Resolução - Produto escalar

1. Através da equação da circunferência sabemos que o seu raio é igual a 3.
Como $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência então $\overline{PQ} = 6$.

$P\hat{R}Q$ é o ângulo inscrito relativo ao arco PQ, por isso vem que:

$$P\hat{R}Q = \frac{\widehat{PQ}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a π, assim conseguimos escrever o ângulo $R\hat{Q}P$ em função de α:

$R\hat{Q}P + P\hat{R}Q + \alpha = \pi \Leftrightarrow R\hat{Q}P = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha \Leftrightarrow R\hat{Q}P = \frac{\pi}{2} - \alpha$

O triângulo $[PQR]$ é retângulo em R, usando a definição de cosseno vem que:

$\cos(R\hat{Q}P) = \frac{c.adjacente}{hipotenusa} \Leftrightarrow \cos(R\hat{Q}P) = \frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\overline{QR}}{6} \Leftrightarrow \overline{QR} = 6\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{QR} = 6\sin\alpha$

Usando a fórmula do produto escalar temos que:

$\overrightarrow{QR} \,.\, \overrightarrow{QP} = ||\overrightarrow{QR}|| \times ||\overrightarrow{QP}|| \times \cos(R\hat{Q}P) \Leftrightarrow 27 = ||\overrightarrow{QR}|| \times 6 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 27 = 6\sin\alpha \times 6 \times \sin\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{27}{36} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{27}{36} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \sin\alpha = \pm\frac{3\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{porque } \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e através da tabela trigonométrica temos que $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

2024, 2ª fase

2. Pela observação da figura sabemos que:

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}).(\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CE}) =$

$$= \overrightarrow{DO}.\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{DO}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{CE} = (*_2)$$

Os vetores $\overrightarrow{DO}$ e $\overrightarrow{OC}$ são perpendiculares, bem como os vetores $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{CE}$ então o seu produto escalar é igual a zero.

$$(*_2) = \overrightarrow{DO}.\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OC} = (*_3)$$

Aplicando a fórmula do produto escalar entre dois vetores vem que:

$\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{DO} = ||\overrightarrow{DO}||^2 \times \cos 0 = \left(\frac{\overline{OA}}{3}\right)^2 = \frac{\overline{OA}^2}{9}$

$\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CE} = ||\overrightarrow{DO}|| \times ||\overrightarrow{CE}|| \times \cos \pi = \frac{\overline{OA}}{3} \times \left(\overline{OA} - \frac{\overline{OA}}{3}\right) \times -1 = -\frac{\overline{OA}}{3} \times \frac{2\overline{OA}}{3} = -\frac{2\overline{OA}^2}{9}$

$\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OC} = ||\overrightarrow{OC}||^2 \times \cos 0 = \left(\frac{\overline{OA}}{4}\right)^2 = \frac{\overline{OA}^2}{16}$

$$(*_3) = \frac{\overline{OA}^2}{9} - \frac{2\overline{OA}^2}{9} + \frac{\overline{OA}^2}{16} = -\frac{\overline{OA}^2}{9} + \frac{\overline{OA}^2}{16} = \frac{-16\overline{OA}^2 + 9\overline{OA}^2}{144} = \frac{-7\overline{OA}^2}{144}$$

Sabendo que $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DE} = -7$ conseguimos calcular $\overline{OA}$ através da equação:

$\frac{-7\overline{OA}^2}{144} = -7 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 144 \Leftrightarrow \overline{OA} = \pm\sqrt{144} \Leftrightarrow \overline{OA} = 12 \quad \overline{OA} > 0$

2023, 2ª fase

3. Como os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{HE}$ formam um ângulo de 90º então o seu produto escalar é igual a 0.

