

Resolução - Trigonometria

1. Usando uma regra de três simples e sabendo que a área de uma circunferência é igual a πr^2 , conseguimos escrever a área do setor circular BOA em função de α :

$$\begin{array}{ccc} \text{Área} & & \text{Ângulo} \\ \pi \times 2^2 & \text{-----} & 2\pi \\ A_{\text{setor circular}} & \text{-----} & \alpha \end{array}$$

Logo vem que $A_{\text{setor circular}} = 2\alpha$

A área do trapézio [OBCD] é igual a:

$$A_{[OBCD]} = \frac{B+b}{2} \times h = \frac{\overline{CB} + \overline{DO}}{2} \times \overline{CD}$$

Seja B' o pé da perpendicular do ponto B sobre a reta OA.

Vamos aplicar a razão trigonométrica do cosseno ao triângulo retângulo [OBB'] de forma a determinarmos \overline{DO} :

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{OB'}}{2} \Leftrightarrow \overline{OB'} = 2 \cos \alpha \Leftrightarrow \overline{DO} = 2 \cos \alpha$$

Pela observação da figura vem que $\overline{CB} = 2 \times \overline{DO} = 4 \cos \alpha$.

Para calcularmos \overline{CD} vamos aplicar a razão trigonométrica do seno ao triângulo retângulo [OBB']:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BB'}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{BB'}}{2} \Leftrightarrow \overline{BB'} = 2 \sin \alpha \Leftrightarrow \overline{CD} = 2 \sin \alpha$$

A área do trapézio $[OBCD]$ é igual a :

$$A_{[OBCD]} = \frac{2\cos\alpha + 4\cos\alpha}{2} \times 2\sin\alpha = 3 \times 2\cos\alpha\sin\alpha = 3\sin(2\alpha)$$

A área da região sombreada é dada, em função de α , pela expressão:

$$A_{\text{região sombreada}} = A_{\text{setor circular}} + A_{[OBCD]} = 2\alpha + 3\sin(2\alpha)$$

2024, 1ª fase

2. Aplicando a razão trigonométrica do seno no triângulo retângulo $[AOB]$ conseguimos determinar uma expressão de $[AB]$:

$$\sin(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\overline{AB}}{4} \Leftrightarrow \overline{AB} = 4\sin\alpha$$

Aplicando a razão trigonométrica do cosseno no triângulo retângulo $[AOB]$ conseguimos determinar uma expressão de $[BO]$:

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{\overline{BO}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow -\cos\alpha = \frac{\overline{BO}}{4} \Leftrightarrow \overline{BO} = -4\cos\alpha$$

Pela observação da figura sabemos que $\overline{BD} = 2\overline{BO} = 2 \times -4\cos\alpha = -8\cos\alpha$

A área do quadrilátero $[ABCD]$ é dada por:

$$\begin{aligned} A_{[ABCD]} &= 2 \times A_{[ABD]} = 2 \times \frac{\overline{BD} \times \overline{AB}}{2} = 2 \times \frac{-8\cos\alpha \times 4\sin\alpha}{2} = -16 \times 2\cos\alpha\sin\alpha = \\ &= -16\sin(2\alpha) \end{aligned}$$

2024, Época especial

3. Usando a fórmula do produto escalar vem que:

$$\begin{aligned}\vec{OP} \cdot \vec{OQ} &= \|\vec{OP}\| \times \|\vec{OQ}\| \times \cos(\vec{OP} \wedge \vec{OQ}) \Leftrightarrow 3 = 2 \times 2 \times \cos[2(\alpha - \pi)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(2\alpha - 2\pi) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

2023, 1ª fase

4. Vamos aplicar a razão trigonométrica do cosseno ao triângulo retângulo [OTA] de forma a determinarmos \overline{OA}

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OT}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{2}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{2}{\cos \alpha}$$

Para calcularmos \overline{OB} vamos aplicar a razão trigonométrica do cosseno ao triângulo retângulo [OTB]:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\overline{OT}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{2}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \overline{OB} = \frac{2}{\sin \alpha}$$

