Resolução - Probabilidades

1. Consideremos os acontecimentos:

   V: Ser violinista

   E: Ser estrangeiro

   - Como $\frac{3}{5}$ dos candidatos eram violinistas vem que:

     $P(V) = \frac{3}{5}$

   - O número de candidatos estrangeiros era igual ao número de candidatos portugueses o que equivale a:

     $P(E) = P(\overline{E}) = \frac{1}{2}$

   - Sabemos também que $\frac{3}{10}$ dos candidatos estrangeiros eram flautistas:

     $P(\overline{V} \mid E) = \frac{3}{10}$

   Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

   $P(\overline{V}|E) = \frac{P(\overline{V} \cap E)}{P(E)} \Leftrightarrow \frac{3}{10} = \frac{P(\overline{V} \cap E)}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow P(\overline{V} \cap E) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(\overline{V} \cap E) = \frac{3}{20}$

	V	$\overline{V}$	
E	$P(E \cap V)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{2}$
$\overline{E}$	$P(\overline{E} \cap V)$	$P(\overline{V} \cap \overline{E})$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{3}{5}$	$P(\overline{V})$	1

De acordo com a tabela acima, temos que:

$P(E \cap V) = P(E) - P(E \cap \overline{V}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$

$P(\overline{E} \cap V) = P(V) - P(E \cap V) = \frac{3}{5} - \frac{7}{20} = \frac{1}{4}$

A probabilidade de esse candidato ser português, sabendo-se que é violinista é igual a:

$$P(\overline{E} \mid V) = \frac{P(\overline{E} \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{12}$$

2024, 1ª fase

2. O número de casos possíveis corresponde a todas as possibilidades de selecionar, ao acaso, dois vértices de cada uma das bases do prisma, ou seja, a ${}^4C_2 \times {}^4C_2$.

   Como o prisma tem 4 faces laterias então só existem quatro hipóteses de escolher os 4 vértices e estes pertencerem a uma mesma face lateral do prisma. Logo o número de casos favoráveis é igual a ${}^4C_2 \times {}^4C_2 - 4$.

Usando a regra de Laplace, a probabilidade de os quatro vértices selecionados não pertencerem a uma mesma face lateral do prisma é igual a:

$$\frac{{}^4C_2 \times {}^4C_2 - 4}{{}^4C_2 \times {}^4C_2} = \frac{8}{9}$$

2024, 1ª fase

3. Num lançamento, a probabilidade de se obter, na face voltada para cima, um múltiplo de 3 é igual a $\frac{2}{6}$.

   Sabe-se também que, num lançamento, a probabilidade de se obter, na face voltada para cima, um número que não é múltiplo de 3 é igual a $1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$.

   A probabilidade de, em exatamente dois desses lançamentos, se obter, na face voltada para cima, um múltiplo de 3 é igual a:

$$\frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times 3 = \frac{2}{9}$$

   Opção(D)

2024, 2ª fase

4. Aplicando as leis de Morgan vem que:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 9P(A \cap B)$$

   Aplicando a fórmula do teorema da probabilidade:

$$1 - P(A \cup B) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

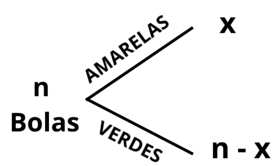
$$\Leftrightarrow 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)] = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow P(\overline{A}) - P(B) = 8P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3P(B) - P(B) = 8P(A \cap B) \Leftrightarrow 2P(B) = 8P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{8} \Leftrightarrow P(A|B) = \frac{1}{4}$$

2024, 2ª fase

5.

5.1. Consideremos um saco que contém apenas bolas amarelas e bolas verdes.



$P(A \cap B) = \frac{2}{3}P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{n-1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x - 3 = 2n - 2 \Leftrightarrow x = \frac{2n+1}{3}$

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ o valor de x, que corresponde ao número de bolas amarelas que existia inicialmente no saco, é sempre igual a um número ímpar.

5.2. Das duzentas bolas sabe-se que 49% são verdes, ou seja, 98 bolas são verdes e 102 são amarelas.

O número de casos possíveis corresponde a todas as possibilidades de selecionar, ao acaso, quatro das duzentas bolas que estão no saco, ou seja, ${}^{200}C_4$.

Temos de considerar o número de possibilidades de selecionar três bolas verdes e uma bola amarela ou selecionar quatro bolas verdes num total de duzentas bolas. Logo o número de casos favoráveis é igual a ${}^{98}C_3 \times {}^{102}C_1 + {}^{98}C_4$.

Usando a regra de Laplace, a probabilidade de o conjunto formado por essas quatro bolas conter, pelo menos, três bolas verdes é igual a:

$$\frac{{}^{98}C_3 \times {}^{102}C_1 + {}^{98}C_4}{{}^{200}C_4} \approx 0,3$$

2024, Época especial

6.

6.1. Consideremos os acontecimentos:

S: Praticar surf
K: Praticar skate

Como 65% praticavam surf vem que:
$P(S) = 0,65$

Sabemos também que 20% praticavam skate e não praticavam surf :
$P(K \cap \overline{S}) = 0,2$

Quatro em cada cinco dos que praticavam surf também praticavam skate o que equivale a:
$P(K|S) = \frac{4}{5}$

	S	$\overline{S}$	
K	$P(K \cap S)$	0,2	
$\overline{K}$	$P(\overline{K} \cap S)$	$P(\overline{K} \cap \overline{S})$	
	0,65	0,35	1

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$P(K|S) = \frac{P(K \cap S)}{P(S)} \Leftrightarrow \frac{4}{5} = \frac{P(K \cap S)}{0{,}65} \Leftrightarrow P(K \cap S) = 0,52$

De acordo com a tabela acima, temos que:

$P(\overline{K} \cap S) = P(S) - P(K \cap S) = 0,65 - 0,52 = 0,13$

A probabilidade de esse jovem, no questionário, também ter respondido que praticava surf é igual a :

$$P(S|\overline{K}) = \frac{P(\overline{K} \cap S)}{P(\overline{K})} = \frac{0{,}13}{0{,}28} = \frac{13}{28}$$

6.2. Seja x o número de jovens com 14 anos, ou seja, $70 - x$ é o número de jovens com 13 anos.

$P($"selecionar dois jovens com idades distintas"$)= \frac{{}^{x}C_1 \times {}^{70-x}C_1}{{}^{70}C_2} \Leftrightarrow \frac{16}{35} = \frac{x(70-x)}{2415} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x^2 + 70x = \frac{2415 \times 16}{35} \Leftrightarrow -x^2 + 70x - 1104 = 0 \Leftrightarrow x = 24 \vee x = 46$

Como o número de jovens com 14 anos é maior do que o número de jovens com 13 anos então $x = 46$.