   Opção(B)

   2022, 2ª fase

4. Observando a figura sabemos que:

$$|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| = \text{raio} = 3$$

   De modo a calcular o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ vamos usar uma regra de três simples:

Perímetro		Ângulo
2π	——	α
$2\pi \times 3$	——	2π

$\alpha = \overrightarrow{CA}\,\hat{}\,\overrightarrow{CB} = \frac{2\pi \times 2\pi}{6\pi} = \frac{2\pi}{3}$

Usando a fórmula do produto escalar vem que:

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \times |\overrightarrow{CB}| \times \cos(\overrightarrow{CA}\,\hat{}\,\overrightarrow{CB}) = 3 \times 3 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 9 \times -\frac{1}{2} = -\frac{9}{2}$

2022, 1ª fase

5. Sabendo as coordenadas dos pontos A (2,1,0) e V $(3,-1,2)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AV}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AV} = V - A = (3,-1,2) - (2,1,0) = (1,-2,2)$$

$$||\overrightarrow{AV}|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Com as coordenadas dos pontos A (2,1,0) e C$(0,-1,2)$ podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,-1,2) - (2,1,0) = (-2,-2,2)$$

$$||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{AV}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AV}.\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AV}|| \times ||\overrightarrow{AC}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AV}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}) = \frac{(1,-2,2).(-2,-2,2)}{3 \times 2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AV}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}) =$
$= \frac{-2+4+4}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AV}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}) = \frac{6}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AV}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow V\hat{A}C \approx 55^o$

2019, 1ª fase, caderno 1

6. Como [PQ] e [QR] são arestas de uma das bases do prisma vem que:

$$||\overrightarrow{QP}|| = ||\overrightarrow{QR}|| = 4$$

A base do prisma é um hexágono regular, que pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros.

Portanto cada ângulo interno do hexágono regular tem o dobro da amplitude de um ângulo interno do triângulo equilátero, logo:

$$R\hat{Q}P = 60 \times 2 = 120^o$$

Usando a fórmula do produto escalar temos que:

$\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QR} = \cos(\overrightarrow{QP}\,\hat{}\,\overrightarrow{QR}) \times ||\overrightarrow{QP}|| \times ||\overrightarrow{QR}|| = \cos(120^o) \times 4^2 = -\frac{1}{2} \times 16 = -8$

2018, 1ª fase, caderno 1

7. Sabendo as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e C $(1, 2, -1)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{OC} = C - O = (1, 2, -1) - (0, 0, 0) = (1, 2, -1)$$

$$||\overrightarrow{OC}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Com as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e A$(1, 2, 1)$ podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (1, 2, 1) - (0, 0, 0) = (1, 2, 1)$$

$$||\overrightarrow{OA}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{OC}\,\hat{}\,\overrightarrow{OA}) = \frac{\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}}{||\overrightarrow{OC}|| \times ||\overrightarrow{OA}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OC}\,\hat{}\,\overrightarrow{OA}) = \frac{(1,2,-1).(1,2,1)}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OC}\,\hat{}\,\overrightarrow{OA}) =$
$= \frac{1+4-1}{6} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OC}\,\hat{}\,\overrightarrow{OA}) = \frac{4}{6} \Leftrightarrow A\hat{O}C = \cos^{-1}(\frac{2}{3}) \Leftrightarrow A\hat{O}C \approx 48^o$

2018, 2ª fase, caderno 1

8. O ponto R é o ponto de interseção da superfície esférica com o semieixo negativo das ordenadas logo as suas coordenadas são da forma (0,y,0) com y<0.

Conseguimos determinar y, substituindo as coordenadas do ponto R na equação da superfície esférica:

$$0^2 + y^2 + 0^2 = 3 \Leftrightarrow y^2 = 3 \Leftrightarrow y = -\sqrt{3} \qquad \text{(y<0)}$$

Assim sabemos que o ponto R tem coordenadas $(0, -\sqrt{3}, 0)$.

Sabendo as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e R $(0, -\sqrt{3}, 0)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OR}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{OR} = R - O = (0, -\sqrt{3}, 0) - (0,0,0) = (0, -\sqrt{3}, 0)$$

$$||\overrightarrow{OR}|| = \sqrt{0^2 + (-\sqrt{3})^2 + 0^2} = \sqrt{3}$$

Com as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e P$(1,1,1)$ podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (1,1,1) - (0,0,0) = (1,1,1)$$

$$||\overrightarrow{OP}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{OR}\,\hat{}\,\overrightarrow{OP}) = \frac{\overrightarrow{OR}.\overrightarrow{OP}}{||\overrightarrow{OR}|| \times ||\overrightarrow{OP}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OR}\,\hat{}\,\overrightarrow{OP}) = \frac{(0,-\sqrt{3},0).(1,1,1)}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OR}\,\hat{}\,\overrightarrow{OP}) =$
$= -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow R\hat{O}P \approx 125^o$