A área do triângulo [ABC] é igual a:

$$A_{[ABC]} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{2\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{2 \times \frac{2}{\cos \alpha} \times \frac{2}{\sin \alpha}}{2} = \frac{8}{2 \times \cos \alpha \times \sin \alpha} = \frac{8}{\sin 2\alpha}$$

2023, 2ª fase

5. Sabendo o valor de $\cos \alpha$, conseguimos determinar o valor de $\tan \alpha$ através da seguinte fórmula:

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - 1 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = 8 \Leftrightarrow \tan \alpha = \pm \sqrt{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha = \sqrt{8}, \quad \alpha \in 1^\circ\text{Q}$$

$$\text{Base do triângulo } [ABC] = \overline{AB} = \tan \alpha = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Seja C' o pé da perpendicular do ponto C sobre a reta AB .

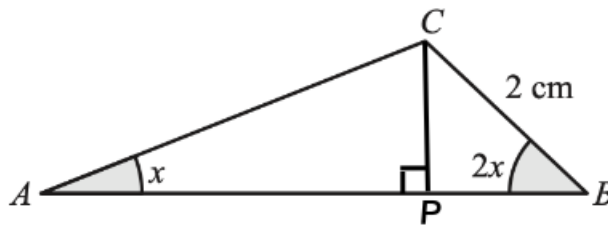
$$\text{Altura do triângulo } [ABC] = \overline{CC'} = \overline{OA} - \cos \alpha = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

A área do triângulo $[ABC]$ é igual a:

$$A_{[ABC]} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times \frac{2}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

2023, Época especial

6. Vamos partir o triângulo $[ABC]$ em dois triângulos retângulos como está representado na figura abaixo:



Aplicando a razão trigonométrica do cos no triângulo retângulo $[PBC]$ conseguimos determinar uma expressão de $[PB]$:

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \frac{\overline{PB}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \overline{PB} = 2 \cos(2x) \Leftrightarrow \overline{PB} = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{PB} = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x \end{aligned}$$

Aplicando a razão trigonométrica do \sin no triângulo retângulo $[PBC]$ conseguimos determinar uma expressão de $[PC]$:

$$\sin(2x) = \frac{\overline{PC}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \overline{PC} = 2 \sin(2x) \Leftrightarrow \overline{PC} = 4 \cos x \sin x$$

Aplicando a razão trigonométrica da \tan no triângulo retângulo $[APC]$ conseguimos determinar uma expressão de $[AP]$:

$$\tan(x) = \frac{\overline{PC}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4 \cos x \sin x}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{4 \cos^2 x \sin x}{\sin x} \Leftrightarrow \overline{AP} = 4 \cos^2 x$$

O comprimento de $[AB]$ é dado pela expressão:

$$[AB] = [AP] + [PB] = 4 \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x = 6 \cos^2 x - 2(1 - \cos^2 x) = 8 \cos^2 x - 2$$

2022, 1ª fase

7. Vamos começar por determinar as coordenadas do ponto A:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 \Leftrightarrow 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Como o ponto A tem coordenadas $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$ e a base do triângulo $[AOB]$ é igual à distância entre os pontos O e A então $\overline{OA} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Sabendo que $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ conseguimos calcular o declive da reta s :

$$m_s = \tan \alpha$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = 3 \Leftrightarrow \tan \alpha = \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \tan \alpha = \sqrt{3} \text{ porque } \alpha \in 1^\circ \text{ quadrante}$$

A reta s tem equação $y = \sqrt{3}x$.

Agora vamos determinar as coordenadas do ponto B fazendo a interseção das retas r e s :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 = \sqrt{3}x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{3}x = -1 \Leftrightarrow -\sqrt{3}x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$y_B = \sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2$$

O ponto B tem coordenadas $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2)$, logo a altura do triângulo $[AOB]$ é igual a 2.

