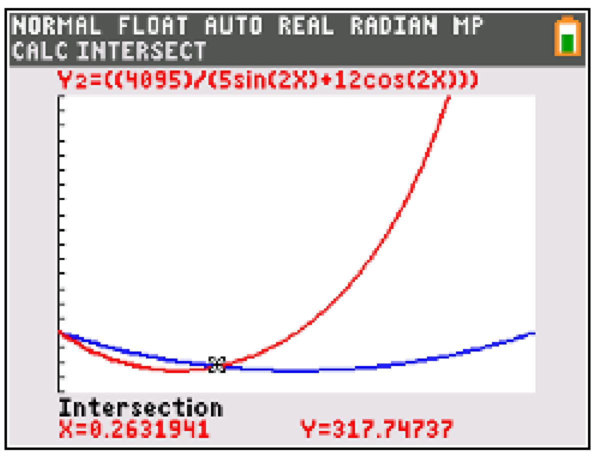
Resolução - Resolução de problemas utilizando a calculadora gráfica

1. Sabe-se que existem dois valores distintos de θ, sendo um desses valores o dobro do outro, aos quais corresponde a mesma intensidade mínima da força, em newton, a aplicar no ponto B , para que se inicie o movimento da caixa.

   Consideremos $\theta_1 \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, o menor desses dois valores, o que corresponde à equação:

   $$F(\theta_1) = F(2\theta_1) \;\Leftrightarrow\; \frac{4095}{5\sin\theta_1 + 12\cos\theta_1} = \frac{4095}{5\sin(2\theta_1) + 12\cos(2\theta_1)}$$

   Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:

   Considerando I o ponto de interseção visualizado na máquina, as suas coordenadas arredondadas às centésimas são: $I(0,26; 317,75)$.

   O valor de θ_1 em radianos, arredondado às centésimas, é igual a 0,26.

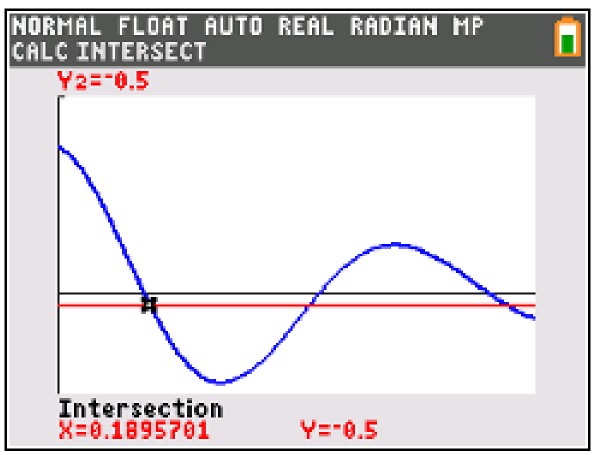
   2024, 1ªfase

2. A posição de equilíbrio é quando $y = 0$, ou seja, nesta posição a mola não se desloca verticalmente para cima nem para baixo.

   Existem três instantes em que a extremidade livre da mola está meio centímetro ($-0,5$ cm) abaixo da posição de equilíbrio o que corresponde à equação:

$$7,5e^{-1,5t}\sin(8,6t+1,6) = -0,5$$

   Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, conseguimos determinar t_1, o primeiro desses três instantes:



   Considerando que $t_1 \in [0,1]$, o valor de t_1, arredondado às centésimas de segundo, é igual a $0,19$ segundos.

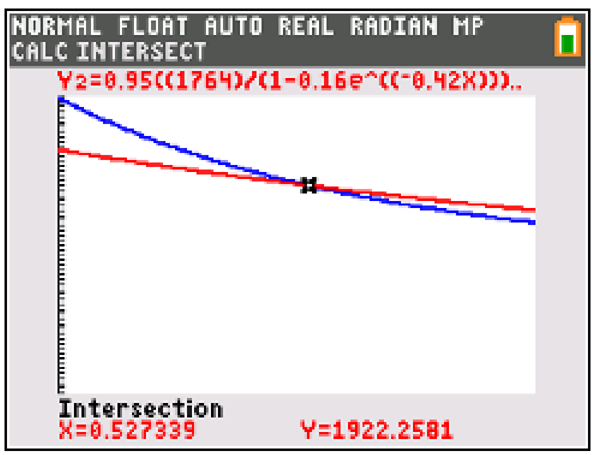
   2024, 2ªfase

3. Seja a um instante no intervalo $[0, 1]$.

No primeiro minuto da reação, existe um instante a para o qual se verifica que, no intervalo de tempo $[a, 3a]$, a massa dessa substância diminui 5%, o que corresponde à equação:

$$m(3a) = m(a) - 0,05m(a) \Leftrightarrow m(3a) = 0,95m(a) \Leftrightarrow \frac{1764}{1-0{,}16e^{-0{,}42\times 3a}} = 0,95 \times \frac{1764}{1-0{,}16e^{-0{,}42a}}$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Considerando I o ponto de interseção visualizado na máquina, as suas coordenadas arredondadas às centésimas são: $I(0, 527; 1922, 258)$.

O valor de a arredondado às centésimas, é igual a 0,527.
Logo o intervalo é $[0, 527; 3 \times 0, 527] = [0, 527; 1, 581]$.

A amplitude do intervalo é igual a $1, 581 - 0, 527 = 1, 054$ minutos, o que corresponde a 1 minuto e 3 segundos.

2024, Época especial

4. $a(t)$ é a distância, em metros, do foguete ao solo após o lançamento, no instante t, em segundos.

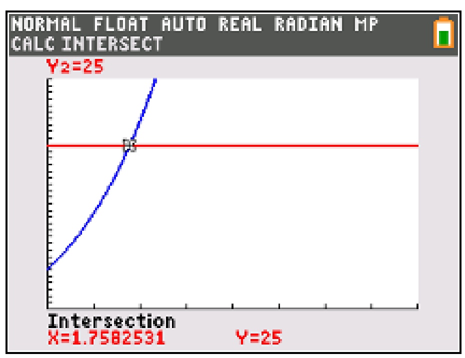
   $a(t+3)$ é a distância, em metros, do foguete ao solo, 3 segundos depois do instante t.

