

Resolução - Sucessões

1. Seja u_n a progressão aritmética de razão r igual a 10 que representa o tempo em minutos que a constança praticou, para se preparar para a audição de violino, durante m dias.

Sabe-se que $u_4 = 60$ e que $S_m = 2970$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 u_1 & u_2 & u_3 & 60 & u_5 & \dots & \\
 \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & & & \\
 +10 & +10 & +10 & +10 & & &
 \end{array}$$

Através do esquema anterior conseguimos escrever uma equação para determinar o primeiro termo da progressão:

$$u_4 = u_1 + 3r \Leftrightarrow 60 = u_1 + 3 \times 10 \Leftrightarrow u_1 = 30$$

O termo geral da progressão é $u_n = u_1 + r(n - 1) = 30 + 10(n - 1) = 20 + 10n$.

Usando a fórmula da soma dos m termos da progressão aritmética u_n vem que:

$$S_m = \frac{u_1 + u_m}{2} \times m \Leftrightarrow 2970 = \frac{30 + 20 + 10m}{2} \times m \Leftrightarrow 2970 = \frac{50 + 10m}{2} \times m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2970 = 50m + 10m^2 \Leftrightarrow 10m^2 + 50m - 2970 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 - 4 \times 10 \times -2970}}{2 \times 10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = -27 \vee m = 22$$

O valor de m é um número inteiro positivo logo $m = 22$.

2024, 1ª fase

2. Consideremos u_n uma progressão aritmética de razão r .

A soma do primeiro com o quinto termo é igual a 26 equivale à equação $u_1 + u_5 = 26$.

Resolvendo o sistema abaixo conseguimos determinar o primeiro termo e a razão desta progressão:

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_5 = 26 \\ u_9 = 31 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 4r = 26 \\ u_1 + 8r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 4r = 26 \\ u_1 = 31 - 8r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(31 - 8r) + 4r = 26 \\ \text{—————} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 62 - 16r + 4r = 26 \\ \text{—————} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} r = 3 \\ u_1 = 31 - 8 \times 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 3 \\ u_1 = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

O termo geral desta progressão é igual a:

$$u_n = 7 + 3(n - 1) = 3n + 4$$

Vamos averiguar se 835 é termo da progressão (u_n) :

$$835 = 3n + 4 \Leftrightarrow 3n = 831 \Leftrightarrow n = 277$$

Concluimos que 835 é termo da progressão (u_n) de ordem 277.

2024, 2ª fase

3. Vamos determinar os primeiros três termos da sucessão:

$$u_1 = 3$$

$$u_2 = 2u_1 + 2 = 2 \times 3 + 2 = 8$$

$$u_3 = 2u_2 + 2 = 2 \times 8 + 2 = 18$$

Opção(C)

4.

4.1. A linha desta construção que contém, exatamente, 19 cartões é a linha número 18.

O quarto elemento da linha número 18 é igual a ${}^{18}C_3 = 816$.

Opção(A)

4.2. Seja a sucessão u_n cujo o primeiro termo é igual a 1 e o próximo termo é igual ao anterior somando 1 unidade. Ou seja, u_n é uma progressão aritmética de razão 1 e primeiro termo 1.

$$u_n : 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots$$

A expressão geral de u_n é:

$$u_n = n$$

Sabendo que a soma dos n termos da progressão aritmética u_n é igual a 3081, conseguimos determinar n :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{u_1 + u_n}{2} \times n \Leftrightarrow 3081 = \frac{1+n}{2} \times n \Leftrightarrow 6162 = (1+n) \times n \Leftrightarrow n^2 + n - 6162 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n &= \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times -6162}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = 78 \quad \vee \quad n = -79 \Leftrightarrow n = 78, \quad n > 0 \end{aligned}$$

2024, Época especial

5. Seja (u_n) a progressão aritmética de razão 2 onde $u_1 = [AB]$.

Sabemos que $S_{100} = 104 \text{ m} = 10400 \text{ cm}$.