A área do triângulo $[AOB]$ é igual a:

$$A_{[AOB]} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2022, 2ª fase

8. A área da semi-circunferência é igual a:

$$A_{\text{semi-circunferência}} = \frac{\pi \times r^2}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$$

O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B porque \widehat{ABC} é um ângulo inscrito de arco AC logo $\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2} = 90^\circ$.

Aplicando a razão trigonométrica do cosseno no triângulo retângulo $[ABC]$ conseguimos determinar uma expressão de $[BA]$:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{BA}}{4} \Leftrightarrow \overline{BA} = 4 \cos \alpha$$

Aplicando a razão trigonométrica do seno no triângulo retângulo $[ABC]$ conseguimos

determinar uma expressão de $[PC]$:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{4} \Leftrightarrow \overline{BC} = 4 \sin \alpha$$

Calculando a área do triângulo $[ABC]$:

$$A_{[ABC]} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\overline{BA} \times \overline{BC}}{2} = \frac{4 \cos \alpha \times 4 \sin \alpha}{2} = 2 \cos \alpha \times 4 \sin \alpha = 4 \sin (2\alpha)$$

A área da região sombreada é igual a:

$$A_{\text{região sombreada}} = A_{\text{semi-circunferência}} - A_{[ABC]} = 2\pi - 4 \sin (2\alpha)$$

2022, Época especial

9. Observando a figura, temos que:

$$A_{[ABC]} = A_{[AOC]} + A_{[OCB]}$$

Vamos aplicar as razões trigonométricas cosseno e seno ao triângulo retângulo $[OCB]$:

- $\cos (\pi - \alpha) = \frac{c.\text{adjacente}}{\text{hipotenusa}} \Leftrightarrow \cos (\pi - \alpha) = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow -\cos \alpha = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow \overline{OC} = -3 \cos \alpha$
- $\sin (\pi - \alpha) = \frac{c.\text{oposto}}{\text{hipotenusa}} \Leftrightarrow \sin (\pi - \alpha) = \frac{\overline{BC}}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{3} \Leftrightarrow \overline{BC} = 3 \sin \alpha$

Calculando a área do triângulo $[OCB]$:

$$A_{[OCB]} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\overline{OC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{-3 \cos \alpha \times 3 \sin \alpha}{2} = \frac{-9 \cos \alpha \sin \alpha}{2}$$

Seja A' o pé da perpendicular do ponto A ao eixo das abcissas.

Aplicando a razão trigonométrica seno ao triângulo retângulo $[AA'O]$ conseguimos determinar $\overline{AA'}$:

$$\bullet \sin(\pi - \alpha) = \frac{\text{c.oposto}}{\text{hipotenusa}} \Leftrightarrow \sin(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AA'}}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{AA'}}{3} \Leftrightarrow \overline{AA'} = 3 \sin \alpha$$

Calculando a área do triângulo $[AOC]$:

$$A_{[AOC]} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\overline{OC} \times \overline{AA'}}{2} = \frac{-3 \cos \alpha \times 3 \sin \alpha}{2} = \frac{-9 \cos \alpha \sin \alpha}{2}$$

Assim vem que:

$$A_{[ABC]} = \frac{-9 \cos \alpha \sin \alpha}{2} + \frac{-9 \cos \alpha \sin \alpha}{2} = \frac{-18 \cos \alpha \sin \alpha}{2} = -9 \cos \alpha \sin \alpha \quad \text{c.q.d.}$$

2021, 1ª fase

$$10. \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow -\cos \alpha = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{5}$$

Através da fórmula fundamental da trigonometria conseguimos calcular $\sin \alpha$:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{25} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{24}{25} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin \alpha &= \pm \frac{\sqrt{24}}{5} \end{aligned}$$

Como $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, então $\sin \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2\sqrt{6}$$

Vamos calcular o valor da expressão $\tan(\pi - \alpha) + 2 \cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$:

$$\begin{aligned} \tan(\pi - \alpha) + 2 \cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) &= -\tan \alpha + 2 \cos\left(-\frac{8\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \\ &= -\tan \alpha + 2 \cos\left(-4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \\ &= -\tan \alpha - 2 \sin \alpha = -2\sqrt{6} - 2 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{-10\sqrt{6} - 4\sqrt{6}}{5} = -\frac{14\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

2021, 2ª fase

11. Vamos começar por considerar o ângulo $\alpha = \widehat{POT}$.

Observando a figura sabemos que o ponto A tem coordenadas $A(r, 0)$ e o ponto B tem coordenadas $B(0, r)$.

