

**Resolução - Propriedades dos logaritmos**

1. Usando as propriedades dos logaritmos:

$$\log_a \left(\frac{b}{a}\right) = 2 \Leftrightarrow \log_a b - \log_a a = 2 \Leftrightarrow \log_a b - 1 = 2 \Leftrightarrow \log_a b = 3$$

Calculando o valor pedido:

$$\log_a(\sqrt{a^3} \times b^2) = \log_a \sqrt{a^3} + \log_a b^2 = \log_a a^{\frac{3}{2}} + 2 \log_a b = \frac{3}{2} \log_a a + 2 \log_a b = \frac{3}{2} + 2 \times 3 =$$

$$= \frac{15}{2}$$

**Opção(B)**

2023, Época especial

$$2. f(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow x + \ln(e^x + 1) = 2x + 1 \Leftrightarrow \ln(e^x + 1) = x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x + 1 = e^{x+1} \Leftrightarrow e^x + 1 = e^x e \Leftrightarrow e^x - e^x e = -1 \Leftrightarrow e^x(1 - e) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = -\frac{1}{1-e} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e-1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{e-1}\right) \Leftrightarrow x = \ln(e-1)^{-1} \Leftrightarrow x = -\ln(e-1)$$

2020, 1ª fase

3. Tendo em atenção as propriedades dos logaritmos:

$$\log_8 x + \log_8 y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_8(xy) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow xy = 8^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow xy = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow xy = 2$$

**Opção(A)**

2020, 2ª fase

4. Tendo em atenção as propriedades dos logaritmos:

$$\begin{aligned}\ln(a^2 - b^2) - 2\ln(a + b) &= \ln[(a + b)(a - b)] - \ln(a + b)^2 = \ln(a + b) + \ln(a - b) - \\ &\ln[(a + b)(a + b)] = \\ &= \ln(a + b) + \ln(a - b) - [\ln(a + b) + \ln(a + b)] = \ln(a + b) + \ln(a - b) - \ln(a + b) - \ln(a + b) = \\ &\ln(a - b) - \ln(a + b)\end{aligned}$$

Substituindo  $a + b = 2(a - b)$ , vem que:

$$\begin{aligned}\ln(a - b) - \ln(a + b) &= \ln(a - b) - \ln[2(a - b)] = \\ &= \ln(a - b) - [\ln 2 + \ln(a - b)] = \ln(a - b) - \ln 2 - \ln(a - b) = -\ln 2 \approx -0,7\end{aligned}$$

Notas:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad (\text{Caso notável})$$

$$2\ln(a + b) = \ln(a + b)^2 \quad (\text{Propriedade dos logaritmos})$$

$$\ln[(a + b)(a + b)] = \ln(a + b) + \ln(a + b) \quad (\text{Propriedade dos logaritmos})$$

### Opção(C)

2019, 1ª fase, caderno 1

5. Usando as propriedades dos logaritmos temos que:

$$\ln b = 4 \ln a \Leftrightarrow \ln b = \ln a^4 \Leftrightarrow b = a^4$$

Resolvendo a inequação:

$$a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq (a^4)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq a^{4 \times \frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq a^{\frac{4}{x}} \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow x - \frac{4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x}{x} \geq 0$$

Seja  $f$  uma função tal que  $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x}$ .

Calculando os zeros de  $f(x)$ :

$$\frac{x^2 - 4x}{x} = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

De modo a estudarmos a monotonia da função  $f$  vamos construir um quadro de sinal:

$x$	$-\infty$	$-2$		$0$		$2$	$+\infty$
$x^2 - 4$	$+$	$0$	$-$	n.d.	$-$	$0$	$+$
$x$	$-$	$-$	$-$	n.d.	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$0$	$+$	n.d.	$-$	$0$	$+$