Usando a fórmula da soma dos 100 primeiros termos de uma progressão aritmética vem que:

$$\begin{aligned} S_{100} &= \frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100 \Leftrightarrow 10400 = \frac{u_1 + u_1 + 99 \times 2}{2} \times 100 \Leftrightarrow 10400 = \frac{2u_1 + 198}{2} \times 100 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2u_1 + 198 = \frac{10400 \times 2}{100} \Leftrightarrow 2u_1 + 198 = 208 \Leftrightarrow u_1 = 5 \end{aligned}$$

O comprimento do segmento de reta $[AB]$ é de 5 cm.

2023, 1ª fase

6. A sucessão $(-1)^n$ é igual a -1 quando n é ímpar e é igual a 1 quando n é par, logo podemos representar a sucessão $\frac{(-1)^n}{n}$ da seguinte forma:

$$\frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$\lim -\frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n} = \lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Opção(D)

2023, 2ª fase

7. Seja p_n a sucessão dos perímetros da sequência dos n triângulos.

$$\text{Para } n = 1, \quad p_1 = 3\overline{AB} = 3$$

$$\text{Para } n = 2, \quad p_2 = 3\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Para } n = 3, \quad p_3 = 3 \frac{\overline{AB}}{4} = \frac{3}{4}$$

...

A sucessão p_n é uma progressão geométrica de razão igual a $\frac{1}{2}$.

Usando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica:

$$S_n = p_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 6\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Sabendo que $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ é uma sucessão decrescente apenas de valores positivos e que o seu maior valor é igual a $\frac{1}{2}$, vem que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -\frac{1}{2} \leq -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 - \frac{1}{2} \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 6 \times \frac{1}{2} \leq 6\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] < 6$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3 \leq 6\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] < 6$$

Assim concluímos que a soma dos perímetros dos n triângulos da sequência é menor do que 6 unidades, qualquer que seja o valor de n .

2023, 2ª fase

8. A sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ é monótona decrescente.

Opção(D)

2023, Época especial

9. Seja p_n a sucessão dos perímetros, em cm, da sequência das 25 semicircunferências.

Para $n = 1$, $p_1 = \pi$

Para $n = 2$, $p_2 = 2\pi$

Para $n = 3$, $p_3 = 4\pi$

...

A sucessão p_n é uma progressão geométrica de razão igual a 2.

Usando a fórmula da soma dos 25 primeiros termos de uma progressão geométrica vem que:

$$S_{25} = p_1 \times \frac{1-r^{25}}{1-r} = \pi \times \frac{1-2^{25}}{1-2} = 105414353,9 \text{ cm} = 1054,143539 \text{ km}$$

O comprimento total da linha obtida com esta composição geométrica em quilômetros, arredondado às unidades, é igual a 1054 km.

2023, Época especial

10. A sucessão $(-1)^n$ é igual a -1 quando n é ímpar e é igual a 1 quando n é par, logo podemos representar a sucessão $\frac{(-1)^n}{n}$ da seguinte forma:

$$\frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Como $\lim -\frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n} = 0$ então $\frac{(-1)^n}{n}$ é uma sucessão convergente.

Opção(B)

2022, 1ª fase

11. Conhecendo o valor da soma dos cinco primeiros termos da progressão geométrica:

$$S_5 = u_1 \times \frac{1-r^5}{1-r} \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\frac{2}{3}} = 211 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1-\frac{32}{243}}{\frac{1}{3}} = 211 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{633}{243} = 211 \Leftrightarrow u_1 = 81$$

Sabendo o primeiro termo e a razão da progressão geométrica conseguimos calcular o quinto termo desta progressão:

$$u_5 = u_1 \times r^4 = 81 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 81 \times \frac{16}{81} = 16$$