Usando as razões trigonométricas no triângulo $[TOP]$ concluímos que o ponto P tem coordenadas $P(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$.

$$\begin{aligned} \overline{BS} + \overline{AT} &= y_B - y_P + x_A - x_P = r - r \sin \alpha + r - r \cos \alpha = 2r - r \sin \alpha - r \cos \alpha = \\ &= r(2 - \sin \alpha - r \cos \alpha) \end{aligned}$$

Usando uma regra de três simples e sabendo que o perímetro de uma circunferência igual a $2\pi r$, conseguimos escrever α em função de d e de r :

Logo vem que $\alpha = \frac{d}{r}$

Perímetro	—————	Ângulo
$2\pi r$	—————	2π
d	—————	α

$$\overline{BS} + \overline{AT} = r(2 - \sin \alpha - r \cos \alpha) = r\left(2 - \sin\left(\frac{d}{r}\right) - r \cos\left(\frac{d}{r}\right)\right)$$

2021, Época especial

12. Resolvendo a equação trigonométrica:

$$2 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Para } k = 0, x = \frac{2\pi}{3} \notin [-\pi, 0] \vee x = \frac{4\pi}{3} \notin [-\pi, 0]$$

$$\text{Para } k = -1, x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3} \notin [-\pi, 0] \vee x = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3} \in [-\pi, 0]$$

Opção(B)

2019, 1ª fase, caderno 2

13. Através da tabela trigonométrica sabemos que $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

Assim vem que:

$$\sin\left(3\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \sin\pi = 0$$

Opção(C)

2019, 2ª fase, caderno 2

14. Tendo em conta a simetria e paridade das funções trigonométricas vem que:

$$g(-x) = \frac{1}{4}\cos(-2x) - \cos(-x) = \frac{1}{4}\cos(2x) - \cos x$$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{1}{4}\cos\left[2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{4}\cos(\pi - 2x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \\ &= -\frac{1}{4}\cos(2x) - \sin x \end{aligned}$$

Assim temos que:

$$f(x) = g(-x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{4}\cos(2x) - \cos x - \frac{1}{4}\cos(2x) - \sin x = -\cos x - \sin x$$

Opção(B)

2019, 2ª fase, caderno 2

15. $\arcsin(1)$ corresponde ao arco cujo o seno é igual a 1, ou seja, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

$\arccos(-\frac{1}{2})$ corresponde ao arco cujo o cosseno é igual a $-\frac{1}{2}$.

Como $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ e $\cos x$ é negativo no 2º e 3º quadrantes, então $\cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, ou seja, $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$.

Assim temos que:

$$\arcsin(1) + \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$$

Opção(A)

2018, 1ª fase, caderno 2

16. Calculando os valores que a função
- f
- toma nos extremos do domínio:

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos -\frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Vamos estudar a monotonia da função f no domínio $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$:

x	$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{3}$
$f(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	\nearrow	1	\searrow	$\frac{1}{2}$

Assim sabemos que o menor valor que a função f tem no intervalo $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ é $\frac{1}{2}$ e o maior valor que a função f tem no intervalo $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ é 1. Portanto o contradomínio da função f é $[\frac{1}{2}, 1]$.

