vértice no interior da semicircunferência, ou seja, a sua amplitude é igual a metade da soma das amplitudes dos seus arcos correspondentes:

$B\hat{E}C = \frac{(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC})+\overset{\frown}{BC}}{2} \Leftrightarrow 72 = \frac{56+2\overset{\frown}{BC}}{2} \Leftrightarrow 2\overset{\frown}{BC} = 2 \times 72 - 56 \Leftrightarrow 2\overset{\frown}{BC} = 88$
$\Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} = \frac{88}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} = 44^o$

O ângulo $B\hat{O}E$ é o ângulo ao centro relativo a $\overset{\frown}{BC}$, logo vem que:

$$B\hat{O}E = \overset{\frown}{BC} = 44^o$$

2018, 1ª fase, caderno 2

13. De acordo com a figura e sabendo que [CD] é o diâmetro da semicircunferência, vem que:

$$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{CA} = 180 - 110 = 70^o$$

$A\hat{C}D$ é o ângulo inscrito relativo ao arco AD logo a sua amplitude é igual a metade da amplitude do seu arco correspondente:

$$A\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{70}{2} = 35^o$$

Considerando o triângulo [ABC], a soma dos seus ângulos internos é igual a 180^o, assim vem que:

$$180 = B\hat{A}C + A\hat{C}B + C\hat{B}A \;\Leftrightarrow\; 180 = 25 + 35 + C\hat{B}A \;\Leftrightarrow\; C\hat{B}A = 120^o$$

2018, 2ª fase, caderno 2

14. De acorco com a figura, $C\hat{B}A$ é o ângulo inscrito relativo ao arco CA logo a amplitude de $C\hat{B}A$ é metade da amplitude do seu arco correspondente, assim vem que:

$$C\hat{B}A = \frac{\overset{\frown}{CA}}{2} \Leftrightarrow C\hat{B}A = \frac{110}{2} \Leftrightarrow C\hat{B}A = 55^o$$

Como a soma dos ângulos internos do triângulo [ABC] é igual a 180^o, temos que:

$B\hat{A}C + C\hat{B}A + A\hat{C}B = 180 \;\Leftrightarrow\; B\hat{A}C + 55 + 85 = 180 \;\Leftrightarrow\; B\hat{A}C = 180 - 55 - 85 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow B\hat{A}C = 40^o$

2018, Época especial, caderno 2

15. $A\hat{C}B$ é o ângulo inscrito relativo ao arco AB, logo a amplitude do ângulo ACB é metade da amplitude do seu arco:

$$A\hat{C}B = \frac{120}{2} = 60^o$$

Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180:

$$A\hat{B}C = 180 - 40 - 60 = 80^o$$

2017, 1ª fase, caderno 2

16. $A\hat{D}B$ é o ângulo inscrito relativo ao arco AB, logo a amplitude do ângulo ADB é metade da amplitude do seu arco:

$$A\hat{D}B = \frac{60}{2} = 30^o$$

O triângulo [ABD] é isósceles $AD = BD$ e a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180^o então temos que:

$$D\hat{A}B = D\hat{B}A = \frac{180-30}{2} = 75^o$$

$$A\hat{B}C = A\hat{B}D + D\hat{B}C = 75 + 20 = 95^o$$

2017, 2ª fase, caderno 2

17. O trapézio [ABCD] é isósceles, $\overline{AD} = \overline{BC}$ e $\overline{CD}$ é o diâmetro da circunferência então $\overset{\frown}{CD} = 180^o$.

De acordo com a figura 7 vem que:

$$\overset{\frown}{BC} = \frac{180-80}{2} = 50^o$$

Assim, $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} = 50 + 180 = 230^o$.

O ângulo D$\hat{A}$B é o ângulo inscrito relativo ao $\overset{\frown}{BD}$, assim D$\hat{A}$B é igual a metade da amplitude do seu arco correspondente:

$$D\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} \Leftrightarrow D\hat{A}B = \frac{230}{2} \Leftrightarrow D\hat{A}B = 115^o$$

2017, Época especial, caderno 2

18. O ângulo $M\hat{O}P$ é o ângulo ao centro relativo a $\overset{\frown}{QP}$, ou seja, $\overset{\frown}{QP} = M\hat{O}P$.

O triângulo [OPM] é retângulo em P, porque $\overline{MN}$ é tangente à circunferência no ponto P logo é perpendicular a $\overline{OP}$ (raio da circunferência).