2022, 1ª fase

12. Os primeiros quatro termos da sucessão são:

$$u_1 = -1$$

$$u_2 = 1$$

$$u_3 = -1$$

$$u_4 = \frac{15}{7}$$

Usando o algoritmo da divisão inteira:

$$\begin{array}{r}
 4n - 1 \quad \Big| \quad n + 3 \\
 + \quad -4n - 12 \quad 4 \\
 \hline
 -13
 \end{array}$$

Logo temos que $\frac{4n-1}{n+3} = 4 - \frac{13}{n+3}$.

$$\forall n > 3, \quad 0 < \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n > 3, \quad -\frac{1}{7} \leq -\frac{1}{n+3} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n > 3, \quad -\frac{13}{7} \leq -\frac{13}{n+3} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n > 3, \quad -\frac{13}{7} + 4 \leq -\frac{13}{n+3} + 4 < 0 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n > 3, \quad \frac{15}{7} \leq \frac{4n-1}{n+3} < 4$$

Assim vem que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq u_n < 4$.

A sucessão u_n é limitada.

2022, 2ª fase

$$13. \lim u_n = \lim \left(\frac{n+k}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k \quad (\text{Limite notável})$$

Opção(C)

2022, Época especial

14. A expressão do termo geral de uma progressão aritmética é da forma:

$$v_n = v_1 + (n - 1)r$$

Sabemos que:

$$v_3 = v_1 + 2r \text{ e } v_3 = 1 \text{ logo vem que } 1 = v_1 + 2r$$

$$v_9 = v_1 + 8r, v_{10} = v_1 + 9r \text{ e } v_{10} = \frac{5}{4}v_9 \text{ logo vem que } v_1 + 9r = \frac{5}{4}(v_1 + 8r)$$

$$v_1 + 9r = \frac{5}{4}(v_1 + 8r) \Leftrightarrow 4v_1 + 36r = 5v_1 + 40r \Leftrightarrow v_1 = -4r$$

Resolvendo o sistema abaixo conseguimos determinar o primeiro termo e a razão desta progressão:

$$\begin{cases} 1 = v_1 + 2r \\ v_1 = -4r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -4r + 2r \\ \text{—————} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{2} \\ \text{—————} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{2} \\ v_1 = 2 \end{cases}$$

O termo geral desta progressão é igual a:

$$v_n = 2 - \frac{1}{2}(n - 1) = 2 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - \frac{n}{2} = \frac{5-n}{2}$$

Vamos averiguar se -50 é termo da progressão (v_n) :

$$-50 = \frac{5-n}{2} \Leftrightarrow -100 = 5 - n \Leftrightarrow n = 105$$

Concluimos que -50 é termo da progressão (v_n) de ordem 105.

2022, Época especial

15. Como (v_n) é uma progressão geométrica de razão r então temos que:

$$v_8 = v_5 \times r^3 \Leftrightarrow 108 = 4 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{108}{4} \Leftrightarrow r^3 = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow r = 3$$

Assim temos que $v_6 = v_5 \times r = 4 \times 3 = 12$

Opção(C)

2021, 1ª fase

16. Considerando que n é um número ímpar então $u_n = 2 + \frac{1}{n}$

Vamos determinar quantos termos de ordem ímpar da sucessão u_n pertencem ao intervalo $\left[\frac{83}{41}, \frac{67}{33}\right]$:

$$\frac{83}{41} \leq u_n \leq \frac{67}{33} \Leftrightarrow \frac{83}{41} \leq 2 + \frac{1}{n} \leq \frac{67}{33} \Leftrightarrow \frac{83}{41} - 2 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{67}{33} - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{41} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{33} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{41} \wedge \frac{1}{n} \leq \frac{1}{33} \Leftrightarrow n \leq 41 \wedge n \geq 33 \Leftrightarrow 33 \leq n \leq 41$$

Existem 5 termos de ordem ímpar da sucessão u_n que pertencem ao intervalo $\left[\frac{83}{41}, \frac{67}{33}\right]$.