2018, Época especial, caderno 1

9. Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$$\cos(\overrightarrow{UP}\,\hat{}\,\overrightarrow{RS}) = \frac{\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS}}{||\overrightarrow{UP}|| \times ||\overrightarrow{RS}||}$$

De acordo com a figura 3, os vetores $\overrightarrow{UP}$ e $\overrightarrow{RS}$ têm a mesma direção e sentidos contrários, ou seja, o ângulo formado pelos dois vetores tem amplitude π e $||\overrightarrow{UP}|| = ||\overrightarrow{RS}|| = 3$.

Assim temos que:

$$\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS} = \cos(\overrightarrow{UP}\,\hat{}\,\overrightarrow{RS}) \times ||\overrightarrow{UP}|| \times ||\overrightarrow{RS}|| = \cos(\pi) \times 3 \times 3 = -9$$

2017, 1ª fase, grupo II

10. De acordo com a figura 4, a base [EFGH] tem aresta igual a 2 e sabendo as coordenadas dos pontos A e D conseguimos perceber que o ponto P tem coordenadas (1,5,z), sendo que z é igual ao valor da altura da pirâmide regular de base [EFGH].

    Através da fórmula do volume da pirâmide vamos determinar a cota do ponto P:

    $V_{pirâmide} = \frac{1}{3}A_{base} \times altura \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{3} \times 2^2 \times z \Leftrightarrow 4 = \frac{4}{3} \times z \Leftrightarrow z = \frac{4}{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow$
    $\Leftrightarrow z = 3$

    Assim, P tem coordenadas (1,5,5).

    Sabendo que G(2,6,2) e P(1,5,5) podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GP}$ e a sua norma:

    $$\overrightarrow{GP} = P - G = (1,5,5) - (2,6,2) = (-1,-1,3)$$

    $$||\overrightarrow{GP}|| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

    Com as coordenadas dos pontos G e O (O é a origem do referencial) podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GO}$ e a sua norma:

    $$\overrightarrow{GO} = O - G = (0,0,0) - (2,6,2) = (-2,-6,-2)$$

    $$||\overrightarrow{GO}|| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{44}$$

    Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

    $\cos(\overrightarrow{GO} \hat{} \overrightarrow{GP}) = \frac{\overrightarrow{GO}.\overrightarrow{GP}}{||\overrightarrow{GO}|| \times ||\overrightarrow{GP}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{GO} \hat{} \overrightarrow{GP}) = \frac{(-2,-6,-2).(-1,-1,3)}{\sqrt{44} \times \sqrt{11}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{GO} \hat{} \overrightarrow{GP}) = \frac{2+6-6}{\sqrt{44 \times 11}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{GO} \hat{} \overrightarrow{GP}) = \frac{2}{\sqrt{484}} \Leftrightarrow O\hat{G}P = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{484}}\right) \Leftrightarrow O\hat{G}P \approx 85^o$

    2017, 2ª fase, grupo II

11. Através da condição que define a reta r, sabemos que o seu vetor diretor tem coordenadas $(1,1,-1)$.

    Como o plano α é perpendicular à reta r, o vetor $(1,1,-1)$ é um vetor normal do plano α. Assim temos que $\alpha : x + y - z + d = 0$.

    Substituindo as coordenadas do ponto A (que pertence ao plano α) na equação do plano α, conseguimos determinar a constante d:

$$x+y-z+d=0 \Leftrightarrow 1+2-0+d=0 \Leftrightarrow d=-3$$

Logo, $\alpha : x+y-z-3=0$.

Como o ponto P pertence ao plano α, substituindo na equação do plano α os valores da abcissa e ordenada podemos calcular o valor da cota do ponto P:

$$x+y-z-3=0 \Leftrightarrow 2+2-z-3=0 \Leftrightarrow z=1$$

O ponto P tem coordenadas $(2,2,1)$.