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o temos que:

$$180 = M\hat{O}P + O\hat{P}M + O\hat{M}P \Leftrightarrow 180 = M\hat{O}P + 90 + 15 \Leftrightarrow M\hat{O}P = 180 - 90 - 15$$
$$\Leftrightarrow M\hat{O}P = 75^o$$

$\overset{\frown}{QP} = M\hat{O}P = 75^o$

Opção(B)

19. O triângulo $[OPN]$ é retângulo em P ($\overline{OP}$ é perpendicular à reta tangente em P, que contém o lado $\overline{PN}$ do triângulo) por isso podemos usar o teorema de pitágoras para determinar $\overline{ON}$:

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2 \Leftrightarrow h^2 = (\sqrt{3})^2 + 3^2 \Leftrightarrow h^2 = 12 \Leftrightarrow h = \pm\sqrt{12} \Leftrightarrow h = 2\sqrt{3}\text{ , porque } h > 0$$

20. O ponto O é a interseção das duas bissetrizes dos ângulos $L\hat{N}M$ e $L\hat{M}P$, logo o ponto O designa-se o Incentro do triângulo [LMN].

    Opção(C)

    2016, 1ª fase, caderno 2

21. De acordo com a figura, a amplitude do arco $\overset{\frown}{PC}$ é 180^o visto que $\overline{PC}$ é o diâmetro da circunferência.

    Então a amplitude do arco $\overset{\frown}{CD}$ é igual à diferença das amplitudes dos arcos $\overset{\frown}{PC}$ e $\overset{\frown}{PD}$, ou seja:

$$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{PC} - \overset{\frown}{PD} = 180 - 110 = 70^o$$

    O ângulo $C\hat{P}D$ é um ângulo inscrito relativamente ao arco $\overset{\frown}{CD}$, logo a amplitude de ângulo é igual a metade da amplitude do arco correspondente:

$$\text{C}\hat{P}\text{D}= \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{70}{2} = 35^o$$

    2016, 2ª fase, caderno 2

22. O ângulo B$\hat{D}$A é o ângulo inscrito na semicircunferência relativamente ao arco AD, por isso a sua amplitude é metade da amplitude do seu arco correspondente:

$$B\hat{D}A = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} \Leftrightarrow B\hat{D}A = \frac{180}{2} \Leftrightarrow B\hat{D}A = 90^o$$

    Considerando o triângulo [AED] , temos que a soma dos ângulos internos é igual a 180^o:

$$A\hat{E}D + E\hat{D}A + D\hat{A}E = 180 \Leftrightarrow 70 + 90 + D\hat{A}E = 180 \Leftrightarrow D\hat{A}E = 180 - 70 - 90 \Leftrightarrow D\hat{A}E = 20^o$$

O ângulo $D\hat{A}E = D\hat{A}C$ é o ângulo inscrito na semicircunferência relativamente ao arco DC, por isso a sua amplitude é metade da amplitude do seu arco correspondente:

$$D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} \Leftrightarrow 20 = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{DC} = 40^o$$

2016, Época especial, caderno 2

23. O ângulo C$\hat{B}$A é o ângulo inscrito relativo ao $\overset{\frown}{AC}$, assim C$\hat{B}$A é igual a metade da amplitude do seu arco correspondente:

$$\text{C}\hat{B}\text{A}= \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \Leftrightarrow \text{C}\hat{B}\text{A}= \frac{100}{2} \Leftrightarrow \text{C}\hat{B}\text{A}= 50^o$$

O triângulo [ABC] é isósceles, $\overline{AB} = \overline{BC}$, e a lados iguais opôem-se ângulos iguais, logo temos que $B\hat{C}A = C\hat{A}B$.

A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o:

$C\hat{B}A + B\hat{C}A + C\hat{A}B = 180 \Leftrightarrow 50 + 2C\hat{A}B = 180 \Leftrightarrow 2C\hat{A}B = 180 - 50 \Leftrightarrow C\hat{A}B = \frac{130}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow C\hat{A}B = 65^o$

2015, 1ª fase, caderno 2

24. O ângulo C$\hat{A}$D é o ângulo inscrito relativo ao arco $\overset{\frown}{CD}$,ou seja, o valor do ângulo C$\hat{A}$D é igual a metade da amplitude do seu arco correspondente:

$$C\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \Leftrightarrow 25 = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD} = 2 \times 25 \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD} = 50^o$$

De acordo com a figura $\overset{\frown}{AD}$ é o arco da semicircunferência, logo $\overset{\frown}{AD} = 180^o$

Assim temos que $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{CD} = 180 - 50 = 130^o$

2015, 2ª fase, caderno 1