2021, 1ª fase

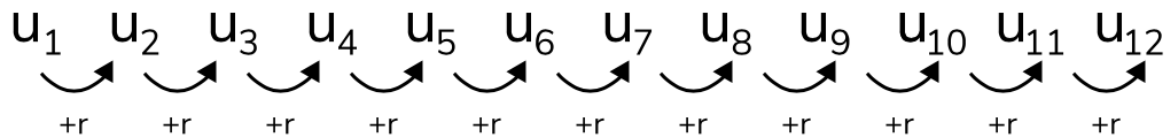
$$17. \lim v_n = \lim 2 - \frac{5}{n+3} = 2 - 0^+ = 2^-$$

Pela observação do gráfico sabemos que, $\lim g(v_n) = g(\lim v_n) = g(2^-) = 1$

Opção(B)

2021, 2ª fase

18. Seja (u_n) uma progressão aritmética.



Sabemos que:

$$\begin{cases} u_6 + u_{20} = -5 \\ u_{19} = 4u_7 \end{cases}$$

Como (u_n) é uma progressão aritmética conseguimos escrever qualquer termo da sucessão em função do primeiro termo u_1 e da razão r :

$$u_6 = u_1 + 5r$$

$$u_{20} = u_1 + 19r$$

$$u_{19} = u_1 + 18r$$

$$u_7 = u_1 + 6r$$

Resolvendo o sistema conseguimos determinar o primeiro termo e a razão da pro-

gressão aritmética:

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_6 + u_{20} = -5 \\ u_{19} = 4u_7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 5r + u_1 + 19r = -5 \\ u_1 + 18r = 4(u_1 + 6r) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ -3u_1 = 6r \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ u_1 = -2r \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2r) + 24r = -5 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{4} \\ u_1 = -2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{4} \\ u_1 = \frac{1}{2} \end{cases} & \end{aligned}$$

Sabendo o primeiro termo e a razão conseguimos determinar u_{16} :

$$u_{16} = u_1 + 15r = \frac{1}{2} + 15 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{13}{4}$$

A soma dos dezasseis primeiros termos desta progressão é igual a:

$$S_{16} = \frac{u_1 + u_{16}}{2} \times 16 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{13}{4}}{2} \times 16 = -22$$

2021, 2ª fase

19. Calculando o limite da sucessão:

$$\lim u_n = \lim (2n^2 - n) = \lim n^2 \left(2 - \frac{1}{n}\right) = +\infty$$

$$\lim f\left(\frac{1}{u_n}\right) = f\left(\frac{1}{\lim u_n}\right) = f\left(\frac{1}{+\infty}\right) = f(0^+) = +\infty$$

O gráfico da função f que verifica a condição $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ é o gráfico da opção A.

Opção(A)

2021, Época especial

20. Consideremos a sucessão $u_n = 2n + 1$.Calculando os primeiros termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) :

$$u_1 = 3, \quad u_3 = 7, \quad u_5 = 11, \quad u_7 = 15, \dots$$

Conseguimos perceber que os termos de ordem ímpar da sucessão $u_n = 2n + 1$ são os termos de uma progressão aritmética em que o primeiro termo é igual 3 e razão 4.

Vamos escrever o termo geral da progressão aritmética (r_n) em que o primeiro termo é igual 3 e razão 4:

$$r_n = 3 + (n - 1) \times 4 = 4n - 1$$

Assim vem que, $r_{200} = 4 \times 200 - 1 = 799$

Calculando o valor da soma dos duzentos primeiros termos da progressão aritmética (r_n) :

A soma dos primeiros duzentos termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) é igual à soma dos primeiros duzentos termos da progressão aritmética (r_n) :

$$S_{200} = \frac{u_1 + u_{200}}{2} \times 200 = \frac{3 + 799}{2} \times 200 = 80200$$

2021, Época especial

21.