   Existe um instante a partir do qual, durante 3 segundos, esse foguete percorre 25 metros, o que corresponde à equação:

   $a(t+3) - a(t) = 25 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow 100\left[t+3+(10-(t+3))\ln\left(1-\frac{t+3}{10}\right)\right] - \left[4,9(t+3)^2 - 100\left[t+(10-t)\ln\left(1-\frac{t}{10}\right)\right] - 4,9t^2\right] = 25$

   Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



   Considerando que $t \in [0, 8]$, o instante a partir do qual, durante 3 segundos, esse foguete percorre 25 metros, arredondado às décimas é 1,8 segundos.
   2023, 1ª fase

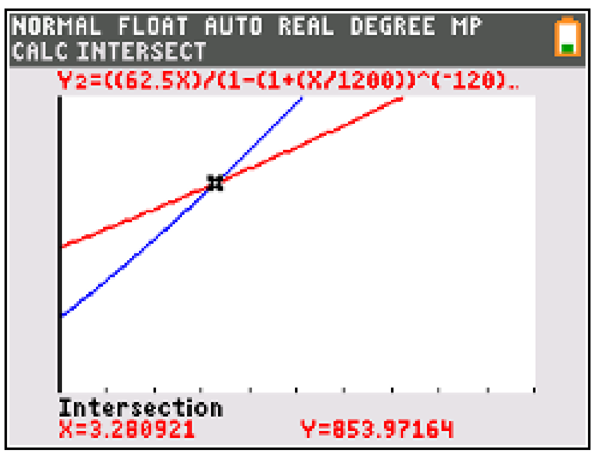
5. $p(j)$ é o valor da prestação mensal a pagar, em euros, dado em função da taxa de juro anual inicial aplicada, j , em percentagem.

$p(2j)$ é o valor da prestação mensal a pagar, em euros, no caso de a taxa de juro anual inicial duplicar.

No caso de a taxa de juro anual inicial duplicar, a prestação mensal aumentará 120 euros, o que corresponde à equação:

$$p(2j) = p(j) + 120 \Leftrightarrow \frac{125j}{1-\left(1+\frac{2j}{1200}\right)^{-120}} = \frac{62{,}5j}{1-\left(1+\frac{j}{1200}\right)^{-120}} + 120$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



O valor a taxa de juro anual inicial, arredondado às milésimas é igual a $3,281\%$.

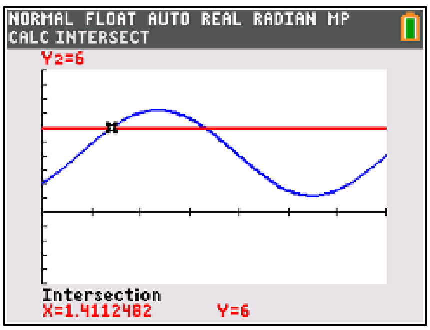
2023, 2ªfase

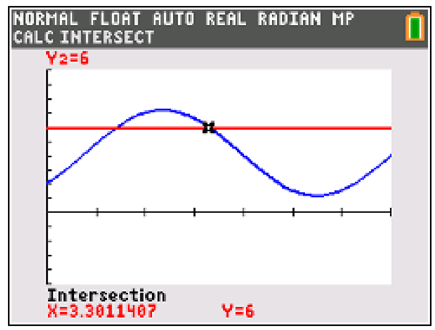
6. Observando a figura conseguimos perceber que o diâmetro da circunferência é igual à diferença das distâncias máxima e mínima do ponto P à reta r. O diâmetro da circunferência é igual a $3\sqrt{2}+3-(3\sqrt{2}-3)=6$.

Durante o percurso, existem dois instantes t_1 e t_2, em que a distância do ponto P à reta r é igual ao diâmetro da circunferência, o que corresponde à equação:

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}(2 + \sin t - \cos t) = 6, \text{ com } t \in [0, 7]$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, conseguimos determinar os valores de t_1 e t_2:





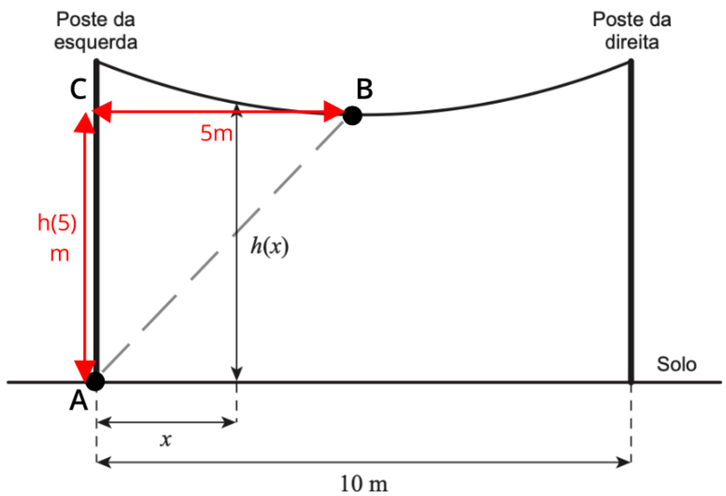
$t_1 \approx 1,4$ $t_2 \approx 3,3$

Considerando que $t_1, t_2 \in [0, 7]$, os dois instantes em que a distância do ponto P à reta r é igual ao diâmetro da circunferência, arredondados às décimas, são $t_1 = 1,4$ segundos e $t_2 = 3,3$ segundos.

2023, Época especial

7.

7.1. Observando a figura abaixo percebemos que a distância da base do poste da esquerda ao ponto do cabo que está mais próximo do solo é igual à hipotenusa do triângulo retângulo [ABC]:



A distância, arredondada às décimas de metro, da base do poste da esquerda ao ponto do cabo que está mais próximo do solo é igual a:

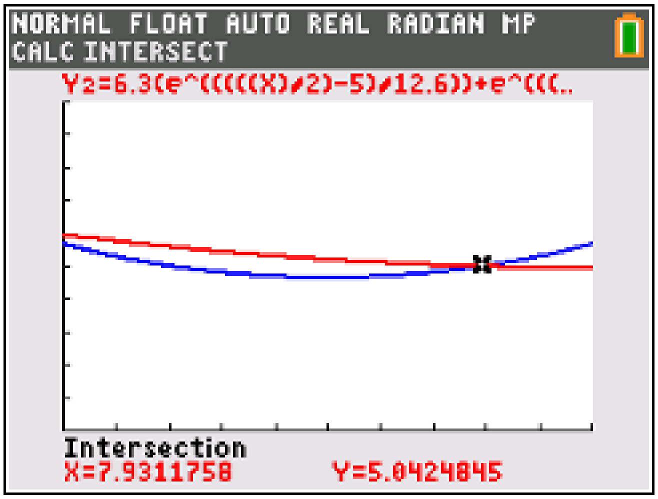
$d(AB)^2 = 5^2 + h(5)^2 \Leftrightarrow d(AB)^2 = 25 + \left[6,3\left(e^{\frac{5-5}{12,6}} + e^{\frac{5-5}{12,6}}\right) - 7,6\right]^2 \Leftrightarrow d(AB)^2 = 50 \Leftrightarrow d(AB) = \pm\sqrt{50} \Leftrightarrow d(AB) \approx 7,1$

Opção(A)

7.2. Consideremos um ponto do cabo situado a d metros do poste da esquerda, verifica-se que, diminuindo 50% essa distância, a altura, relativamente ao solo, diminui 30 centímetros (0,3 metros), o que corresponde à equação:

$$h\left(\frac{d}{2}\right) = d(h) - 0,3$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, conseguimos determinar o valor de d:



Considerando que $d \in]0, 10[$, o valor de d, arredondado às décimas de metro, é igual a $7,9$ m.

2022, 1ª fase

8.

