Resolução - Teoremas: Bolzano, Weiertrass e Lagrange

1. $f(x) = ax^3 + x - 2$.

   Sabemos que f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ pois é uma função polinomial. Logo é contínua em $[0, 1]$.

   - $f(0) = -2 < 0$
   - $f(1) = a + 1 - 2 = a - 1 > 0 \quad \text{porque} \quad a > 1$

   Como $f(0) < 0 < f(1)$, pelo Teorema de Bolzano existe $c \in]0, 1[$ tal que $f(c) = 0$. Logo a equação $f(x) = 0$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]0, 1[$.

   2024, Época especial

2. $f(x) = -x + 2 \Leftrightarrow \sin(2x) + x = -x + 2 \Leftrightarrow \sin(2x) + 2x - 2 = 0$

   Seja h a função $h(x) = \sin(2x) + 2x - 2$.

   Sabemos que h é uma função contínua em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$ pois resulta da soma de duas funções contínuas, uma função trigonométrica e uma função polinomial.

   - $h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \frac{2\pi}{6} - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} - 2 < 0$
   - $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3} - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - 2 > 0$

   Como $h\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0 < h\left(\frac{\pi}{3}\right)$, pelo Teorema de Bolzano existe $c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $h(c) = 0$. Logo a equação $f(x) = -x + 2$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$.

2023, 1ª fase

3. Se existe pelo menos um ponto do gráfico de g cuja ordenada é igual à abcissa, no intervalo, temos que:

$$\exists\, c \in \left]\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{2}\right[\text{ tal que } g(c) = c$$

Seja $h(x) = g(x) - x = e^x \cos x - x$

Sabemos que h é uma função contínua em $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ pois resulta da diferença do produto de uma função exponencial com uma trigonométrica com uma função polinomial.

- $h(\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{\pi}{3}} \cos \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{e^{\frac{\pi}{3}}}{2} - \frac{\pi}{3} > 0$

- $h(\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0$

Como $h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 < h\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, pelo Teorema de Bolzano $\exists\, c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $h(c) = 0$.

Logo a equação $g(x) = x$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Assim, existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g cuja ordenada é igual à abcissa no intervalo $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$.

2023, Época especial

4. Se existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$, temos que:

$$\exists\, c \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\text{ tal que } g'(c) = -\frac{1}{2}$$

Vamos começar por determinar a expressão da primeira derivada da função $g(x)$:

$g'(x) = \cos x + (-\sin x) \times x + \cos x = \cos x - x \sin x + \cos x = 2\cos x - x \sin x$

Sabemos que $g'(x)$ é uma função contínua em $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ pois resulta da diferença de duas funções contínuas, o produto de uma função constante com uma trigonométrica e o produto de uma função polinomial com uma função trigonométrica.

- $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

- $g'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{3\pi}{2}\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

Como $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) < -\frac{1}{2} < g'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, pelo Teorema de Bolzano $\exists\, c \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ tal que $g'(c) = -\frac{1}{2}$.

Logo a equação $g'(x) = -\frac{1}{2}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Assim, existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$.

2021, 1ª fase

5. $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; x^2 = \cos x \;\Leftrightarrow\; x^2 - \cos x = 0$

   Seja h a função $h(x) = x^2 - \cos x$.

   Sabemos que h é uma função contínua em $]0, \frac{\pi}{3}[$ pois resulta da diferença de duas funções contínuas, uma função quadrática e uma função trigonométrica.

   - $h(0) = 0^2 - \cos 0 = -1$

   - $h(\frac{\pi}{3}) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\pi^2}{9} - \frac{1}{2} \approx 0,60$

   Como $h(0) < 0 < h(\frac{\pi}{3})$, pelo Teorema de Bolzano existe $a \in]0, \frac{\pi}{3}[$ tal que $h(a) = 0$. Logo a equação $f(x) = g(x)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]0, \frac{\pi}{3}[$.

   2020, 2ª fase

6. A função f é diferenciável no intervalo $[0, 2]$, logo é contínua no mesmo intervalo.

   Sabendo que $f(0) = 1$ e que $\forall x, \in\ [0, 2]\ 0 < f'(x) < 9$, aplicando o Teorema de Lagrange, temos que:

   $0 < f'(x) < 9 \;\Leftrightarrow\; 0 < \frac{f(2)-f(0)}{2-0} < 9 \;\Leftrightarrow\; 0 < \frac{f(2)-1}{2} < 9 \;\Leftrightarrow\; 0 < f(2) - 1 < 18 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow\; 1 < f(2) < 19$

Opção(B)

2018, 1ª fase, caderno 1

7. De acordo com a figura 1, as coordenadas dos ontos P e Q são, respetivamente:

$$\text{P}(a, \frac{\ln a}{a}) \text{ e } \text{Q}(2a, \frac{\ln(2a)}{2a})$$

Com as coordenadas dos pontos P e Q podemos calcular o declive da reta PQ:

$$m = \frac{\frac{\ln(2a)}{2a} - \frac{\ln a}{a}}{2a - a} = \frac{\frac{\ln(2a) - 2\ln a}{2a}}{a} = \frac{\ln(2a) - \ln a^2}{2a^2} = \frac{\ln(\frac{2a}{a^2})}{2a^2} = \frac{\ln(\frac{2}{a})}{2a^2}$$

O triângulo retângulo, da figura 1, é isósceles quando dois dos ângulos internos são iguais a 45^o.