21.1. Vamos estudar a sucessão (u_n) quanto à monotonia:

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \frac{8(n+1)-4}{n+1+1} - \frac{8n-4}{n+1} = \frac{8n+4}{n+2} - \frac{8n-4}{n+1} = \frac{(8n+4)(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{(8n-4)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \\
 &= \frac{8n^2+8n+4n+4}{(n+2)(n+1)} - \frac{8n^2+16n-4n-8}{(n+2)(n+1)} = \frac{8n^2+12n+4}{(n+2)(n+1)} - \frac{8n^2+12n-8}{(n+2)(n+1)} = \frac{8n^2+12n+4-(8n^2+12n-8)}{(n+2)(n+1)} = \\
 &= \frac{12}{(n+2)(n+1)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Como $u_{n+1} - u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ então (u_n) é uma sucessão monótona crescente.

21.2. $\lim f(u_n) = f(\lim u_n)$

$$\lim u_n = \lim \frac{8n-4}{n+1} = \lim \frac{8n}{n} = 8$$

Mas como (u_n) é uma sucessão monótona crescente vem que $\lim u_n = 8^-$

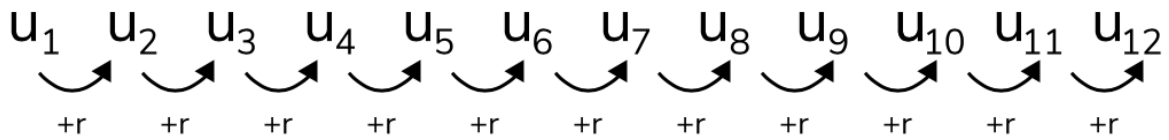
$$\text{Logo, } \lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} \log_2(8-x) = \log_2 0^+ = -\infty$$

Opção(A)

2020, 1ª fase

22. u_n é uma progressão aritmética de razão r :

- $u_1 = u_2 - r$



- $u_{12} = u_2 + 10r$
- $u_7 = u_2 + 5r$

Conhecendo o valor da soma dos doze primeiros termos da progressão aritmética:

$$S_{12} = \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 \Leftrightarrow 57 = \frac{u_2 - r + u_2 + 10r}{2} \times 12 \Leftrightarrow 57 = \frac{(2u_2 + 9r) \times 12}{2} \Leftrightarrow 2u_2 + 9r = \frac{57 \times 2}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2u_2 + 9r = \frac{19}{2} \quad (1)$$

Sabe-se que o sétimo termo é igual ao dobro do segundo:

$$u_7 = 2u_2 \Leftrightarrow u_2 + 5r = 2u_2 \Leftrightarrow u_2 = 5r \quad (2)$$

Resolvendo o sistema resultante das equações (1) e (2):

$$\begin{cases} 2u_2 + 9r = \frac{19}{2} \\ u_2 = 5r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10r + 9r = \frac{19}{2} \\ \text{—————} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ u_2 = 5 \times \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ u_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{Logo } u_1 = u_2 - r = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

Assim, o termo geral desta progressão aritmética é:

$$u_n = u_1 + (n - 1) \times r = 2 + (n - 1) \times \frac{1}{2} = 2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3+n}{2}$$

Calculando a ordem do termo 500 da sucessão (u_n) :

$$u_n = 500 \Leftrightarrow \frac{3+n}{2} = 500 \Leftrightarrow 3 + n = 1000 \Leftrightarrow n = 997$$

Concluimos que 500 é o termo de ordem 997 da sucessão (u_n) .

2020, 2ª fase

23. Calculando o limite da sucessão:

$$\lim v_n = \lim 1 + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1$$

Podemos concluir que a sucessão é convergente e tem limite não nulo, portanto as opções **A** e **B** não estão corretas.

A sucessão v_n é monótona crescente quando $n < 10$ e é monótona decrescente quando $n > 10$, por isso v_n não é uma sucessão monótona. A opção **D** não é verdadeira.