O número de jovens com 13 anos que há no grupo é igual a $70 - 46 = 24$.

2023, 1ª fase

7. A e B são acontecimentos equiprováveis por isso $P(A) = P(B)$.

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,6 = 0,4 = P(B)$

$P(A \cup \overline{B}) = 1 - P(B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,7 = 1 - 0,4 + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,1$

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$P((A \cup \overline{B})|B) = \frac{P((A \cup \overline{B}) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup (\overline{B} \cap B))}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$

2023, 2ª fase

8. Ao todo existem $6n + 1$ pontos no conjunto formado pelo ponto V e pelos vértices de todos os hexágonos da composição.

nº de casos favoráveis $= {}^6C_2 \times n$

nº de casos possíveis $= {}^{6n+1}C_2$

Selecionando, ao acaso, dois pontos desse conjunto, a probabilidade de estes serem vértices do mesmo hexágono é igual a:

P("Os dois pontos selecionados são vértices do mesmo hexágono")= $\frac{^6C_2 \times n}{^{6n+1}C_2}$ $(*_1)$

Aplicando a fórmula de cálculo das combinações vem que:

$^{6n+1}C_2 = \frac{(6n+1)!}{2!(6n+1-2)!} = \frac{(6n+1)!}{2(6n-1)!} = \frac{(6n+1)(6n)(6n-1)!}{2(6n-1)!} = \frac{6n(6n+1)}{2} = \frac{36n^2+6n}{2} = 18n^2 + 3n$

$(*_1) = \frac{15n}{18n^2+3n}$

Sabendo que esta probabilidade é igual a $\frac{5}{49}$ conseguimos calcular n através da equação:

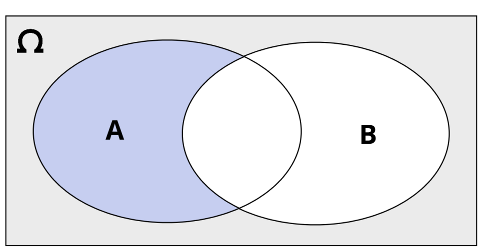
$\frac{15n}{18n^2+3n} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow 49 \times 15n = 5(18n^2 + 3n) \Leftrightarrow 735n = 90n^2 + 15n \Leftrightarrow 90n^2 - 720n = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n(90n - 720) = 0 \Leftrightarrow n = 0 \;\vee\; 90n - 720 = 0 \Leftrightarrow n = 0 \;\vee\; n = 8$

Como $n > 3$, concluímos que $n = 8$, isto é, esta composição geométrica é formada por 8 hexágonos.

2023, 2ª fase

9. Através do diagrama de Venn sabemos que:



$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,5 = P(A) - P(A \cap B)$$

Aplicando a fórmula do teorema da probabilidade:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,8 = 0,5 + P(B) \Leftrightarrow P(B) = 0,3$$

Opção(B)

2023, Época especial

10. 10.1. Para calcularmos o número de casos favoráveis vamos assumir que uma das linhas já está preenchida com 3 bombons de amêndoa, temos 3 possibilidades para isto acontecer visto que existem 3 linhas nesta caixa de bombons.

Depois de preenchida uma das linhas da caixa restam-nos 6 bombons (1 de amêndoa, 2 de avelã e 3 de noz) para colocar nos restantes 6 compartimentos da caixa.

Temos 6 hipóteses para colocar os 2 bombons de avelã (${}^6C_2$), em seguida ficamos com 4 hipóteses para colocar os 3 bombons de noz (${}^4C_3$) e resta-nos um compartimento para colocarmos o último bombon de amendoa (${}^1C_1$).

nº de casos favoráveis $= 3 \times {}^6C_2 \times {}^4C_3 \times {}^1C_1 = 180$

Temos 9 compartimentos para colocar os 4 bombons de amêndoa (${}^9C_4$), em seguida ficamos com 5 compartimentos para colocar os 2 bombons de avelã (${}^5C_2$) e resta-nos 3 compartimento para colocarmos os últimos 3 bombons de noz (${}^3C_3$).

nº de casos possíveis = ${}^9C_4 \times {}^5C_2 \times {}^3C_3 = 1260$

A probabilidade de uma das três linhas ficar preenchida com três bombons de amêndoa é igual a:

$$\text{P}= \frac{180}{1260} = \frac{1}{7}$$

10.2. Consideremos os acontecimentos:

A: «o primeiro bombom tem recheio de frutos secos»

B: «o segundo bombom tem recheio de frutos secos»

C: «o terceiro bombom tem recheio de caramelo»

No contexto da situação descrita, $P(C|A \cap \overline{B})$ é a probabilidade do terceiro bombom selecionado ter recheio de caramelo sabendo que já se selecionaram previamente dois bombons, sendo o primeiro com recheio de frutos secos e o segundo com recheio de caramelo.

O número de casos possíveis é igual ao número de bombons que sobram depois de retirados os dois primeiros bombons (sem reposição), portanto 31-2=29.

O número de casos favoráveis é igual ao número de bombons com recheio de caramelo sabendo que foram selecionados dois bombons, um de frutos secos e um com recheio de caramelo, ou seja, o número de bombons com recheio de caramelo é igual a 22-1=21.

Assim vem que:

$$P(C|A \cap \overline{B}) = \frac{21}{29}$$

2023, Época especial

11. Como $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$

Recorrendo à fórmula da probabilidade total:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,6 = P(A) + 1 - 0,6 - 0 \Leftrightarrow P(A) = 0,2$

Sabemos que $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \Leftrightarrow P(\overline{A}) = 0,8$

Opção(D)

2022, 1ª fase

12. Consideremos os acontecimentos:

S: Jogar Semáforo

R: Jogar Rastros

Como metade dos alunos jogou Semáforo vem que:

$P(S) = \frac{1}{2}$

Sabemos também que um quarto dos alunos não jogou Rastros:

$P(\overline{R}) = \frac{1}{4}$

Um quinto dos alunos que não jogaram Rastros jogou Semáforo o que equivale a:

$P(S|\overline{R}) = \frac{1}{5}$

	S	$\overline{S}$	
R	$P(R \cap S)$	$P(R \cap \overline{S})$	$P(R)$
$\overline{R}$	$P(\overline{R} \cap S)$	$P(\overline{R} \cap \overline{S})$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$P(S|\overline{R}) = \frac{P(\overline{R} \cap S)}{P(\overline{R})} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{P(\overline{R} \cap S)}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow P(\overline{R} \cap S) = \frac{1}{20}$

De acordo com a tabela acima, temos que:

$P(\overline{R} \cap \overline{S}) = P(\overline{R}) - P(\overline{R} \cap S) = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

A probabilidade de um aluno que participou no torneio, escolhido ao acaso, não ter jogado Semáforo e ter jogado Rastros é igual a:

$$P(R \cap \overline{S}) = P(\overline{S}) - P(\overline{R} \cap \overline{S}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