8.1. A percentagem de aumento da massa de sal no tanque, no primeiro minuto após a abertura das torneiras, com aproximação às unidades, é igual a:

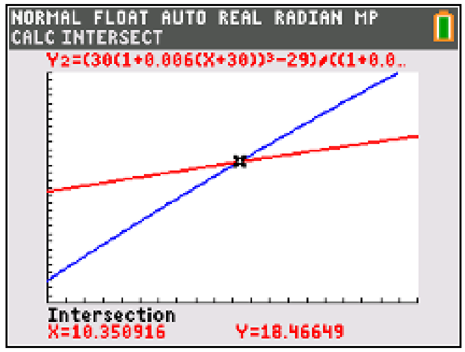
$$[m(1) - m(0)] \times 100\% = \left[\frac{30(1+0,006)^3-29}{(1+0,006)^2} - \frac{30(1+0)^3-29}{(1+0)^2}\right] \times 100\% \approx 52\%$$

Opção(B)

8.2. Existe um instante a partir do qual, passada meia hora, a massa de sal no tanque triplica, o que corresponde à equação:

$$3m(t) = m(t+30) \Leftrightarrow 3 \times \frac{30(1+0,006t)^3-29}{(1+0,006t)^2} = \frac{30[1+0,006(t+30)]^3-29}{[1+0,006(t+30)]^2}$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Considerando que $t \in [0, 20]$, temos que $t \approx 10,351$ minutos, ou seja, $t \approx 10$ minutos e 21 segundos

2022, 2ª fase

9.

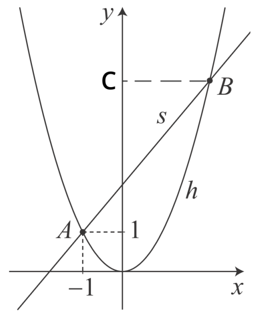
9.1. A equação da reta s é da forma:

$$y = mx + b$$

Substituindo o ponto A na equação da reta s conseguimos escrever a constante b em função do declive m:

$$y = mx + b \Leftrightarrow 1 = m \times (-1) + b \Leftrightarrow b = 1 + m$$

Opção(A)

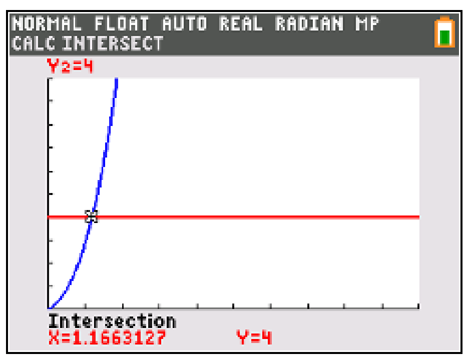


9.2. Considerando o ponto C, projeção ortogonal do ponto B sobre o eixo Oy:

Sabendo que a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 4, vem que:

$$A_{[ABC]} = \frac{b \times h}{2} \Leftrightarrow \frac{x_b \times (y_B - y_A)}{2} = 4 \Leftrightarrow \frac{(m+1)\left((m+1)^2-1\right)}{2} = 4$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, conseguimos determinar a constante m:



O valor de m arredondado às centésimas, é igual a 1,17.

2022, Época especial

10.

10.1. A altura do combustível no depósito no início do vazamento é igual a:

$$a(0) = 1,8 - (0,216 + 0,0039 \times 0)^{\frac{2}{3}} = 1,44 \text{ m}$$

A altura do combustível quando este ocupa metade da capacidade do depósito é igual a:

$$1,8 : 2 = 0,9 \text{ m}$$

A diferença entre a altura do combustível no depósito no início do vazamento e a altura do combustível quando este ocupa metade da capacidade do depósito, em metros é igual a:

$$1,44 - 0,9 = 0,54 \text{ m}$$

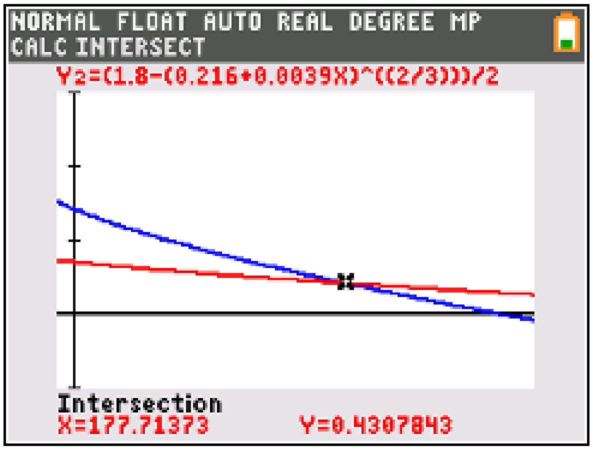
Opção(B)

10.2. Seja t_1 o tempo em minutos após o início do vazamento em que a altura do combustível no depósito é igual a um certo valor.

Passado igual período de tempo, a altura do combustível no depósito é igual a metade desse valor, o que corresponde à equação:

$$a(2t_1) = \frac{a(t_1)}{2} \Leftrightarrow 1,8 - (0,216 + 0,0039 \times 2t_1)^{\frac{2}{3}} = \frac{1,8 - (0,216 + 0,0039 \times t_1)^{\frac{2}{3}}}{2}$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Considerando I o ponto de interseção visualizado na máquina, as suas coordenadas arredondadas às centésimas são: $I(177,71; 0,43)$

O instante t_1, em minutos, arredondado às centésimas é igual a $177,71$, o que corresponde a 2 horas e 58 minutos.

2021, 1ª fase

11.

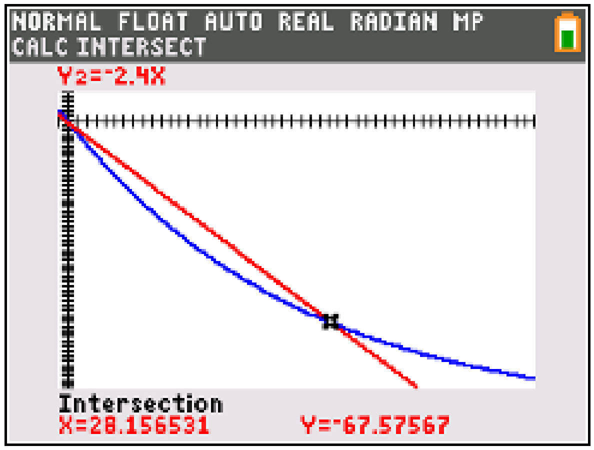
11.1. $T(t_1) = 30 \Leftrightarrow 20 + 100\,e^{-k\,t_1} = 30 \Leftrightarrow 100\,e^{-k\,t_1} = 30 - 20 \Leftrightarrow e^{-k\,t_1} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -k\,t_1 = \ln\frac{1}{10} \Leftrightarrow -k\,t_1 = \ln 1 - \ln 10 \Leftrightarrow k = \frac{-\ln 10}{-t_1} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 10}{t_1}$

Opção(C)

11.2. Durante os primeiros t_2 minutos, a taxa média de variação da função T foi igual a $-2,4$, o que equivale à equação:

$$\frac{T(t_2)-T(0)}{t_2-0} = -2,4 \Leftrightarrow \frac{20+100\,e^{-0,04\,t_2}-120}{t_2} = -2,4 \Leftrightarrow 100\,e^{-0,04\,t_2} - 100 = -2,4t_2$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Considerando I o ponto de interseção visualizado na máquina, as suas coordenadas arredondadas às milésimas são: $I(28,157;-67,576)$

O instante t_2, em minutos, com três casas decimais é igual a $28,157$, o que corresponde a 28 horas e 9 minutos.