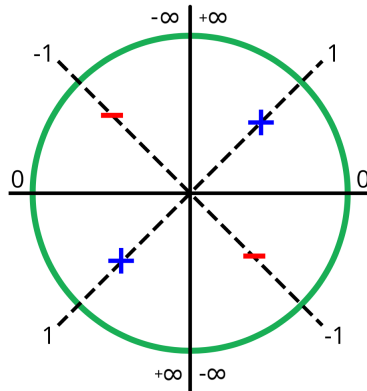
Opção(C)

2018, Época especial, caderno 2

17. Vamos determinar os ângulos tais que o valor da tangente é igual a -1:

$$\begin{aligned} \tan \alpha = -1 &\Leftrightarrow \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad \alpha = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \\ \alpha &= -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned}$$

Representação da tangente no círculo trigonométrico



De acordo com o círculo trigonométrico da tangente sabemos que $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \tan \alpha = +\infty$.

Opção(B)

2017, 1ª fase, grupo I

18. Usando o caso notável:

$$(2x \sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{x})^2 = 4x^2 \sin^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{x^2}$$

Igualando o termo independente de x a 1, vem que:

$$4 \sin \alpha \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow 2 \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee \alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Para } k = -1, \quad \alpha = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12} \notin]\pi, 2\pi[\vee \alpha = \frac{5\pi}{12} - \pi = -\frac{7\pi}{12} \notin]\pi, 2\pi[$$

$$\text{Para } k = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{12} \notin]\pi, 2\pi[\vee \alpha = \frac{5\pi}{12} \notin]\pi, 2\pi[$$

$$\text{Para } k = 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12} \in]\pi, 2\pi[\vee \alpha = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12} \in]\pi, 2\pi[$$

Para $k = 2$, $\alpha = \frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{25\pi}{12} \notin]\pi, 2\pi[\vee \alpha = \frac{5\pi}{12} + 2\pi = \frac{29\pi}{12} \notin]\pi, 2\pi[$

Logo, $\alpha = \left\{ \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \right\}$.

2017, 2ª fase, grupo II

19. De acordo com a figura 1, a altura do triângulo [ABC] é:

$$h = \overline{CD} - \overline{BO}$$

Considerando o triângulo [ODC], vamos calcular \overline{CO} :

$$\tan \alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{\overline{CD}}{1} \Leftrightarrow \overline{CD} = \tan \alpha$$

Considerando o triângulo [OAA'], vamos calcular $\overline{AA'}$:

$$\sin \pi - 2\alpha = \frac{\overline{AA'}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \sin \pi - 2\alpha = \frac{\overline{AA'}}{1} \Leftrightarrow \overline{AA'} = \sin 2\alpha \Leftrightarrow \overline{AA'} = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Como $\overline{AA'} = \overline{BO}$, então $\overline{BO} = \sin 2\alpha$.

Portanto a altura do triângulo [ABC] é:

$$h = \overline{CD} - \overline{BO} = \tan \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Pela observação da figura 1, a base do triângulo [ABC] é igual a $b = \overline{AB} = \overline{OA'}$.

Considerando o triângulo [OAA'], vamos calcular $\overline{OA'}$:

$$\cos \pi - 2\alpha = \frac{\overline{OA'}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \cos \pi - 2\alpha = \frac{\overline{OA'}}{1} \Leftrightarrow \overline{OA'} = -\cos 2\alpha$$

Assim, a área do triângulo $[ABC]$ é:

$$\begin{aligned} A_{[ABC]} &= \frac{b \times h}{2} = \frac{-\cos 2\alpha(\tan \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha)}{2} = \frac{-\cos 2\alpha\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 2 \sin \alpha \cos \alpha\right)}{2} = \frac{-\cos 2\alpha \times \left(\frac{\sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}\right)}{2} = \\ &= \frac{-\cos 2\alpha \left[\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}(1 - 2 \cos^2 \alpha)\right]}{2} = \frac{-\cos 2\alpha[\tan \alpha(1 - 2 \cos^2 \alpha)]}{2} = \frac{\cos 2\alpha[\tan \alpha(-1 + 2 \cos^2 \alpha)]}{2} = \\ &= \frac{\cos 2\alpha[\tan \alpha(-\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha)]}{2} = \frac{\cos 2\alpha[\tan \alpha(-\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)]}{2} = \frac{\cos 2\alpha[\tan \alpha(\cos 2\alpha)]}{2} = \frac{\tan \alpha \cos^2 2\alpha}{2} \end{aligned}$$