2022, 1ª fase

13. Consideremos os acontecimentos:

V: O passageiro já viajou de avião

F: O passageiro jé esteve em Faro

Como 70% nunca tinham viajado de avião vem que:

$P(\overline{V}) = \frac{1}{2}$

Sabemos também que $\frac{2}{5}$ dos passageiros já tinham estado em Faro:

$P(F) = \frac{2}{5} = 0,4$

Metade dos que já tinham estado em Faro já tinha viajado de avião o que equivale a:

$P(V|F) = 0,5$

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$P(V|F) = \frac{P(V \cap F)}{P(F)} \Leftrightarrow 0,5 = \frac{P(V \cap F)}{0,4} \Leftrightarrow P(V \cap F) = 0,2$

	V	$\overline{V}$	
F	0,2		0,4
$\overline{F}$		?	0,6
	0,3	0,7	1

$P(F \cap \overline{V}) = 0,4 - 0,2 = 0,2$

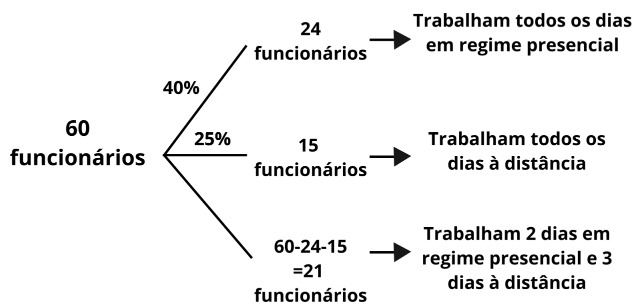
$P(\overline{V} \cap \overline{F}) = 0,7 - 0,2 = 0,5$

Sabendo que o primeiro passageiro a sair do avião nunca tinha estado em Faro, a probabilidade de esta ter sido a primeira viagem de avião deste passageiro é igual a:

$$P(\overline{V}|\overline{F}) = \frac{P(\overline{V} \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{0,5}{0,6} = \frac{5}{6}$$

2022, 2ª fase

14. A situação descrita no enunciado pode ser representada através do seguinte esquema:



A probabilidade de serem selecionados, no máximo, três funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana é igual ao contrário da probabilidade de selecionar quatro funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana.

Assim sendo o número de casos favoráveis é igual ao contrário de selecionar quatro funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana. Temos ao todo 24+21=45 funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana, assim o número de casos favoráveis é igual a ${}^{60}C_4 - {}^{45}C_4$.

O número de casos possíveis é igual ao número de grupos que é possível formar ao selecionar quatro funcionários, ao acaso, dos sessenta funcionários, isto é, ${}^{60}C_4$.

Usando a Regra de Laplace que dita que a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, a probabilidade de serem selecionados, no máximo, três funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana é:

$$\frac{nr\ \ de\ \ casos\ \ favoráveis}{nr\ \ de\ \ casos\ \ \ possíveis} = \frac{{}^{60}C_4 - {}^{45}C_4}{{}^{60}C_4}$$

2022, Época especial

15. $P(B) + P(A) \times \big(1 - P(B|A)\big) = P(B) + P(A) \times \Big(1 - \frac{P(B \cap A)}{P(A)}\Big)_{(*_1)} =$

$= P(B) + P(A) \times \Big(1 - \frac{P(B) \times P(A)}{P(A)}\Big)_{(*_2)} = P(B) + P(A) \times \big(1 - P(B)\big) =$

$= P(B) + P(A) - P(A) \times P(B) = P(B)\big(1 - P(A)\big) + P(A) = P(B) \times P(\overline{A})_{(*_3)} + P(A) =$

$= P(A) + P(B) \times P(\overline{A})$

$(*_1)$ $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ Definição de probabilidade condicionada

$(*_2)$ $P(B \cap A) = P(B) \times P(A)$ porque A e B são acontecimentos independentes

$(*_2)$ $1 - P(A) = P(\overline{A})$ porque A e $\overline{A}$ são acontecimentos contrários

2022, Época especial

16. Consideremos os acontecimentos:

R: Ser rapariga

E: Ser estrangeiro

Como 60% dos alunos são raparigas vem que:

$P(R) = 0,6$

$P(\overline{R}) = 0,4$

Sabemos também que 15% dos alunos são rapazes estrangeiros:

$P(\overline{R} \cap E) = 0,15$

De acordo com a tabela acima, temos que:

	$\overline{R}$	R
$\overline{E}$		
E	$0,15$	
	$0,4$	$0,6$

$P(\overline{E} \cap \overline{R}) = 0,4 - 0,15 = 0,25$

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$P(\overline{E}|\overline{R}) = \frac{P(\overline{E} \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{0,25}{0,4} = 0,625 = 62,5\%$

Opção(D)

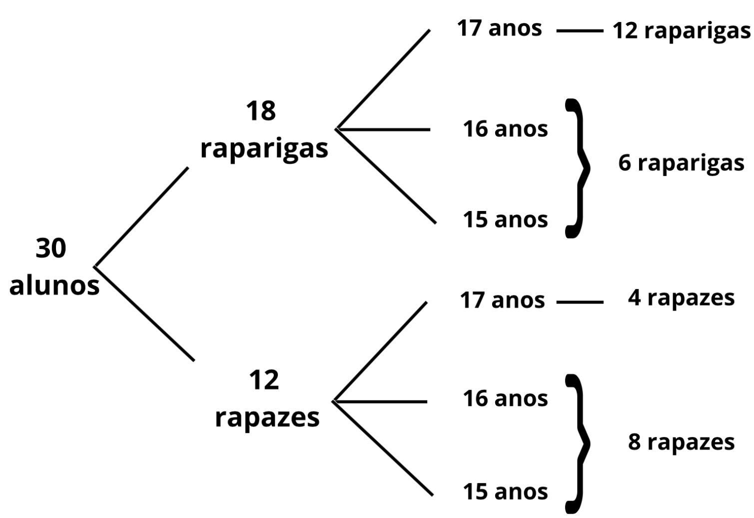
2021, 1ª fase

17. Como 60% dos 30 alunos são raparigas, então existem na turma $0,6 \times 30 = 18$ raparigas e $30 - 18 = 12$ rapazes.

Dos 12 rapazes, um terço tem 17 anos, o que corresponde a $\frac{1}{3} \times 12 = 4$ rapazes. Assim temos $12 - 4 = 8$ rapazes com 16 ou 15 anos.

Um terço das raparigas tem 15 ou 16 anos, ou seja, $\frac{1}{3} \times 18 = 6$ raparigas. O que significa que temos $18 - 6 = 12$ raparigas com 17 anos.