Portanto vem que:

$$m = \tan 45^o \Leftrightarrow \frac{\ln(\frac{2}{a})}{2a^2} = \tan 45^o \Leftrightarrow \frac{\ln(\frac{2}{a})}{2a^2} = 1$$

Seja f a função $f(x) = \frac{\ln(\frac{2}{x})}{2x^2}$.

Sabemos que f é uma função contínua em $[\frac{1}{2}, 1]$ pois resulta de operações de funções contínuas neste intervalo.

- $f(\frac{1}{2}) = \frac{\ln 4}{\frac{1}{2}} = 2\ln 4$
- $f(1) = \frac{\ln 2}{2}$

Como $f(\frac{1}{2}) < 1 < f(1)$, pelo Teorema de Bolzano existe $a \in]\frac{1}{2}, 1[$ tal que $f(a) = 1$.

2018, 1ª fase, caderno 2

8. Seja h uma função tal que:

$$h(x) = g(x) - x - 1$$

Queremos provar que $h(x) = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]a, g(a)[$.

A função h é contínua em $\mathbb{R}$ pois resulta de operações de funções contínuas neste intervalo. Logo h também é contínua em $[a, g(a)]$, porque $[a, g(a)] \subset \mathbb{R}$.

Calculando os valores de $h(a)$ e $h(g((a))$:

► $h(a) = g(a) - a - 1$
Sabendo que $g(a) > a + 1$, temos que $h(a) > a + 1 - a - 1 \;\Leftrightarrow\; h(a) > 0$

► $h(g(a)) = g(g(a)) - a - 1$
Como g o g$(a) = g(g(a)) = a$, temos que $h(g(a)) = a - a - 1 = -1 < 0 \;\Leftrightarrow\; h(a) > 0$

Assim temos que: $h(a) \times h(g(a)) < 0$

Pelo corolário do Teorema de Bolzano a função h tem pelo menos um zero em $]a, g(a)[$, isto é, a equação $h(x) = 0$ tem, pelo menos, uma solução em $]a, g(a)[$. Assim concluímos que a equação $g(x) = x + 1$ é possível no intervalo $]a, g(a)[$.

2016, 2ª fase, grupo II

9. A função f é contínua em $[\frac{1}{2}, +\infty[$ pois resulta de operações de funções contínuas neste intervalo. Logo f também é contínua em $[1, e]$ porque $[1, e] \subset [\frac{1}{2}, +\infty[$.

Calculando os valores de $f(1)$ e $f(e)$:

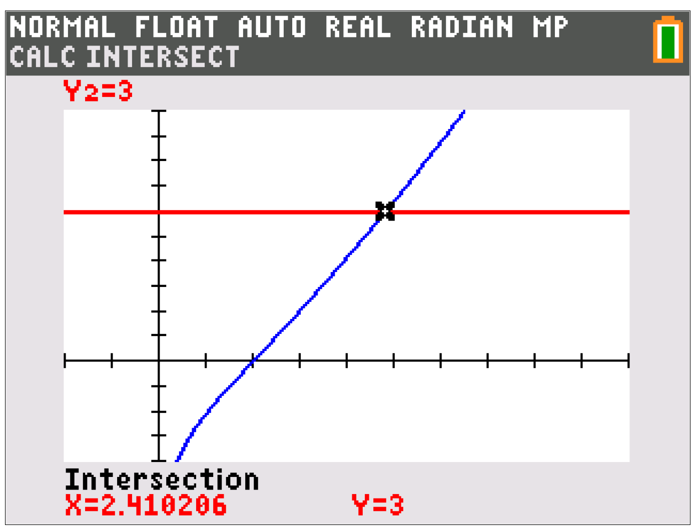
$$f(1) = (1 + 1)\ln 1 = 0$$

$$f(e) = (e + 1)\ln e = e + 1$$

Assim temos que $f(1) < 3 < f(e)$.

Pelo Teorema de Bolzano existe uma constante $c \in]1, e[$ tal que $f(c) = 3$, isto é, a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, uma solução em $]1, e[$.

Determinando a solução da equação $f(c) = 3$ com a ajuda da calculadora gráfica:



Logo, $c \approx 2,41$.

2015, 1ªfase, grupo II

10. A função d é contínua em $[0, +\infty[$ pois resulta de operações de funções contínuas neste intervalo. Logo $d(t)$ também é contínua em $[3, 4]$ porque $[3, 4] \subset [0, +\infty[$.

Calculando os valores de $d(3)$ e $d(4)$:

$$d(3) = 1 + \tfrac{1}{2}\sin(3\pi + \tfrac{\pi}{6}) = 1 + \tfrac{1}{2}\sin(\pi + \tfrac{\pi}{6}) = 1 - \tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{3}{4} = 0,75$$

$$d(4) = 1 + \tfrac{1}{2}\sin(4\pi + \tfrac{\pi}{6}) = 1 + \tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{5}{4} = 1,25$$

Assim temos que: $d(3) < 1,1 < d(4)$

Pelo Teorema de Bolzano existe uma constante $c \in]3,4[$ tal que $d(c) = 1,1$, isto é, houve pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a 1,1 metros.

2015, 2ªfase, grupo II