Opção(C)

2020, 2ª fase

24. Consideremos a progressão geométrica u_n de razão r :

Temos que:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
 u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} & u_{16} & u_{17} & u_{18} & u_{19} & u_{20} \\
 \curvearrowright & \curvearrowright \\
 \times r & \times r
 \end{array}$$

$$u_{18} = u_3 \times r^{15} = \frac{r^{15}}{12}$$

$$u_{20} = u_3 \times r^{17} = \frac{r^{17}}{12}$$

Sabendo que $u_{18} = 4u_{20}$, conseguimos determinar a razão da progressão geométrica:

$$u_{18} = 4u_{20} \Leftrightarrow \frac{r^{15}}{12} = \frac{4r^{17}}{12} \Leftrightarrow r^{15} = 4r^{17} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{r^{17}}{r^{15}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = r^2 \Leftrightarrow r = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$$

$r < 0$ porque (u_n) não é monótona

Calculando o primeiro termo da progressão:

$$u_3 = u_1 \times r^2 \Leftrightarrow \frac{1}{12} = u_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{3}$$

A expressão do termo geral de (u_n) é:

$$u_n = u_1 \times r^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times -2 = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

2020, Época especial

25. Vamos determinar os primeiros quatro termos desta sucessão:

$$v_1 = 2$$

$$v_2 = \frac{1}{v_1} = \frac{1}{2}$$

$$v_3 = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$v_4 = \frac{1}{v_3} = \frac{1}{2}$$

Podemos concluir que a sucessão (v_n) não é monótona.

Como $\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_3}{v_2}$ a sucessão (v_n) não é uma progressão geométrica.

Como $v_2 - v_1 \neq v_3 - v_2$ a sucessão (v_n) não é uma progressão aritmética.

Opção(D)

2020, Época especial

26. Vamos considerar dois termos consecutivos, a e b desta progressão. Como a razão é maior do que um quer dizer que a progressão é crescente ou seja o valor de b é maior que a.

Sabendo que a soma dos dois termos consecutivos é igual a 12 e a diferença entre o maior e o menor é igual a 3, podemos escrever um sistema de equações que permita determinar a e b:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + b = 12 \\ b - a = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 - b \\ b - (12 - b) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—————} \\ b - 12 + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—————} \\ 2b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—————} \\ b = \frac{15}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 - \frac{15}{2} \\ \text{—————} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{2} \\ b = \frac{15}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Para determinar a razão de uma progressão geométrica basta fazer o quociente entre um termo com o termo anterior:

$$r = \frac{b}{a} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{30}{18} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

2019, 1ª fase, caderno 1

27. Sabemos que u_n é uma progressão geométrica.

Logo temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = r \\ \frac{a}{2} = r \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow 2b = a^2 \quad (1)$$

Da mesma forma v_n é uma progressão aritmética.

Logo temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2 - b = r \\ b - (a - 2) = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - b = r \\ b - a + 2 = r \end{cases} \Leftrightarrow 2 - b = b - a + 2 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema resultante das equações (1) e (2):

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2b = a^2 \\ 2 - b = b - a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = a^2 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ a = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ a - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ a(1 - a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ a = 0 \vee 1 - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ a = 0 \vee a = 1 \end{cases} \quad (a \neq 0) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

2019, 2ª fase, caderno 1

28. A sucessão $(-1)^{n+1}$ é igual a 1 quando n é ímpar e é igual a -1 quando n é par, logo podemos representar a sucessão u_n da seguinte forma:

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -\frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Quando n é ímpar todos os termos da sucessão u_n são positivos portanto são maiores do que $-0,01$.

Vamos determinar a ordem a partir da qual todos os termos da sucessão u_n , quando n é par, são maiores do que $-0,01$, o que equivale a resolver a seguinte inequação:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n+1} > -0,01 &\Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{100} > 0 \Leftrightarrow \frac{-100+n+1}{100(n+1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{n-99}{100(n+1)} > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} n-99 > 0 \\ (100(n+1) > 0) \end{matrix} \\ &\Leftrightarrow n > 99 \end{aligned}$$

A partir da ordem 99 todos os termos da sucessão u_n são maiores do que $-0,01$.