O esquema em árvore ajuda a compreender:



O número de casos possíveis é igual ao número total de maneiras de escolher cinco alunos da turma composta por 30 alunos: ${}^{30}C_5 = 142506$.

Considerando que o André e a Beatriz já foram escolhidos e que ambos têm 16 anos, então ficamos com 7 rapazes com 16 ou 15 anos e 5 raparigas com 16 ou 15 anos.

Dos 16 alunos com 17 anos vamos escolher dois e dos 12 alunos com 16 ou 15 anos vamos escolher um, ou seja, o número de casos favoráreis é igual a ${}^{16}C_2 \times {}^{12}C_1 = 1440$.

A probabilidade de o grupo constituído por cinco alunos ser formado pelo André, pela Beatriz, por dois jovens com 17 anos e por outro com 15 ou 16 anos, arrendondado às centésimas, é igual a:

$$\tfrac{1440}{142506} \approx 0,01$$

2021, 1ª fase

18. Consideremos os acontecimentos:

M: O sócio é mulher

B: O sócio pratica badmínton

$P(M)$ é a probabilidade do sócio, selecionado ao acaso, ser mulher que é igual a 0,65.

$P(B|\overline{M})$ é a probabilidade do sócio praticar badmínton sabendo que é homem que é igual a $\frac{1}{7}$.

$P(M|B)$ é a probabilidade do sócio ser mulher sabendo que pratica badmínton que é igual a $\frac{5}{6}$.

Queremos determinar $P(M \cap \overline{B})$ que é probabilidade de o sócio escolhido ser uma mulher que praica ténis.

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$P(B|\overline{M}) = \frac{P(B \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} \Leftrightarrow \frac{1}{7} = \frac{P(B \cap \overline{M})}{0{,}35} \Leftrightarrow P(B \cap \overline{M}) = 0,05$

	B	$\overline{B}$	
M			$0,65$
$\overline{M}$	$0,05$	$0,3$	$0,35$
			1

De acordo com a tabela acima, temos que:

$P(B) = P(M \cap B) + P(\overline{M} \cap B)$

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$P(M|B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \frac{P(M \cap B)}{P(M \cap B)+P(\overline{M} \cap B)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6P(M \cap B) = 5P(M \cap B) + 5P(\overline{M} \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(M \cap B) = 5P(\overline{M} \cap B) \Leftrightarrow P(M \cap B) = 5 \times 0,05 \Leftrightarrow P(M \cap B) = 0,25$

A probabilidade de o sócio escolhido ser uma mulher que pratica ténis é igual a:

$$P(M \cap \overline{B}) = 0,65 - 0,25 = 0,40 = 40\%$$

2021, 2ª fase

19. Existem ao todo $11 \times 11 = 121$ pontos que pertencem a esta região e cujas coordenadas são números inteiros.

Substituindo, na equação da reta, o x (abcissa) por $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ podemos determinar quais deste 121 pontos pertencem à reta $y = x + 7$:

Se $x = 0$, $y = 7$
O ponto $(0, 7)$ pertence à reta

Se $x = 1$, $y = 8$
O ponto $(1, 8)$ pertence à reta

Se $x = 2$, $y = 9$
O ponto $(2, 9)$ pertence à reta

Se $x = 3$, $y = 10$
O ponto $(3, 10)$ pertence à reta

Se $x = 4$, $y = 11$
O ponto $(4, 11)$ não pertence à reta

Concluímos que nesta região só existem 4 pontos pertencentes à reta de equação $y = x + 7$.

A probabilidade do ponto pertencer à reta de equação $y = x + 7$ é igual a:

$$\frac{4}{121} \approx 0,033$$

Opção(B)

2021, Época especial

20. Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{P(A)}{2}$

Aplicando as leis de morgan e sabendo que $P(B) = \frac{3P(A)}{2}$:

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$

$= 1 - \left[P(A) + \frac{3P(A)}{2} - \frac{P(A)}{2}\right] = 1 - [P(A) + P(A)] = 1 - 2P(A)$

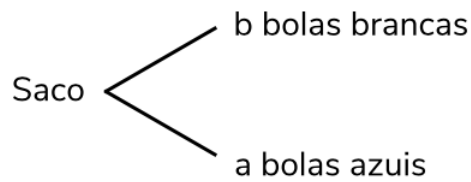
Assim vem que:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) + 2P(A) = 1 - 2P(A) + 2P(A) = 1$$

2021, Época especial

21.

21.1. Inicialmente existiam a bolas azuis e b bolas brancas no saco, ou seja, no total haviam $a + b$ bolas no saco.



Consideremos os acontecimentos:

A: A primeira bola retirada é azul
B: A segunda bola retirada é branca

$P(B|A)$ é a probabilidade da segunda bola retirada do saco ser branca sabendo que a primeira bola retirada é azul.

O número de casos possíveis é igual ao número de bolas que ficaram no saco após o acontecimento A. Como foi retirada uma bola azul sem reposição ficámos com $a - 1 + b$ bolas no saco.

O número de casos favoráveis é igual ao número de bolas brancas que estão no saco sabendo que a primeira bola retirada é azul, ou seja, é igual a b.

Assim temos que:

$$P(B|A) = \frac{b}{a-1+b}$$

Por outro lado, também conseguimos determinar $P(B|A)$ usando a fórmula da probabilidade condicionada:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}P(A)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

Ficamos com a igualdade:

$$\frac{b}{a-1+b} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3b = a - 1 + b \Leftrightarrow 2b = a - 1 \Leftrightarrow a = 2b + 1$$

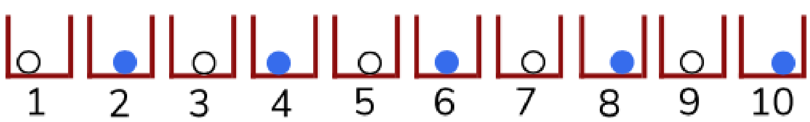
$\forall b \in \mathbb{N}, \quad 2b$ é um número par.

$\forall b \in \mathbb{N}, \quad 2b + 1$ é um número ímpar.

Logo inicialmente existia um número ímpar de bolas azuis no saco.

21.2. O saco agora tem 8 bolas azuis e sete bolas brancas.

Começamos por colocar uma bola branca em cada caixa com o número ímpar e uma bola azul em cada caixa com número par.



O saco fica com três bolas azuis e duas bolas brancas.

Como cada caixa só pode ter, no máximo, duas bolas vamos distribuir as três bolas azuis pelas dez caixas disponíveis e depois as duas bolas brancas pelas restantes sete caixas :

$$^{10}C_3 \times {^7C_2} = 120 \times 21 = 2520$$

Opção(B)

2020, 1ª fase

22. Para que o plano definido pelos três vértices escolhidos contenha uma das faces do cubo, esses três vértices têm de pertencer à mesma face.