$$C.S = [-2, 0[ \cup [2, +\infty[$$

2018, 1ª fase, caderno 2

6. Usando as propriedades dos logaritmos vamos resolver a inequação:

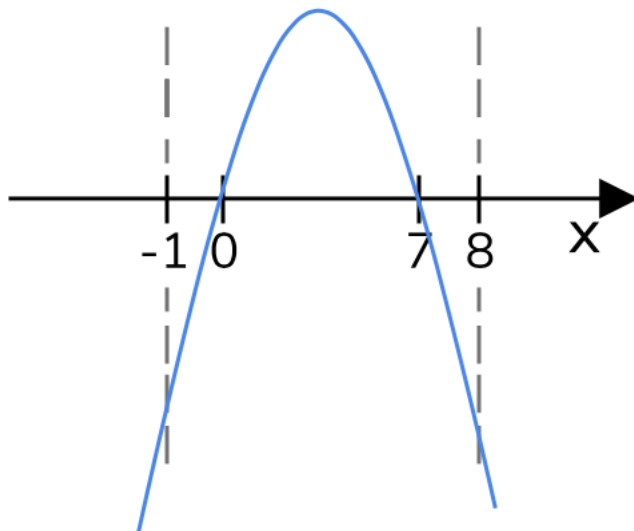
$$\begin{aligned} \log_2(x+1) &\leq 3 - \log_2(8-x) \wedge x+1 > 0 \wedge 8-x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2(x+1) &\leq \log_2 2^3 - \log_2(8-x) \wedge x > -1 \wedge x < 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2(x+1) &\leq \log_2\left(\frac{8}{8-x}\right) \wedge x \in ]-1, 8[ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2(x+1) - \log_2\left(\frac{8}{8-x}\right) &\leq 0 \wedge x \in ]-1, 8[ \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{(x+1)(8-x)}{8}\right) \leq 0 \wedge x \in ]-1, 8[ \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{8x-x^2+8-x}{8}\right) \leq 0 \wedge x \in ]-1, 8[ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{-x^2+7x+8}{8}\right) \leq 0 \wedge x \in ]-1, 8[ \Leftrightarrow \frac{-x^2+7x+8}{8} \leq 2^0 \wedge x \in ]-1, 8[ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{-x^2+7x+8}{8} \leq 1 \wedge x \in ]-1, 8[ \Leftrightarrow -x^2+7x+8 \leq 8 \wedge x \in ]-1, 8[ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -x^2+7x \leq 0 \wedge x \in ]-1, 8[
\end{aligned}$$

Calculando os zeros da parábola  $-x^2 + 7x$ , temos:

$$-x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 7$$

Sabendo que a parábola tem concavidade voltada para baixo pois o coeficiente de 2º grau é negativo, podemos representar a parábola na reta real no intervalo  $] -1, 8[$ :



Logo, C.S. =  $] -1, 0] \cup [7, 8[$

2018, 2ª fase, caderno 2

7. Usando as propriedades dos logaritmos temos:

$$\begin{aligned} 4 + \log_a(5^{\ln a}) &= 4 + \ln a \times \log_a 5 = 4 + \frac{\log_a a}{\log_a e} \times \log_a 5 = 4 + \frac{1}{\log_a e} \times \log_a 5 = 4 + \frac{\log_a 5}{\log_a e} = \\ &= 4 + \ln 5 = \ln e^4 + \ln 5 = \ln(5e^4) \end{aligned}$$

2017, Época especial, grupo I

8. Usando as propriedades dos logaritmos temos:

$$\begin{aligned} \log_a(ab^3) = 5 &\Leftrightarrow \log_a a + \log_a b^3 = 5 \Leftrightarrow 1 + 3\log_a b = 5 \Leftrightarrow 3\log_a b = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_a b = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Assim temos que:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

**Opção(B)**

2016, 2ª fase, grupo I

9. Fazendo a substituição  $a = b^3$  temos:

$$\log_a b + \log_b a = \frac{\log_b b}{\log_b a} + \log_b b^3 = \frac{1}{\log_b b^3} + 3 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$$

**Opção(C)**

2016, Época especial, grupo I

10. Usando as propriedades dos logaritmos e as regras das potências temos:

$$\log_3 \frac{3^k}{9} = \log_3 \frac{3^k}{3^2} = \log_3 3^{k-2} = (k-2) \log_3 3 = (k-2) \times 1 = k-2$$

**Opção(B)**

2015, 1ª fase, grupo I

11. Usando as propriedades dos logaritmos vem que:

$$\log_a (a^2 b) = \log_a a^2 + \log_a b = 2 \log_a a + \frac{\log_b b}{\log_b a} = 2 \times 1 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 2 + 3 = 5$$

**Opção(D)**

2015, 2ª fase, grupo I