2019, Época especial, caderno 1

29. Seja u_n uma progressão geométrica.

Logo temos que:

- $a + 6 = a \times r \Leftrightarrow r = \frac{a+6}{a}$

$$\begin{array}{ccc} & \times r & \times r \\ & \frown & \frown \\ a & a+6 & a+18 \end{array}$$

$$\bullet a + 18 = (a + 6) \times r \Leftrightarrow r = \frac{a+18}{a+6}$$

Resolvendo a equação abaixo, vamos calcular o número real a :

$$\begin{aligned} \frac{a+6}{a} = \frac{a+18}{a+6} &\Leftrightarrow (a+6)^2 = a(a+18) \Leftrightarrow a^2 + 12a + 36 = a^2 + 18a \Leftrightarrow 36 = 18a - 12a \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a = \frac{36}{6} &\Leftrightarrow a = 6 \end{aligned}$$

Assim temos que $r = \frac{a+6}{a} = \frac{6+6}{6} = 2$.

Conhecendo o valor da soma dos sete primeiros termos da progressão geométrica, conseguimos determinar o primeiro termo da progressão:

$$\begin{aligned} S_7 = u_1 \times \frac{1-r^7}{1-r} &\Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{1-2^7}{1-2} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{1-128}{-1} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times 127 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u_1 = \frac{381}{127} &\Leftrightarrow u_1 = 3 \end{aligned}$$

2018, 1ª fase, caderno 1

30. Sabemos que u_n é uma progressão aritmética.

$$\begin{array}{ccc} & + r & + r \\ & \frown & \frown \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{array}$$

Logo temos que:

$$u_3 = u_1 + 2r \Leftrightarrow 4 = u_1 + 2r \Leftrightarrow u_1 = 4 - 2r$$

Da mesma forma vem que, $u_{12} = u_1 + 11r = 4 - 2r + 11r = 4 + 9r$.

Conhecendo o valor da soma dos doze primeiros termos da progressão aritmética, conseguimos determinar a razão da progressão:

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 \Leftrightarrow 174 = \frac{4 - 2r + 4 + 9r}{2} \times 12 \Leftrightarrow 174 = \frac{(8 + 7r) \times 12}{2} \Leftrightarrow (8 + 7r) \times 12 = \\ &= 2 \times 174 \Leftrightarrow 8 + 7r = \frac{348}{12} \Leftrightarrow 7r = 29 - 8 \Leftrightarrow r = \frac{21}{7} \Leftrightarrow r = 3 \end{aligned}$$

Logo o termo geral desta progressão aritmética é:

$$u_n = u_1 + (n - 1) \times r \Leftrightarrow u_n = 4 - 6 + (n - 1) \times 3 \Leftrightarrow u_n = -2 + (n - 1) \times 3$$

Para averiguarmos se 5371 é termo da sucessão (u_n) , vamos resolver a seguinte equação:

$$\begin{aligned} u_n &= 5371 \Leftrightarrow -2 + (n - 1) \times 3 = 5371 \Leftrightarrow (n - 1) \times 3 = 5371 + 2 \Leftrightarrow (n - 1) \times 3 = 5373 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n = \frac{5373}{3} + 1 \Leftrightarrow n = 1792 \end{aligned}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, concluímos que 5371 é o termo de ordem 1792 da sucessão (u_n) .