    O cubo tem seis faces com quatro vértices cada uma, sendo que o número de conjuntos de três vértices que podem ser escolhidos em cada face corresponde a $6 \times {}^4C_3$ (número de casos favoráveis).

    O número de hipóteses posssíveis na escolha de três dos oito vértices do cubo é igual a ${}^8C_3$.

    A probabilidade de os três vértices escolhidos definir um plano que contem uma das faces do cubo é igual a:

$$\frac{6\times{}^4C_3}{{}^8C_3} = \frac{6\times 4}{56} = \frac{3}{7}$$

Opção(B)

2020, 2ª fase

23. Vamos começar por aplicar as leis de morgan:

    $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

Assim temos que:

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) \;\Leftrightarrow\; 0,9 = 1 - P(A \cap B) \;\Leftrightarrow\; P(A \cap B) = 0,1$$

Logo vem que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,4 - 0,1 = 0,6$$

Usando a fórmula da probabilidade condicionada temos:

$$P(A|(A \cup B)) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2020, 2ª fase

24.

24.1. Consideremos os acontecimentos:

E: O hóspede participa na caminhada na serra da Estrela

Z: O hóspede participa na descida do rio Zêzere

$P(E)$ é a probabilidade do hóspede, selecionado ao acaso, participar na caminhada na serra da Estrela que é igual a 0,8.

$P(Z)$ é a probabilidade do hóspede, selecionado ao acaso, participar na descida do rio Zêzere que é igual a 0,5.

$P(\overline{E}|Z)$ é a probabilidade do hóspede, selecionado ao acaso, não ter participado na caminhada na serra da Estrela sabendo que participou na descida do rio Zêzere que é igual a 0,3.

Queremos determinar $P(E \cap \overline{Z})$ que é probabilidade de esse hóspede ter participado na caminhada na serra da Estrela e não ter participado na descida do rio Zêzere.

	Z	$\overline{Z}$	
E	$P(E \cap Z)$	?	0,8
$\overline{E}$	$P(\overline{E} \cap Z)$		
	0,5		

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$$P(\overline{E}|Z) = \frac{P(\overline{E} \cap Z)}{P(Z)} \Leftrightarrow 0.3 = \frac{P(\overline{E} \cap Z)}{0.5} \Leftrightarrow P(\overline{E} \cap Z) = 0,3 \times 0.5 \Leftrightarrow P(\overline{E} \cap Z) = 0.15$$

De acordo com a tabela acima, temos que:

$$P(E \cap Z) = 0,5 - 0,15 = 0,35$$

Logo vem que:

$$P(E \cap \overline{Z}) = 0,8 - 0,35 = 0,45$$

A probabilidade do hóspede, selecionado ao acaso, ter participado na caminhada na serra da Estrela e não ter participado na descida do rio Zêzere é igual a 45%.

24.2. Considerando que apenas os hóspedes dinamarqueses podem conduzir as 4 motos, o número de possibilidades de os distribuir pelas quatro motas (a ordem interessa porque as motas têm diferentes cores) é igual a $4! = 24$

Agora falta distribuir os restantes 3 hóspedes suecos pelos lugares que sobram, ou seja, 1 lugar em cada mota. Por isso, o número de possibilidades de distribuir os 3 hóspedes suecos pelos quatro lugares que sobram (a ordem interessa porque as motas têm diferentes cores) é igual a ${}^4A_3 = 24$.

O número total de maneiras distintas de distribuir os sete hóspedes pelas quatro motos sabendo que apenas os hóspedes dinamarqueses podem conduzir é igual a $24 \times 24 = 576$.

Opção(D)

2020, Época especial

25.

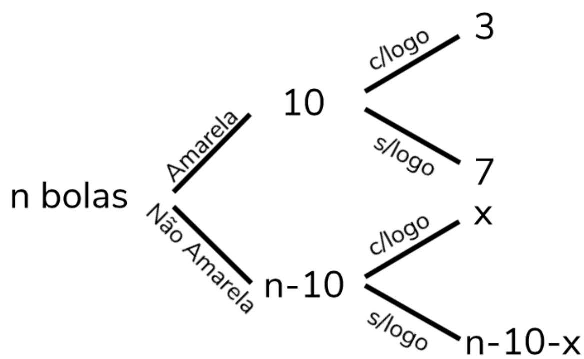
25.1. Consideremos os acontecimentos:

A: "A bola retirada não é amarela"

B: "A bola retirada não tem logotipo desenhado"

Sabendo que a probabilidade de a bola retirada não ser amarela ou de não ter um logotipo desenhado é igual a $\frac{15}{16}$, vem que:

$$P(A \cup B) = \frac{15}{16}$$



Pela observação da árvore acima temos que:

$P(A) = \frac{n-10}{n}$

$P(B) = \frac{7+n-10-x}{n}$

$P(A \cap B) = \frac{n-10-x}{n}$

Logo, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{15}{16} = \frac{n-10}{n} + \frac{7+n-10-x}{n} - \frac{n-10-x}{n} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{15}{16} = \frac{n-10+7+n-10-x-n+10+x}{n} \Leftrightarrow \frac{15}{16} = \frac{n-3}{n} \Leftrightarrow 15n = 16n - 48 \Leftrightarrow n = 48$$

A caixa contém 48 bolas.

25.2. Existem 8 possibilidades para dispor as 10 bolas amarelas, de modo que as bolas com o logotipo desenhado fiquem juntas:

$$\underline{L}\ \underline{L}\ \underline{L}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$
$$\_\ \underline{L}\ \underline{L}\ \underline{L}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$
$$\_\ \_\ \underline{L}\ \underline{L}\ \underline{L}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$
$$\_\ \_\ \_\ \underline{L}\ \underline{L}\ \underline{L}\ \_\ \_\ \_\ \_$$

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \underline{L}\ \underline{L}\ \underline{L}\ \_\ \_\ \_$$

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \underline{L}\ \underline{L}\ \underline{L}\ \_\ \_$$

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \underline{L}\ \underline{L}\ \underline{L}\ \_$$

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \underline{L}\ \underline{L}\ \underline{L}$$

Tendo em conta que as bolas amarelas com o logotipo desenhado são iguais entre si e que , da mesma forma, as bolas amarelas sem o logotipo desenhado são iguais entre si então sabemos que, ao dispor as 10 bolas amarelas numa linha reta, a ordem pela qual vamos dispor as bolas com logotipo bem como a ordem pela qual vamos dispor as bolas sem logotipo não interessa.

Por isso, o número de hipóteses posssíveis para dispor as 10 bolas amarelas é igual a ${}^{10}C_3 \times {}^{7}C_7 = {}^{10}C_3$.

Assim, a probabilidade de as três bolas com o logotipo desenhado ficarem juntas é igual a $\frac{8}{{}^{10}C_3} = \frac{1}{15}$.