2017, Época especial, grupo II

20. Consideremos o ponto S como sendo o ponto de interseção da reta RQ com o eixo das abcissas.

$$A_{[OPQR]} = \frac{B+b}{2} \times h = \frac{\overline{OP} + \overline{RQ}}{2} \times \overline{OS}$$

Pela definição de cosseno:

$$\cos(2\pi - \alpha) = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \cos(-\alpha) = \frac{\overline{OS}}{1} \Leftrightarrow \overline{OS} = \cos \alpha$$

Pela definição de seno:

$$\sin(2\pi - \alpha) = \frac{\overline{RS}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \sin(-\alpha) = \frac{\overline{RS}}{1} \Leftrightarrow \overline{RS} = -\sin \alpha$$

Assim vem que:

$$A_{[OPQR]} = \frac{1+1-\sin \alpha}{2} \times \cos \alpha = \frac{2-\sin \alpha}{2} \times \cos \alpha = \left(1 - \frac{\sin \alpha}{2}\right) \times \cos \alpha = \cos \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2}$$

Opção(D)

2016, 1ª fase, grupo I

21. Como os lados $[AC]$ e $[QR]$ são paralelos temos que:

$$\hat{AOP} = \hat{PQR}$$

Consideremos o triângulo retângulo $[OQR]$, pela definição de cosseno vem que:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{QR}}{\overline{QO}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{QR}}{1} \Leftrightarrow \overline{QR} = \cos \alpha$$

Pela definição de seno vem que:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{OR}}{\overline{QO}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{OR}}{1} \Leftrightarrow \overline{OR} = \sin \alpha$$

De acordo com a figura 3, a altura do triângulo $[PQR]$ é igual a $2 \times \overline{OR}$.

Assim a área do triângulo $[PQR]$ é igual a:

$$A_{[PQR]} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\overline{QR} \times 2\overline{OR}}{2} = \frac{\cos \alpha \times 2 \sin \alpha}{2} = \frac{\sin(2\alpha)}{2}$$

Opção(D)

2016, 2ª fase, grupo I

22. Considerando o triângulo retângulo $[OCD]$, pela definição de tangente temos:

$$\tan \alpha = \frac{\overline{DC}}{\overline{OC}} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{\overline{DC}}{1} \Leftrightarrow \overline{DC} = \tan \alpha$$

Considerando o triângulo retângulo $[OBA]$, pela definição de seno temos:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BA}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{BA}}{1} \Leftrightarrow \overline{BA} = \sin \alpha$$

Considerando o triângulo retângulo [OBA], pela definição de cosseno temos:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{OB}}{1} \Leftrightarrow \overline{OB} = \cos \alpha$$

De acordo com a figura 4, a área do quadrilátero [ABCD] é igual a:

$$A_{[ABCD]} = A_{[OCD]} - A_{[OBA]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{DC}}{2} - \frac{\overline{OB} \times \overline{BA}}{2} = \frac{1 \times \tan \alpha}{2} - \frac{\cos \alpha \times \sin \alpha}{2} = \frac{\tan \alpha}{2} - \frac{\sin(2\alpha)}{4}$$

Opção(B)

2015, 1ª fase, grupo I

23. Vamos determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função $f(x)$:

$$f'(x) = (3 \sin^2 x)' = 3(\sin^2 x)' = 3(2 \sin x \times \cos x) = 3 \sin(2x)$$

A expressão algébrica da segunda derivada da função $f(x)$ é:

$$f''(x) = [3 \sin(2x)]' = 3[\sin(2x)]' = 3[2 \cos(2x)] = 6[\cos(2x)]$$

Opção(C)

2015, 2ª fase, grupo I