Sabendo que O$(0,0,0)$ e P$(2,2,1)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (2,2,1) - (0,0,0) = (2,2,1)$$

$$||\overrightarrow{OP}|| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = \sqrt{9} = 3$$

Com as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e C podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OC}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{OC} = C - O = (1,2,3) - (0,0,0) = (1,2,3)$$

$$||\overrightarrow{OC}|| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OC}) = \frac{\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OC}}{||\overrightarrow{OP}|| \times ||\overrightarrow{OC}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OC}) = \frac{(2,2,1).(1,2,3)}{3 \times \sqrt{14}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OC}) =$
$= \frac{2+4+3}{3\sqrt{14}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OC}) = \frac{9}{3\sqrt{14}} \Leftrightarrow P\hat{O}C = \cos^{-1}(\frac{3}{\sqrt{14}}) \Leftrightarrow P\hat{O}C \approx 37^o$

2017, Época especial, grupo II

12. Como o triângulo $[ABC]$ é isósceles $B\hat{A}C = B\hat{C}A = 75^o$.

    Portanto $a\hat{B}C = 180 - 75 - 75 = 30^o$.

    Recorrendo à fórmula do produto escalar:

    $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \cos(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}) \times ||\overrightarrow{BA}|| \times ||\overrightarrow{BC}|| = \cos 30 \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$

Opção(C)

2016, 1ª fase, grupo I

13. O ponto A pertence ao semieixo positivo Ox por isso tem ordenada e cota nulas, substituindo na equação do plano α os valores da ordenada e cota podemos calcular o valor da abcissa do ponto A:

$$3x + 2y + 4z - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; x + 0 + 0 - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 12$$

Logo o ponto A tem coordenadas $(2, 0, 0)$.

O ponto B pertence ao semieixo positivo Oy por isso tem abcissa e cota nulas, substituindo na equação do plano α os valores da abcissa e cota podemos calcular o valor da ordenada do ponto B:

$$3x + 2y + 4z - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 + 2y + 0 - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 6$$

Assim, o ponto B tem coordenadas $(0, 6, 0)$.

Como o ponto P pertence ao eixo Oz então tem abcissa e ordenada nulas, assim as coordenadas do ponto P são:

$$\mathrm{P}(0, 0, z), \quad \text{onde } z \in R\backslash\{0\}$$

As coordenadas do vetor $\overrightarrow{PA}$ são:

$$\overrightarrow{PA} = A - P = (2, 0, 0) - (0, 0, z) = (2, 0, -z)$$

As coordenadas do vetor $\overrightarrow{PB}$ são:

$$\overrightarrow{PB} = B - P = (0, 6, 0) - (0, 0, z) = (0, 6, -z)$$

Calculando o produto escalar dos dois vetores vem que:

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = (2, 0, -z).(0, 6, -z) = 0 + 0 + (-z)^2 = z^2 > 0 \qquad , \forall z \in R\backslash\{0\}$$

Como o produto escalar dos vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ é positivo então o ângulo APB é agudo.

2016, 2ª fase, grupo II

14. De acordo com a figura 7 e sabendo que o ponto P tem cota igual a 1 e pertence à aresta [BG], as suas coordenadas são $(-2, 2, 1)$.

    Como R é o simétrico do ponto P relativamente à origem então tem coordenadas $(2, -2, -1)$.

    Sabendo que A$(0, 2, 0)$ e R$(2, -2, -1)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AR}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AR} = R - A = (2, -2, -1) - (0, 2, 0) = (2, -4, -1)$$

$$||\overrightarrow{AR}|| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$$

    Com as coordenadas dos pontos A e P podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AP}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (-2, 2, 1) - (0, 2, 0) = (-2, 0, 1)$$

$$||\overrightarrow{AP}|| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

    Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

    $\cos(\overrightarrow{AR}\,\hat{}\,\overrightarrow{AP}) = \frac{\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AP}}{||\overrightarrow{AR}|| \times ||\overrightarrow{AP}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AR}\,\hat{}\,\overrightarrow{AP}) = \frac{(2,-4,-1).(-2,0,1)}{\sqrt{21} \times \sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AR}\,\hat{}\,\overrightarrow{AP}) = \frac{-4+0-1}{\sqrt{21 \times 5}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AR}\,\hat{}\,\overrightarrow{AP}) = -\frac{5}{\sqrt{105}} \Leftrightarrow R\hat{A}P = \cos^{-1}(-\frac{5}{\sqrt{105}}) \Leftrightarrow R\hat{A}P \approx 119^o$