Opção(B)

2019, 1ª fase, caderno 1

26. Consideremos os acontecimentos:

R: O aluno é rapaz

B: O aluno frequenta o 10º ano

Sabe-se que:

$\frac{3}{5}$ dos alunos que frequentam o 10º ano são rapazes, logo vem que:

$$P(R|B) = \frac{3}{5}$$

$\frac{11}{21}$ dos alunos da escola são rapazes, o que corresponde à equação:

$$P(R) = \frac{11}{21}$$

$\frac{1}{7}$ dos alunos da escola são rapazes e frequentam o 10º ano, por isso temos que:

$$P(R \cap B) = \frac{1}{7}$$

Usando a fórmula da probabilidade condicionada temos:

$$P(R|B) = \frac{P(R\cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(B) = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{21}$$

Logo, temos que:

$$P(R \cup B) = P(R) + P(B) - P(R \cap B) = \frac{11}{21} + \frac{5}{21} - \frac{1}{7} = \frac{16}{21} - \frac{3}{21} = \frac{13}{21}$$

Aplicando as leis de morgan:

$$P(\overline{R} \cap \overline{B}) = P(\overline{R \cup B}) = 1 - P(R \cup B) = 1 - \frac{13}{21} = \frac{8}{21} \approx 0,38$$

2019, 2ª fase, caderno 1

27. O número de casos possíveis é igual ao número de combinações da seleção de 4 dos 9 cartões do saco, ou seja, ${}^9C_4 = 126$.

Vamos considerar que as cartas com os números 3 e 8 já estão escolhidas, ou seja, só nos falta selecionar mais duas cartas do saco. Para o menor dos números saídos ser 3 e o maior ser 8, então quer dizer que já só podemos escolher as duas cartas que nos faltam das cartas com os números 4 a 7 (4 cartas). Portanto o número de casos favoráveis é igual a ${}^4C_2 = 6$.

Usando a regra de Laplace:

P("Menor dos números saídos ser 3 e o maior ser 8")$= \frac{6}{126} = \frac{1}{21}$

Opção(B)

2019, Época especial, caderno 1

28. Consideremos os acontecimentos:

R: O aluno é rapariga

Q: O aluno está matriculado na disciplina de Química

Como o número de raparigas é o dobro do número de alunos matriculados na disciplina de Química, vem que:

$$P(R) = 2P(Q)$$

Um terço dos alunos matriculados na disciplina de Química são raparigas, corresponde à equação:

$$P(R|Q) = \frac{1}{3}$$

Metade dos rapazes não estão matriculados na disciplina de Química, equivale à equação:

$$P(\overline{Q}|\overline{R}) = \frac{1}{2}$$

Sabemos que, $P(Q) = P(R \cap Q) + P(\overline{R} \cap Q)$

Usando a fórmula da probabilidade condicionada temos:

$$P(R|Q) = \frac{P(R\cap Q)}{P(Q)} \Leftrightarrow \frac{P(R\cap Q)}{P(Q)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(R \cap Q) = \frac{P(Q)}{3}$$

Da mesma forma temos:

$$P(\overline{R}|Q) = \frac{P(\overline{R}\cap Q)}{P(Q)}$$

Agora temos de relacionar $P(\overline{R} \cap Q)$ com a $P(\overline{R} \cap \overline{Q})$ de forma a conseguirmos usar a equação $P(\overline{Q}|\overline{R}) = \frac{1}{2}$:

$$P(\overline{Q}|\overline{R}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{Q}\cap\overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(\overline{Q} \cap \overline{R}) = \frac{P(\overline{R})}{2} \Leftrightarrow P(\overline{Q} \cap \overline{R}) = \frac{1-2P(Q)}{2}$$

Observando a tabela abaixo é mais fácil perceber:

	R	$\overline{R}$	
Q	$\frac{P(Q)}{3}$	$P(\overline{R} \cap Q)$	$P(Q)$
$\overline{Q}$		$\frac{1-2P(Q)}{2}$	$P(\overline{Q})$
	$P(R) = 2P(Q)$	$P(\overline{R}) = 1 - 2P(Q)$	1

$$P(\overline{R} \cap Q) = P(\overline{R}) - P(\overline{R} \cap \overline{Q}) = 1 - 2P(Q) - \left(\frac{1-2P(Q)}{2}\right) = \frac{1}{2} - P(Q)$$

Assim conseguimos determinar $P(Q)$:

$$P(Q) = P(R \cap Q) + P(\overline{R} \cap Q) \Leftrightarrow P(Q) = \tfrac{P(Q)}{3} + \tfrac{1}{2} - P(Q) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6P(Q) = 2P(Q) + 3 - 6P(Q) \Leftrightarrow 10P(Q) = 3 \Leftrightarrow P(Q) = \tfrac{3}{10}$$

2019, Época especial, caderno 1

29. Recorrendo às Leis de Morgan temos que:

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = \tfrac{8}{9}$$

Como $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$, então $P(A \cap B) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

A e B são acontecimentos equiprováveis e independentes logo temos que:

$P(A) = P(B)$ e $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{9} = [P(A)]^2 \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3} \vee P(A) = -\frac{1}{3}$

Como qualquer probabilidade está sempre entre 0 e 1, $P(A) = \frac{1}{3}$.

Opção(C)

2019, Época especial, caderno 2

30. Consideremos os acontecimentos:

E: O aluno estuda espanhol

I: O aluno estuda inglês

Como o número de alunos que estudam Espanhol é igual ao número de alunos que estudam Inglês, vem que:

$$P(E) = P(I) = 0,5$$

O número de alunos que estudam, pelo menos, uma das duas línguas é o quádruplo do número de alunos que estudam as duas línguas corresponde à equação:

$$P(E \cup I) = 4 \times P(E \cap I) = 4P(E \cap I)$$

Logo, temos que:

$P(E \cup I) = P(E) + P(I) - P(E \cap I) \;\Leftrightarrow\; 4P(E \cap I) = 0,5 + 0,5 - P(E \cap I) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; 5P(E \cap I) = 1 \;\Leftrightarrow\; P(E \cap I) = \frac{1}{5} \;\Leftrightarrow\; P(E \cap I) = 0,2$

Usando a fórmula da probabilidade condicionada temos:

$$P(I|E) = \frac{P(I \cap E)}{P(E)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4 = 40\%$$

2018, 1ª fase, caderno 1

31. Seja X a variável aleatória «produto dos números saídos»

Construindo uma tabela de dupla entrada:
Assim temos que:

$P(X = 0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$

	0	1	2	3
0	-	0	0	0
1	-	-	2	3
2	-	-	-	6
3	-	-	-	-

Opção(D)

2018, 1ª fase, caderno 2

32. Consideremos os acontecimentos:

A: O atleta pratica basquetebol

B: O atleta pratica futebol

Sabemos que:

$P(A) = \frac{1}{5}$ $\quad P(B) = \frac{2}{5}$ $\quad P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{3}{4}$

Usando a fórmula da probabilidade condicionada vem que:

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{1-\frac{2}{5}} \Leftrightarrow P(\overline{A}\cap\overline{B}) = \frac{3}{4}\times\frac{3}{5} \Leftrightarrow P(\overline{A}\cap\overline{B}) = \frac{9}{20}$$

Recorrendo às Leis de Morgan temos que:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = \frac{9}{20}$$

Como $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$, então $P(A \cup B) = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$

Calculando a probabilidade da interseção dos dois acontecimentos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{11}{20} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{5} - \frac{11}{20} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{20}$

Concluímos que $P(A \cap B) > 0$ logo existe pelo menos um atleta do clube que pratica as duas modalidades desportivas.