2021, 2ª fase

12.

12.1. Com o decorrer do tempo, o número de bactérias vivas existentes no tubo tende para:

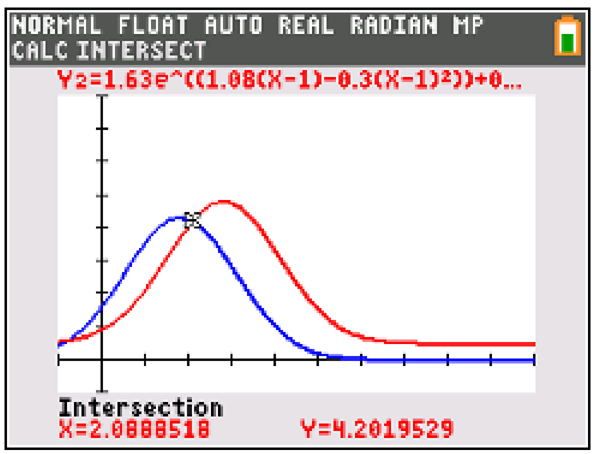
$$\lim_{t\to+\infty} N_0\, e^{1,08t-0,3t^2} = \lim_{t\to+\infty} N_0\, e^{t^2\left(\frac{1,08}{t}-0,3\right)} = N_0\, e^{-\infty} = 0$$

Opção(D)

12.2. Num certo instante, t_1 , havia, no tubo de ensaio, mais meio milhar de bactérias vivas do que uma hora antes desse instante, o que corresponde à equação:

$$N(t_1) = N(t_1 - 1) + 0,5 \Leftrightarrow 1,63\, e^{1,08t_1 - 0,3{t_1}^2} = 1,63\, e^{1,08(t_1-1) - 0,3(t_1-1)^2} + 0,5$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Considerando I o ponto de interseção visualizado na máquina, as suas coordenadas arredondadas às milésimas são: $I(2,089; 4,202)$

O instante t_1, em minutos, com três casas decimais é igual a $2,089$, o que corresponde a 2 horas e 5 minutos.

2021, Época especial

13.

13.1. $d(0) = \cos 0 + \sqrt{9 - \sin^2 0} = 1 + \sqrt{9 - 0} = 1 + 3 = 4$ cm

Temos que $\overline{BO} = 4$ cm

Calculando o comprimento da biela:

$$\overline{BO} = \overline{OM} + \overline{MB} \Leftrightarrow 4 = 1 + \overline{MB} \Leftrightarrow \overline{MB} = 3$$

Opção(B)

13.2. Considerando que $t_0 \in [0, 5]$

Dois segundos após o instante t_0, a distância do pistão ao ponto O diminuiu 25%, o que corresponde à equação:

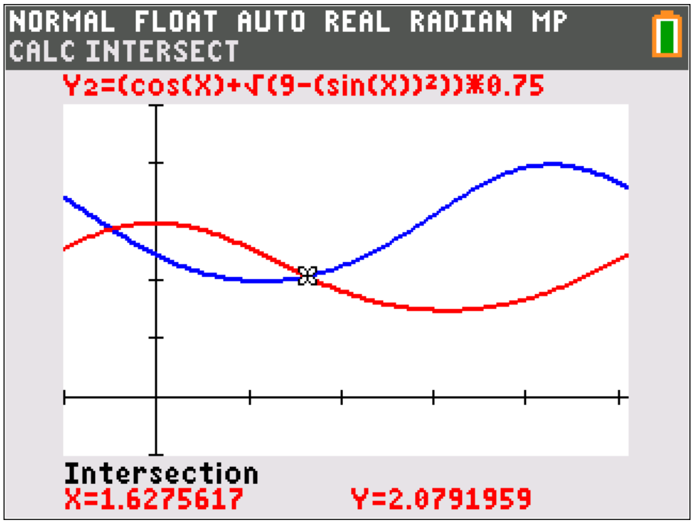
$$d(t_0 + 2) = d(t_0) - d(t_0) \times 0,25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(t_0 + 2) + \sqrt{9 - \sin^2(t_0 + 2)} = (\cos t_0 + \sqrt{9 - \sin^2 t_0}) \times (1 - 0,25) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(t_0 + 2) + \sqrt{9 - \sin^2(t_0 + 2)} = (\cos t_0 + \sqrt{9 - \sin^2 t_0}) \times 0,75$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:

Considerando I o ponto de interseção visualizado na máquina, as suas coordenadas arredondadas às centésimas são: $I(1,63; 2,08)$



A distância, arredondada às décimas, do pistão ao ponto O no instante t_0 é igual a:

$$d(1,63) = \cos(1,63) + \sqrt{9 - \sin^2(1,63)} \approx 2,8 \text{ cm}$$

2020, 1ª fase

14.

14.1. Considerando $r = \frac{3}{5}R$

A percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é dada por:

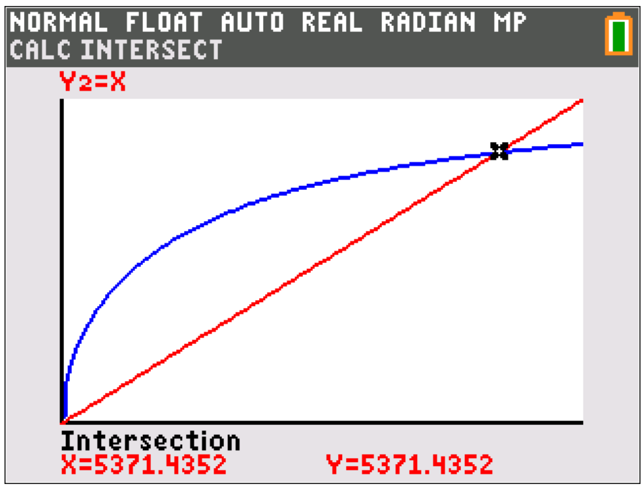
$$50\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{3}{5}R}{R}\right)^2}\right] = 50\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}\right] = 10\%$$

Opção(C)

14.2. Sabendo que o raio da Terra é 6400 km temos que:

$$r = \frac{6400}{r+6400}\sqrt{r^2 + 2r.6400} \Leftrightarrow r = \frac{6400}{r+6400}\sqrt{r^2 + 12800r}$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, conseguimos determinar a constante r:



Considerando que $r \in]0, 6400[$, temos que $r \approx 5371,44$ km.

A percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite, arredondada às unidades, é:

$$50\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{5371,44}{6400}\right)^2}\right] \approx 23\%$$

2020, 2ª fase

15. Sabemos que $r_1 = 7$ mm e $r_2 = 8$ mm.

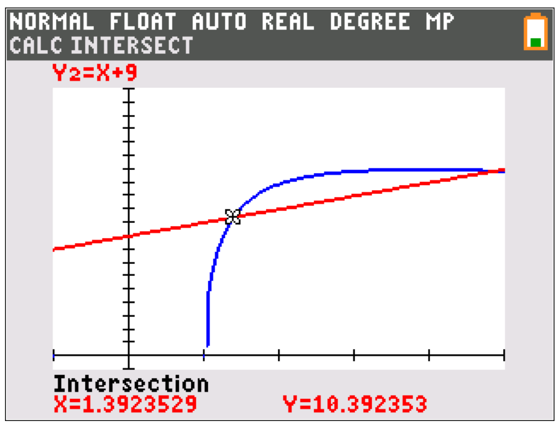
Substituindo os valores de $r_1 = 7$ e $r_2 = 8$ o diâmetro, d, da lente é dado por:

$$d(x) = \frac{\sqrt{(225-x^2)(x^2-1)}}{x}, \qquad x \in]1, \sqrt{15}[$$

O diâmetro dessa lente excede em 9 mm a distância, x, entre os centros das duas superfícies esféricas, o que corresponde à equação:

$$d(x) = x + 9 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(225-x^2)(x^2-1)}}{x} = x + 9, \qquad x \in]1, \sqrt{15}[$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Considerando que $x \in]1, \sqrt{15}[$, temos que $x \approx 1,4$ mm.

2019, 1ª fase, caderno 1

16. Vamos considerar as seguintes constantes:

N_0 é o nível inicial do som, medido em decibéis.

I_0 é o valor da intensidade inicial do som, medida em microwatt por metro quadrado.

O nível do som inicial N_0 respeita a seguinte igualdade:

$$N_0 = 60 + 10\log_{10} I_0 \quad (1)$$

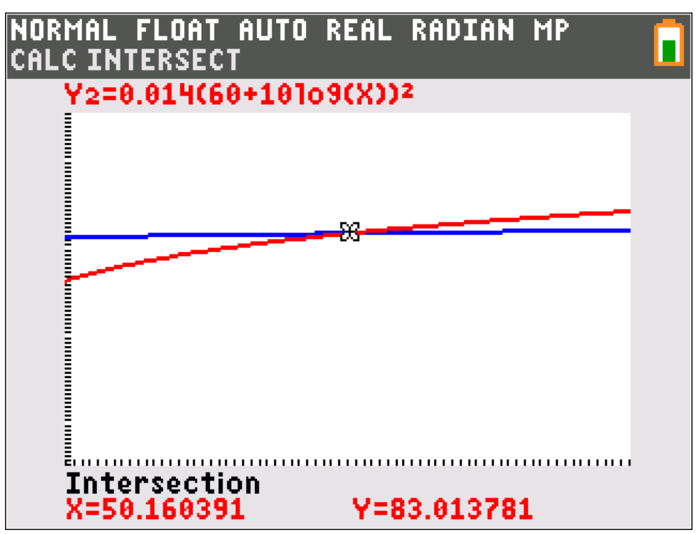
Relativamente ao som de um certo despertador, sabe-se que, aumentando a sua intensidade em 150 $\mu W/m^2$, o seu nível passa a ser 1,4 % do quadrado do nível inicial, o que corresponde à equação:

$$0,014\,{N_0}^2 = 60 + 10\log_{10}(I_0 + 150) \quad (2)$$

Substituindo na equação (2) o nível do som inicial N_0 que está na igualdade (1), vem que:

$$0,014\,(60 + 10\log_{10} I_0)^2 = 60 + 10\log_{10}(I_0 + 150) \quad (2)$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Considerando que $I_0 \in [20, 80]$, temos que $I_0 \approx 50\ \mu W/m^2$.

2019, 2ª fase, caderno 1

17. Pela observação da figura 3 concluímos que os pontos A e B têm as seguintes coordenadas:

$$\text{A}(a, \tfrac{\ln a}{a}) \qquad \text{B}(a, e^a) \qquad \text{sendo } a > 1$$

Seja A' o pé da perpendicular do ponto A em relação ao eixo Ox.

Vamos considerar $\overline{OA'}$ e $\overline{AB}$ a base e a altura do triângulo $[OAB]$, respetivamente.

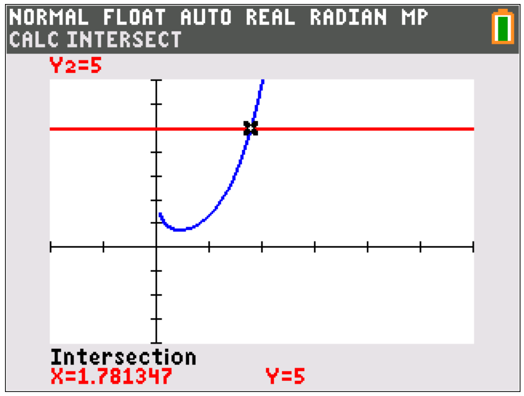
De acordo com a figura, temos que:

$$\overline{AB} = e^a - \tfrac{\ln a}{a} \quad \text{e} \quad \overline{OA'} = a$$

Sabendo que a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 5, vem que:

$$A_{[OAB]} = \tfrac{b \times h}{2} \Leftrightarrow 5 = \tfrac{\left(e^a - \frac{\ln a}{a}\right) \times a}{2} \Leftrightarrow 5 = \tfrac{a\, e^a - \ln a}{2}$$

Recorrendo à calculadora gráfica, vamos inserir as funções $y_1 = \frac{x\,e^x - \ln x}{2}$ e $y_2 = 5$ e calcular o seu ponto de interseção.



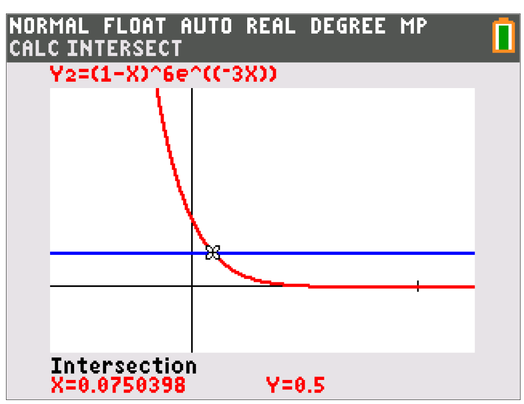
Tendo em conta que $a > 1$ temos que $a \approx 1,8$.