    2016, Época especial, grupo II

15. Com as coordenadas dos pontos A e B podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4,0,0) - (0,0,2) = (4,0,-2)$$

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

Sabendo que A$(0,0,2)$ e P$(4,y,0)$ com $y \in \mathbb{R}^+$, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AP}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (4,y,0) - (0,0,2) = (4,y,-2)$$

$$||\overrightarrow{AP}|| = \sqrt{4^2 + y^2 + (-2)^2} = \sqrt{20 + y^2}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{AB} \,\hat{}\, \overrightarrow{AP}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}}{||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AP}||} \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{(4,0,-2).(4,y,-2)}{\sqrt{20} \times \sqrt{20+y^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{16+0+4}{\sqrt{20 \times (20+y^2)}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{20}{\sqrt{400+20y^2}} \Leftrightarrow \sqrt{400+20y^2} = 40 \Leftrightarrow (\sqrt{400+20y^2})^2 = (40)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 400 + 20y^2 = 1600 \Leftrightarrow y^2 = \frac{576-400}{20} \Leftrightarrow y^2 = \frac{1600-400}{20} \Leftrightarrow y^2 = 60 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{60} \Leftrightarrow y = \sqrt{60} \Leftrightarrow y = 2\sqrt{15}, \quad y \in \mathbb{R}^+$

2015, 1ª fase, grupo II

16. Cada lado de um hexágono regular de perímetro 12 é igual a $\frac{12}{nr\ de\ lados} = \frac{12}{6} = 2$.

Logo temos que $||\overrightarrow{BA}|| = ||\overrightarrow{BC}|| = 2$.

Podemos decompor um hexágono regular em seis triângulos equiláteros, sendo que o valor do ângulo interno de um hexágono regular é igual ao dobro da amplitude de um triângulo equilátero, logo temos que:

$$A\hat{B}C = 2 \times 60 = 120^o$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = cos(\overrightarrow{BA} \,\hat{}\, \overrightarrow{BC}) \times ||\overrightarrow{BA}|| \times ||\overrightarrow{BC}|| = \cos(120) \times 2 \times 2 = -\frac{1}{2} \times 4 = -2$

Opção(B)

2015, Época especial, grupo I

17. O ponto B pertence ao eixo Ox logo tem ordenada e cota nula.

Como o ponto B pertence ao plano β, substituindo na equação do plano β os valores da ordenada e cota podemos calcular o valor da abcissa do ponto B:

$$2x - y + z - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x - 0 + 0 - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2$$

Logo o ponto B tem coordenadas $(2, 0, 0)$.

O ponto C é simétrico do ponto B relativamente ao plano yOz, ou seja, as coordenadas do ponto C são $(-2, 0, 0)$.

Com as coordenadas dos pontos A e B podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 0, 0) - (1, 2, 3) = (1, -2, -3)$$

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

Sabendo que A$(1, 2, 3)$ e C$(-2, 0, 0)$, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2, 0, 0) - (1, 2, 3) = (-3, -2, -3)$$

$$||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}}{||\overrightarrow{AB}||\times||\overrightarrow{AC}||} \;\Leftrightarrow\; \cos(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}) = \frac{(1,-2,-3).(-3,-2,-3)}{\sqrt{14}\times\sqrt{22}} \;\Leftrightarrow\; \cos(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}) =$
$= \frac{-3+4+9}{\sqrt{14\times(22)}} \;\Leftrightarrow\; \cos(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}) = \frac{10}{\sqrt{308}} \;\Leftrightarrow\; B\hat{A}C = \cos^{-1}(\frac{10}{\sqrt{308}}) \;\Leftrightarrow\; B\hat{A}C \approx 55^o$

2015, Época especial, grupo II