2018, 2ª fase, caderno 1

33. A e B são acontecimentos equiprováveis e independentes logo temos que:

$P(A) = P(B) \quad \text{e} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,64 = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,64 = P(A) + P(A) - P(A) \times P(A) \Leftrightarrow -[P(A)]^2 + 2P(A) - 0,64 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \text{(usando a fórmula resolvente)} \Leftrightarrow P(A) = 1,6 \vee P(A) = 0,4$$

Como qualquer probabilidade está sempre entre 0 e 1, $P(A) = 0,4$.

Opção(B)

2018, Época especial, caderno 1

34. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,6 + 0,7 - P(A \cap B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 1,3 - P(A \cap B)$

Qualquer probabilidade está sempre entre 0 e 1 por isso temos que:

$$0 \leq P(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1,3 - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow -1,3 \leq -P(A \cap B) \leq -0,3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,3 \leq P(A \cap B) \leq 1,3 \Leftrightarrow P(A \cap B) \geq 0,3$$

Pela definição de probabilidade condicionada temos que:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B|A) \geq \frac{0,3}{0,6} \Leftrightarrow P(B|A) \geq 0,5 \Leftrightarrow P(B|A) \geq \frac{1}{2}$$

2018, Época especial, caderno 1

35. Consideremos os acontecimentos:

A: O aluno escolhido é um rapaz

B: O aluno escolhido tem olhos verdes

Usando a fórmula da probabilidade condicionadas temos:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{10}}{P(A)} \;\Leftrightarrow\; P(A) = \frac{4}{10} \;\Leftrightarrow\; P(A) = \frac{2}{5}$$

Usando a regra de Laplace:

$$P(A) = \frac{nr\ de\ rapazes}{nr\ total\ de\ alunos} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{nr\ de\ rapazes}{20} \Leftrightarrow nr\,de\,rapazes = \frac{20 \times 2}{5} \Leftrightarrow nr\,de\,rapazes = 8$$

Opção(B)

2017, 1ª fase, grupo I

36. No contexto da situação descrita, $P(\overline{A} \cup B)$ é a probabilidade de retirar ao acaso uma bola do saco com número par ou superior a seis.

O número de casos possíveis é igual ao número de bolas que estão no saco, ou seja, n.

O número de casos favoráveis é igual ao número de bolas que estão no saco com um número superior a 6 $n-6$, mais o número de bolas com número par e inferior ou igual a seis, isto é, 3 bolas (bolas com os números: 2,4,6). Portanto o número de casos favoráveis é igual a $n-6+3=n-3$.

Usando a Regra de LaPlace vem que:

$$P(\overline{A} \cup B) = \frac{n^{o}\ de\ casos\ favoráveis}{n^{o}\ de\ casos\ \ possíveis} = \frac{n-3}{n}$$

2017, 1ª fase, grupo II

37. Consideremos os acontecimentos:

A: O aluno escolhido é rapariga
B: O aluno escolhido frequenta o 10º ano

$P(\overline{A} \cup \overline{B})$ é a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz ou não frequentar o 10º ano que é igual a 0,82.

$P(B|A)$ é a probabilidade de o aluno escolhido frequentar o 10º ano, sabendo que é rapariga que é igual a $\frac{1}{3}$.

Usando as Leis de Morgan temos que:

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$.

Assim vem que:

$1 - P(A \cap B) = 0,82 \;\Leftrightarrow\; P(A \cap B) = 0,18$

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{3} = \frac{0{,}18}{P(A)} \;\Leftrightarrow\; P(A) = 0,18 \times 3 \;\Leftrightarrow\; P(A) = 0,54$$

2017, 2ª fase, grupo II

38. Consideremos os acontecimentos:

A: As bolas retiradas da caixa C_1 têm a mesma cor

B: A bola retirada da caixa C_2 é branca

No contexto da situação descrita, $P(B|\overline{A})$ é a probabilidade da bola retirada da caixa C_2 ser branca sabendo que as bolas retiradas da caixa C_1 não têm a mesma cor.

O número de casos possíveis é igual ao número de bolas que estão na caixa C_2 sabendo que foram lá postas mais 2 bolas da caixa C_1, ou seja, na caixa C_2 temos $7 + 2 = 9$ bolas no total.

O número de casos favoráveis é igual ao número de bolas brancas que estão na caixa C_2 sabendo que foram lá postas mais 2 bolas da caixa C_1 de cores diferentes, ou seja, uma branca e outra preta.

Sendo n o número de bolas brancas existentes na caixa C_2 inicialmente, então o número de casos favoráveis é igual ao número total de bolas brancas existentes na caixa C_2 contanto com a bola branca lá posta da caixa C_1, isto é, $n+1$.

Assim vem que:

$P(B|\overline{A}) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{n+1}{9} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow n+1 = \frac{9\times 2}{3} \Leftrightarrow n+1 = 6 \Leftrightarrow n = 5$

Logo temos que inicialmente na caixa C_2 existiam 5 bolas brancas e 2 bolas pretas.

2017, Época especial, grupo II

39. Através da fórmula da probabilidade condicionada temos:

$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{6}\times\frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A\cap B) = \frac{3}{60} \Leftrightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{20}$

Assim temos que:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20} = \frac{8}{20} + \frac{6}{20} - \frac{1}{20} = \frac{13}{20}$$

Opção(C)

2016, 1ª fase, grupo I

40. Sabendo que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,6$ conseguimos calcular $P(A \cup B)$:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,6 \;\Leftrightarrow\; P(\overline{A \cup B}) = 0,6 \;\Leftrightarrow\; 1 - P(A \cup B) = 0,6 \;\Leftrightarrow\; P(A \cup B) = 0,4$$

Calculando $P(A \cap B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \;\Leftrightarrow\; P(A \cap B) = 0,2 + 0,3 - 0,4 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; P(A \cap B) = 0,1$$

Usando a fórmula da probabilidade condicionada:

$$P(A|B) = \tfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \tfrac{0,1}{0,3} = \tfrac{1}{3}$$

Opção(A)

2016, 2ª fase, grupo I

41. Consideremos os acontecimentos:

A: A soma dos números das fichas retiradas é igual a 10
B: O produto dos números das fichas retiradas é ímpar

No contexto da situação descrita, $P(B|A)$ é a probabilidade do produto dos números das fichas retiradas ser ímpar sabendo que a soma dos números das fichas retiradas é igual a 10.