2019, Época especial, caderno 1

18. Sabendo que a potência da luz transmitida é igual a metade da potência da luz incidente e que o coeficiente de reflexão, R, e o coeficiente de absorção, m, têm o mesmo valor numérico, vem que:

$$L = I(1-R)^6\, e^{-3\lambda} \Leftrightarrow \frac{I}{2} = I(1-R)^6\, e^{-3R} \Leftrightarrow \frac{\frac{I}{2}}{I} = (1-R)^6\, e^{-3R} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = (1-R)^6\, e^{-3R}$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



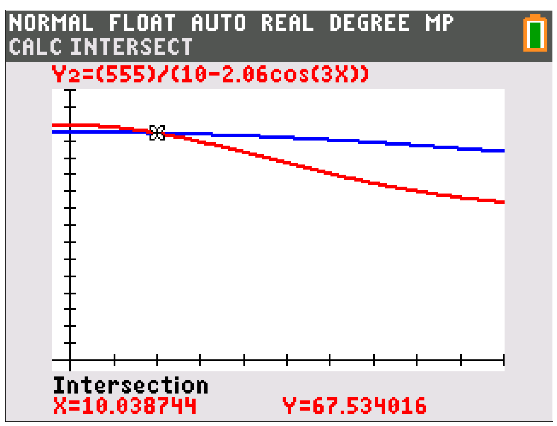
Assim temos que $R = \lambda \approx 0,075$.

2018, 1ª fase, caderno 1

19. "Passado algum tempo a amplitude do ângulo ASM é três vezes maior e a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%"o que corresponde à equação:

$$d(\alpha) - 0,03d(\alpha) = d(3\alpha) \Leftrightarrow \frac{555}{10-2{,}06\cos\alpha}(1-0,03) = \frac{555}{10-2{,}06\cos 3\alpha} \Leftrightarrow \frac{555}{10-2{,}06\cos\alpha} \times 0,97 = $$
$$= \frac{555}{10-2{,}06\cos 3\alpha} \Leftrightarrow \frac{538{,}35}{10-2{,}06\cos\alpha} = \frac{555}{10-2{,}06\cos 3\alpha}$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Como $0 < \alpha < 20$, temos que $\alpha \approx 10^o$.

2018, 2ª fase, caderno 1

20. Sabemos que x é a distância do ponto F à reta OG e $t(x)$ é o tempo, em minutos que o ascensor demora a percorrer de um ponto P de abcissa x ao ponto C.

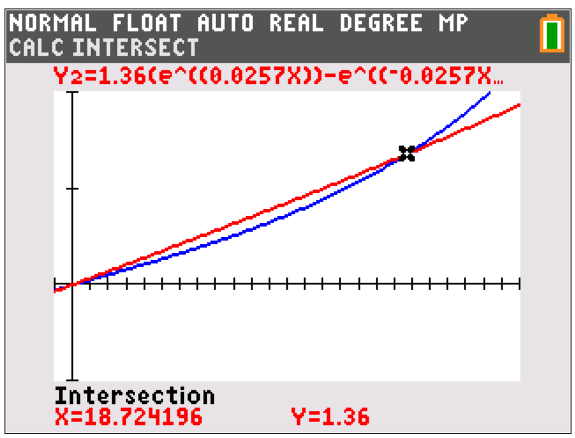
A distância do ponto G à reta OC é igual ao triplo da distância do ponto F à mesma reta, o que corresponde à equação:

$$x_G = 3x$$

O tempo que o ascensor demora a percorrer o arco que vai de F até G é igual ao triplo do tempo que demora a percorrer o arco que vai de C até F, corresponde à equação:

$t(x_G) - t(x) = 3t(x) \;\Leftrightarrow\; t(x_G) = 4t(x) \;\Leftrightarrow\; t(3x) = 4t(x) \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; 0,34[e^{0,0257(3x)} - e^{-0,0257(3x)}] = 4 \times 0,34(e^{0,0257x} - e^{-0,0257x}) \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; 0,34(e^{0,0771x} - e^{-0,0771x}) = 1,36(e^{0,0257x} - e^{-0,0257x})$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Considerando que $x \in [0, 96]$, temos que $x \approx 18,7$ m.

2018, Época especial, caderno 1

21. De acordo com a figura 9 a abcissa do ponto A corresponde ao zero da função g para $x < 1$:

$g(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - x^2 = 0 \wedge 1 - e^{x-1} \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \wedge e^{x-1} \neq 1 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 1 \wedge x - 1 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = -1 \wedge x \neq 1$$

Logo o ponto A tem coordenadas $(-1, 0)$, ou seja, a base do triângulo [OAP] é igual a 1.

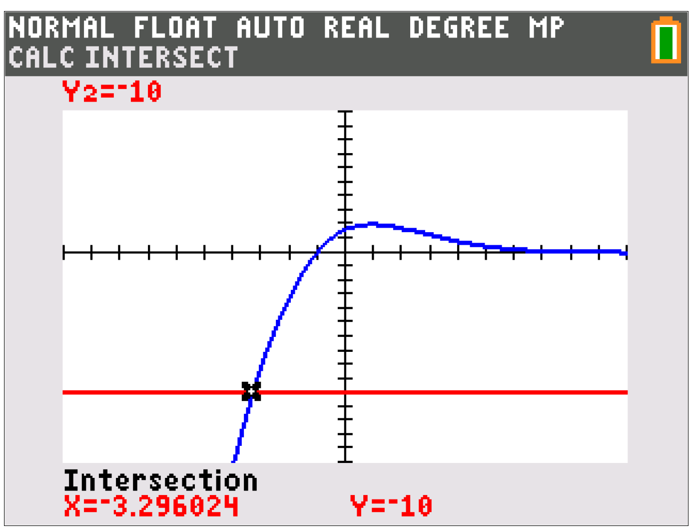
Sabendo que a área do triângulo [OAP] é igual a 5, vem que:

$$A_{[OAP]} = \frac{base \times altura}{2} \;\Leftrightarrow\; 5 = \frac{1 \times altura}{2} \;\Leftrightarrow\; altura = 10$$

Considerando que o ponto P tem coordenadas $(a, g(a))$, pela observação da figura 9, a altura do triângulo [OAP] é igual ao simétrico do valor da ordenada do ponto P:

$$g(a) = -10 \;\Leftrightarrow\; \frac{1-a^2}{1-e^{a-1}} = -10$$

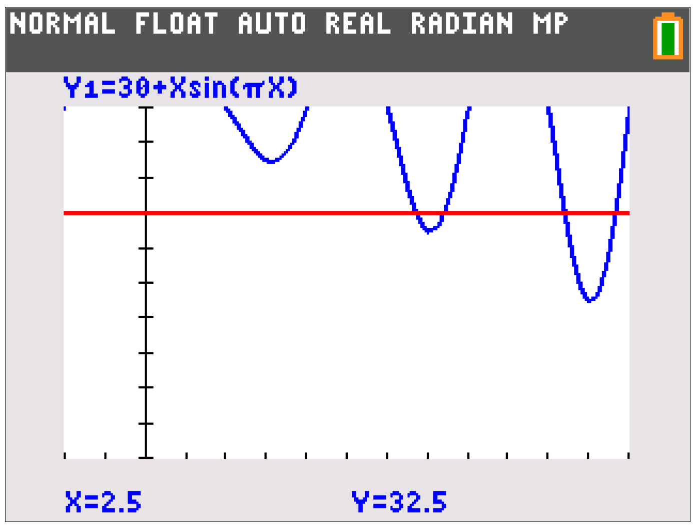
Recorrendo à calculadora gráfica, vamos determinar a constante a (abcissa do ponto P):



Assim, temos que $a \approx -3,3$.