2018, 2ª fase, caderno 1

31. Vamos estudar a sucessão (u_n) quanto à monotonia:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1+5}{n+1+3} - \frac{n+5}{n+3} = \frac{n+6}{n+4} - \frac{n+5}{n+3} = \frac{(n+6)(n+3)}{(n+4)(n+3)} - \frac{(n+5)(n+4)}{(n+3)(n+4)} = \\ &= \frac{n^2+3n+6n+18}{(n+4)(n+3)} - \frac{n^2+4n+5n+20}{(n+3)(n+4)} = \frac{n^2+9n+18}{(n+4)(n+3)} - \frac{n^2+9n+20}{(n+3)(n+4)} = \frac{n^2+9n+18-(n^2+9n+20)}{(n+3)(n+4)} = \\ &= -\frac{2}{(n+3)(n+4)} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Como $u_{n+1} - u_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ então (u_n) é uma sucessão monótona decrescente.

2018, Época especial, caderno 1

32. De acordo com a sucessão temos que:

$$\text{Para } n \leq 20, \quad 1 \leq u_n \leq 20$$

$$\text{Para } n > 20, \quad u_n = -1 \vee u_n = 1$$

Portanto a sucessão u_n é limitada, $-1 \leq u_n \leq 20$.

Opção(C)

2017, 1ª fase, grupo I

33. Para $n = 1$, $u_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

$$\text{Para } n = 2, \quad u_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \quad (u_2 = u_1 \times 2)$$

$$\text{Para } n = 3, \quad u_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \quad (u_3 = u_2 \times 2)$$

...

A sucessão u_n é uma progressão geométrica de razão igual a 2.

Opção(B)

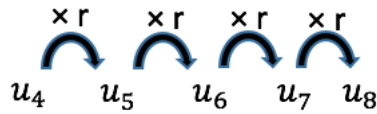
2017, 2ª fase, grupo I

34. Como $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ então $u_n > u_{n+1}$, ou seja, a sucessão é limitada superiormente por u_1 .

Tendo em conta que todos os termos da sucessão são positivos então u_n também é limitada inferiormente (por zero).

Opção(A)

2017, Época especial, grupo I

35. Sabemos que u_n é uma progressão geométrica.

Logo temos que:

$$u_8 = u_4 \times r^4 \Leftrightarrow 8192 = 32 \times r^4 \Leftrightarrow r = \pm \sqrt[4]{\frac{8192}{32}} \Leftrightarrow r = 4 \quad (r > 0)$$

Conhecendo a razão da progressão geométrica conseguimos determinar o quinto termo da sucessão:

$$u_{n+1} = u_n \times r \Leftrightarrow u_5 = u_4 \times r \Leftrightarrow u_5 = 32 \times 4 \Leftrightarrow u_5 = 128$$

Opção(B)

2016, 2ª fase, grupo I

36.

$$u_1 = a$$

$$u_2 = -3u_1 + 2 = -3a + 2$$

$$u_3 = -3u_2 + 2 = -3(-3a + 2) + 2 = 9a - 6 + 2 = 9a - 4$$

Opção(B)

2015, 1ª fase, grupo I

37.

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ -1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Logo $(-1)^n$ é uma sucessão limitada mas não é monótona.

A sucessão $(-1)^n \cdot n$ também não é monótona visto que $u_2 > u_1$ mas $u_3 < u_2$.

A sucessão $1 + n^2$ não é limitada porque $\lim 1 + n^2 = 1 + (+\infty)^2 = +\infty$.

Opção(C)

2015, 1ª fase, grupo I

38. Sabemos que a_n é uma progressão geométrica.

$$\begin{array}{cccc} & \times r & \times r & \times r \\ & \frown & \frown & \frown \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array}$$

Logo temos que:

$$a_6 = a_3 \times r^3 \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{4} \times r^3 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow r = 2$$

Conhecendo a razão da progressão geométrica conseguimos determinar o vigésimo

termo da sucessão:

$$a_{20} = a_6 \times r^{14} \Leftrightarrow a_{20} = 2 \times 2^{14} \Leftrightarrow a_{20} = 2^{15} \Leftrightarrow a_{20} = 32768$$

Opção(C)

2015, Época especial, grupo I