O número de casos possíveis é igual ao número de pares de fichas em que a soma dos números das fichas retiradas é igual a 10, ou seja, são 4 pares: (1,9);(2,8);(3,7) e (4,6).

O número de casos favoráveis é igual ao número de pares de fichas dos casos possíveis em que o produto dos números das fichas retiradas é ímpar: (1,9) e (3,7).

Assim usando a Regra de LaPlace:

$$P(B|A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2016, 2ª fase, grupo II

42. Vamos construir uma tabela de dupla entrada:

		Dado Cúbico					
		1	2	3	4	5	6
Dado Tetraédrico	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)

Deste modo conseguimos perceber todas as hipóteses possíveis para os lançamentos das duas pessoas.

nº de casos favoráveis = nº de entradas da tabela com pelo menos um nr 4 = 9

nº de casos possíveis = nº de entradas da tabela =24

P("Pelo menos uma dessas pessoas registar o número 4")= $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

Opção(A)

2016, Época especial, grupo I

43.

43.1. O número de casos possíveis é igual ao o número de conjuntos diferentes de 3 bolas que podemos obter sabendo que estão n bolas no saco, ou seja, ${}^{n}C_3$

No saco existem n bolas sendo n um número par maior do que 3, logo existem $\frac{n}{2}$ bolas com números ímpares e $\frac{n}{2}$ bolas com números pares.

Assim o número de casos favoráveis é igual a ${}^{\frac{n}{2}}C_2 \times {}^{\frac{n}{2}}C_1 = {}^{\frac{n}{2}}C_2 \times \frac{n}{2}$.

Usando a Regra de LaPlace:

P(Duas das 3 bolas terem número par e uma ter número ímpar)$= \frac{{}^{\frac{n}{2}}C_2 \times \frac{n}{2}}{{}^{n}C_3}$

43.2. Consideremos os acontecimentos:

A: A primeira bola extraída tem número par

B: A segunda bola extraída tem número par

No contexto da situação descrita, $P(A \cap B)$ é a probabilidade de as duas bolas extraídas terem número par.

Calculando a probabilidade da primeira bola extraída ter número par, vem que:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

No caso de a extração ser feita com reposição, vamos calcular a probabilidade da segunda bola extraída ter número par sabendo que a primeira tem número par::

$$P(B|A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Logo, $a = P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

No caso de a extração ser feita sem reposição, vamos calcular a probabilidade da segunda bola extraída ter número par sabendo que a primeira tem número par:

$$P(B|A) = \frac{3}{7}$$

Logo, $b = P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$.

2016, Época especial, grupo II

44. Vamos começar por calcular $P(B)$:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,7 = 0,3$$

Sabendo que $P(A \cup B) = 0,5$, vem que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \;\Leftrightarrow\; 0,5 = 0,4 + 0,3 - P(A \cap B) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; P(A \cap B) = 0,2$$

Segundo as leis de De Morgan:

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8$$

Opção(C)

2015, 1ª fase, grupo I

45.

45.1. Consideremos os acontecimentos:

C: O funcionário reside em Coimbra

M: O funcionário é mulher

Vamos contruir uma tabela de dupla entrada de modo a organizar os dados:

	C	$\overline{C}$	
M	$0,4 - 0,35 = 0,05$	$0,6 - 0,15 = 0,45$	0,5
$\overline{M}$	$0,5 - 0,15 = 0,35$	$0,3 \times 0,5 = 0,15$	0,5
	0,4	0,6	1

Queremos determinar a probabilidade de o funcionário escolhido ser mulher, sabendo que reside em Coimbra, usando a fórmula da probabilidade condicionada vem que:

$$P(M|C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}05}{0{,}4} = \frac{1}{8}$$

45.2. A Regra de LaPlace diz que a probabilidade de um certo acontecimento é igual ao quociente do número de casos favoráveis a esse acontecimento pelo número de casos possíveis do mesmo acontecimento.

Neste caso, o número de casos possíveis é o número de grupos que podemos formar na escolha de 3 dos 80 funcionários da empresa sendo que a ordem de escolha não interessa, ou seja, ${}^{80}C_3$.

Considerando que a empresa tem 80 funcionários e sabendo que 40% deles residem em Coimbra, então 32 dos 80 funcionários residem em Coimbra.

Haver no máximo dois funcionários a residir em Coimbra é igual à diferença entre o número total de grupos de 3 funcionáios que é ${}^{80}C_3$ com o número de grupos formados por 3 funcionários que residem em Coimbra ou seja, ${}^{32}C_3$.

Assim, usando a Regra de Laplace, a probabilidade de haver no máximo dois funcionários a residir em Coimbra é igual a:

$$\frac{{}^{80}C_3 - {}^{32}C_3}{{}^{80}C_3}$$

2015, 1ª fase, grupo II

46. Considerando que a bola retirada do saco tem um número par então sabemos que a bola retirada só pode ser uma das bolas com os números: 2,4,6 ou 8. Destas bolas apenas 2 têm cor preta.

Usando a Regra de Laplace, a probabilidade de que, retirando ao acaso uma bola do saco, ela seja preta sabendo que tem um número par é igual a:

$$P(A|B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Opção(B)

2015, 2ª fase, grupo I

47. Vamos começar por calcular $P(A)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ \Leftrightarrow\ 0,7 = P(A) + 0,4 - 0,2 \ \Leftrightarrow\ P(A) = 0,5$$

Usando a fórmula da probabilidade condicionada, vem que:

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$$

Opção(D)

2015, Época especial, grupo I

48. O número de casos possíveis é igual ao número de arranjos completos da extração de 3 das 9 bolas do saco visto que as bolas são retiradas uma a uma e com reposição, ou seja, ${}^{9}A'_{3} = 729$.

Para que produto dos números das três bolas retiradas ser igual a 2 tem de ser extraída 1 única bola com o número 2 e as restantes duas extrações da bola com o número 1. Como a ordem interessa temos de ver quantas hipóteses temos na extração destas 3 bolas:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}$$

Portanto temos 3 casos favoráveis.

Usando a regra de Laplace:

P(Produto dos números das três bolas retiradas ser igual a 2)$= \frac{3}{729} = \frac{1}{243}$

2015, Época especial, grupo II