2017, 1ª fase, grupo II

22. Recorrendo à calculadora gráfica, vamos inserir a função $y_1 = 30 + x\sin(\pi x)$ e a reta de equação $y_2 = 27$ utilizando a janela de visualização $x \in [-1, 7]$ e $y \in [20, 30]$.



De acordo com o gráfico da função, quando $x \in [0, 6]$ a reta $y_2 = 27$ interseta a função y_1 em 4 pontos, logo o número de soluções da equação $d(t) = 27$ é 4.

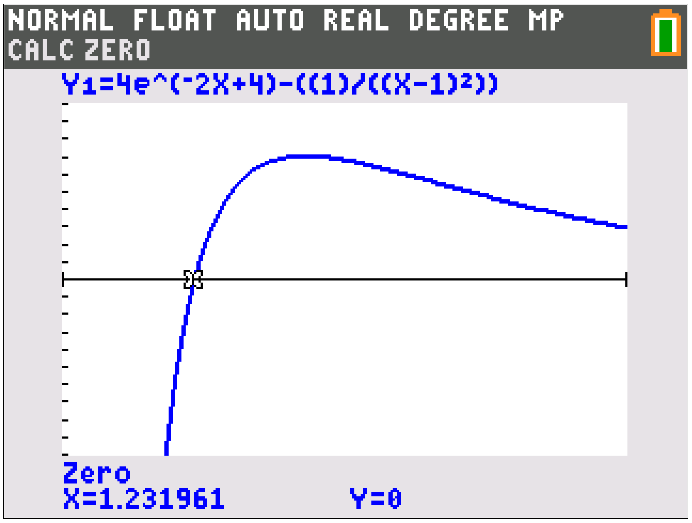
2017, 2ª fase, grupo II

23. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função f, para $x > 1$:

$$f'(x) = [e^{-2x+4} + \ln(x-1)]' = -2e^{-2x+4} + \frac{1}{x-1}$$

$$f''(x) = [-2e^{-2x+4} + \frac{1}{x-1}]' = 4e^{-2x+4} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

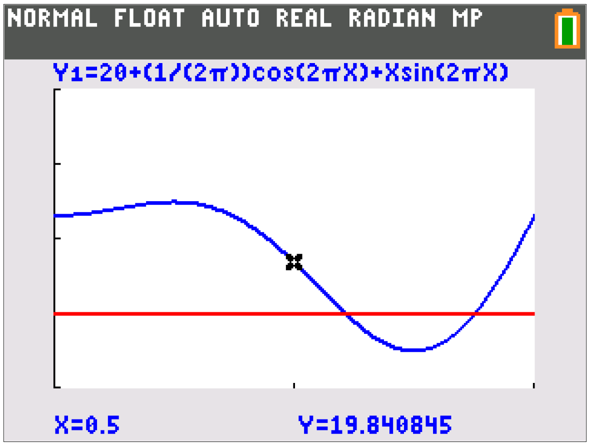
Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora representamos o gráfico da função $f''(x)$ no intervalo pedido $]1,2[$ e calculamos o zero de $f''(x)$ neste intervalo.



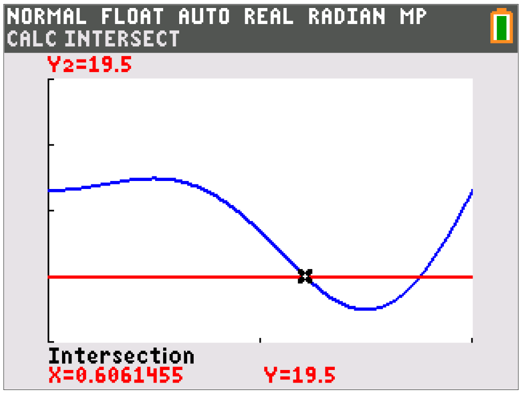
$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \approx 1,23$$

2017, Época especial, grupo II

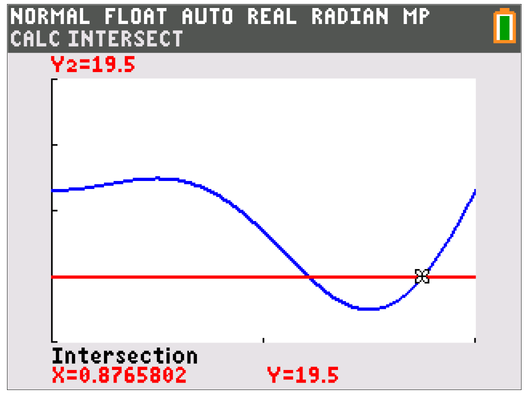
24. Reproduzindo na calculadora o gráfico da função h e a reta de equação $y = 19,5$ na janela sugerida $y \in [19, 21]$ temos:



Recorrendo à calculadora gráfica vamos determinar os valores aproximados às milésimas de a e b:



$a \approx 0,606$



$b \approx 0,877$

Logo, $b - a \approx 0,877 - 0,606 \approx 0,27$

O valor de $b - a$ representa o intervalo de tempo, em minutos, em que a distância do ponto P do tabuleiro a um ponto fixo foi inferior a 19,5 metros. Durante aproximadamente 0,27 minutos a distância do ponto P do tabuleiro a um ponto fixo foi inferior a 19,5 metros.

2016, 1ª fase, grupo II

25. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f para $x > 0$:

$$f'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$ é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m = f'(\tfrac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1$$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f é da forma:

$$y = x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante b:

$$y = -x + b \Leftrightarrow f(\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2} + b \Leftrightarrow \tfrac{1}{2} - \ln\tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2} + b \Leftrightarrow \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \ln 2^{-1} = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - (-1)\ln 2 = b \Leftrightarrow b = 1 + \ln 2$$

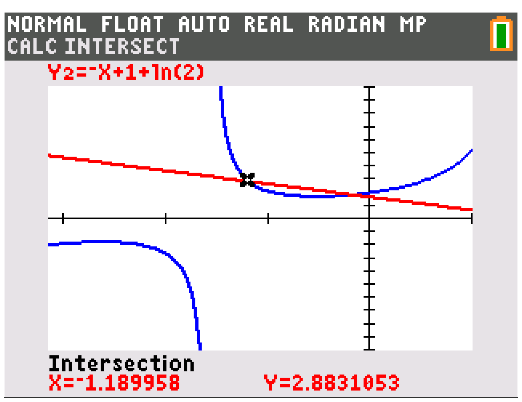
Assim, a equação reduzida da reta r é:

$$y = -x + 1 + \ln 2$$

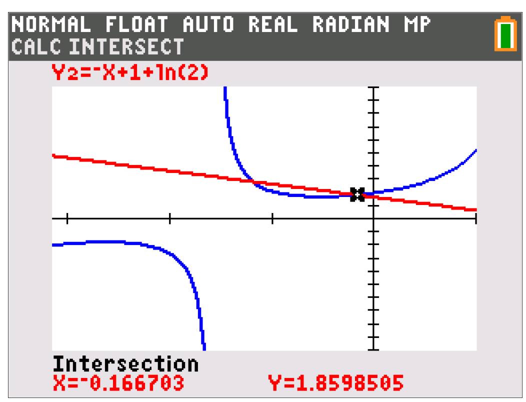
Como a reta r intersecta o gráfico de f em dois pontos, A e B, cujas abcissas pertencem ao intervalo $]-\frac{\pi}{2}, 0[$, então temos que:

$$\frac{2+\sin x}{\cos x} = -x + 1 + \ln 2$$

Recorrendo à calculadora gráfica, vamos determinar as abcissas dos pontos A e B:



$x_A \approx -1,19$



$x_B \approx -0,17$

2016, 2ª fase, grupo II

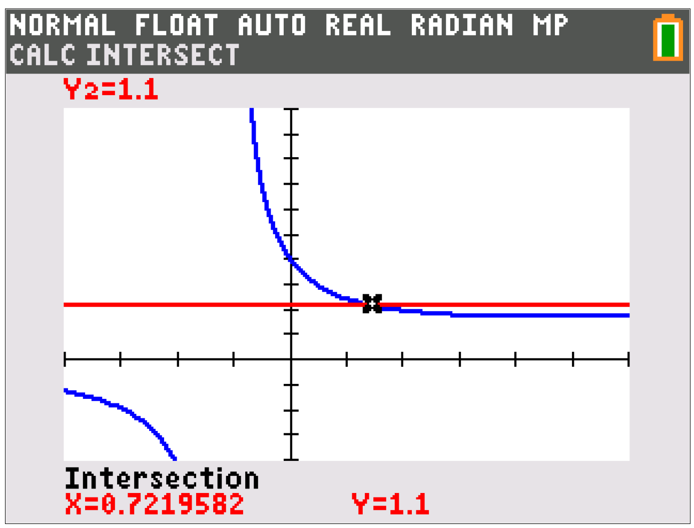
26. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f para $x \geq 0$:

$$f'(x) = [\ln(e^x + x)]' = \frac{e^x+1}{e^x+x}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abssica a é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m = f'(a) \;\; \Leftrightarrow \;\; 1,1 = \frac{e^a+1}{e^a+a}$$

Recorrendo à calculadora gráfica, vamos determinar a constante a (abcissa do ponto A):



Assim, temos que $a \approx 0,72$.

2016, Época especial, grupo II

27. O ponto A pertence ao plano QRS e tem cota igual ao cubo da abcissa, isto é, o ponto A tem de coordendas $(x, 2, x^3), \quad x \in \mathbb{R}$.

Com as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e A podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$:

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (x, 2, x^3) - (0, 0, 0) = (x, 2, x^3)$$

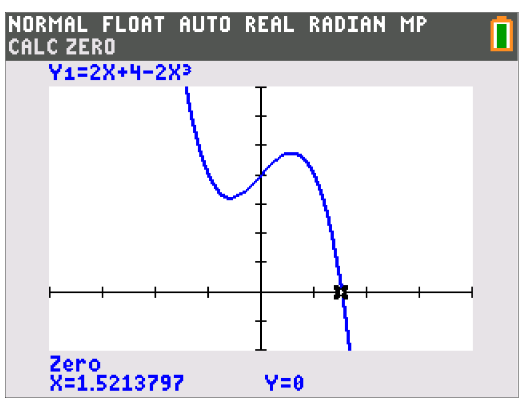
Sabendo que T$(0, 0, 2)$ e Q$(2, 2, 0)$, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{TQ}$:

$$\overrightarrow{TQ} = Q - T = (2, 2, 0) - (0, 0, 2) = (2, 2, -2)$$

Como os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares, o seu produto escalar é nulo:

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{TQ} = 0 \Leftrightarrow (x, 2, x^3).(2, 2, -2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 - 2x^3 = 0 \quad \text{onde } x \in \mathbb{R}$$

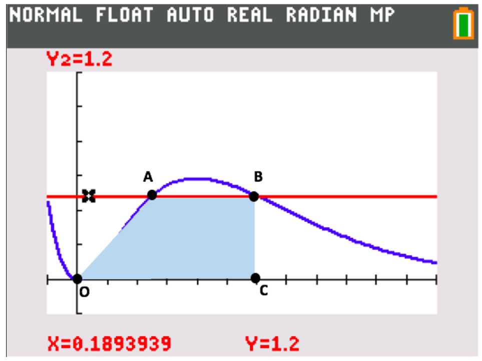
Recorrendo à calculadora gráfica, vamos inserir a função $y_1 = 2x + 4 - 2x^3$ utilizando a janela de visualização sugerida ($x \in [-4, 4]$ e $y \in [-2, 7]$).



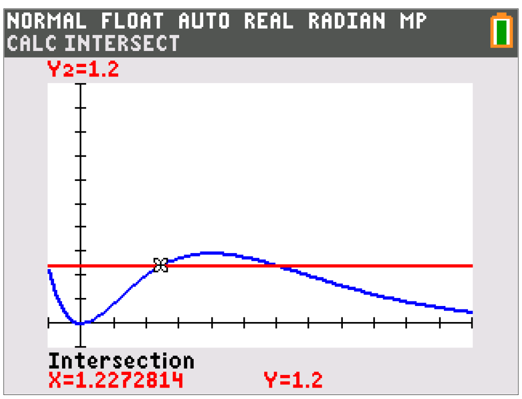
Assim temos que o zero da função é $x \approx 1,52$.

2015, 2ª fase, grupo II

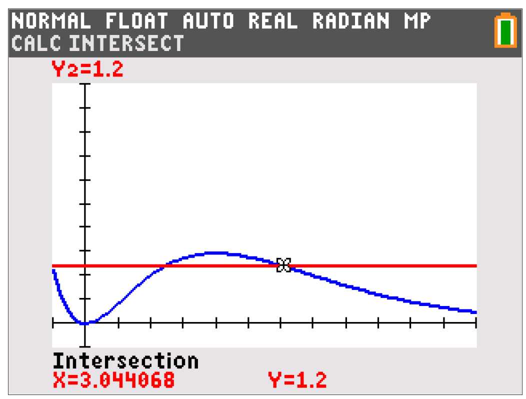
28. Representando o desenho do quadrilátero [OABC]:



Recorrendo à calculadora gráfica vamos determinar as coordenadas dos pontos A e B que pertencem ao gráfico da função f:



A tem coordenadas $(1,227;1,2)$



B tem coordenadas $(3,044;1,2)$

Como o ponto C pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual à do ponto B, então as suas coordenadas são $(3,044;0)$.

O quadrilátero [OABC] é um trapézio, a sua área é:

$$A_{[OABC]} = \frac{B+b}{2} \times h \approx \frac{3{,}044+(3{,}044-1{,}227)}{2} \times 1,2 \approx 2,92$$

2015, Época especial, grupo II