Resolução - Números complexos

1. Consideremos o ponto A o afixo de um número complexo z_A.

   Pela observação da figura concluímos que $Arg(z_A) = \frac{3\pi}{2}$.

   Escrevendo o número complexo z_A na forma trigonométrica, $z_A = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

   Sabendo que A é o afixo de uma das raízes cúbicas do número complexo w, conseguimos calcular w através da equação:

   $$\sqrt[3]{w} = z_A \Leftrightarrow w = (z_A)^3 \Leftrightarrow w = (2e^{i\frac{3\pi}{2}})^3 \Leftrightarrow w = 2^3 e^{i\frac{3\pi\times 3}{2}} \Leftrightarrow w = 8e^{i\frac{9\pi}{2}} \Leftrightarrow w = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

   Opção(C)

   2024, 1ªfase

2. Escrevendo o número complexo z na forma algébrica:

   $z = \frac{4}{1+i} - \frac{2}{i^7} = \frac{4(1-i)}{(1+i)(1-i)} - \frac{2}{i^3} = \frac{4-4i}{2} - \frac{2}{-i} = 2 - 2i - \frac{2i}{(-i)(i)} = 2 - 2i - 2i = 2 - 4i$

   Consideremos o número complexo $w = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

   Assim temos que o produto de z com w, na forma algébrica, é igual a:

   $z \times w = (2 - 4i) \times (a + bi) = 2a + 2bi - 4ai - 4bi^2 = 2a + 4b + (2b - 4a)i$

   Como o afixo do número complexo $z \times w$ pertence à bissetriz do terceiro quadrante então temos que:

$Re(z \times w) = Im(z \times w) \Leftrightarrow 2a + 4b = 2b - 4a \Leftrightarrow b = -3a$

$Re(z \times w) < 0 \quad \wedge \quad Im(z \times w) < 0$

Sabendo que o número complexo $z \times w$ tem módulo igual a $5\sqrt{2}$ e substituindo $b = -3a$, vem que:

$|2a + 4b + (2b - 4a)i| = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(2a + 4b)^2 + (2b - 4a)^2} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2a + 4b)^2 + (2b - 4a)^2 = (5\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (2a + 4 \times (-3a))^2 + (2 \times (-3a) - 4a)^2 = 50 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-10a)^2 + (-10a)^2 = 50 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{2}$

Considerando $a = -\frac{1}{2}$ e $b = -3 \times -\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, conseguimos determinar o número complexo $z \times w$ na forma algébrica:

$$z \times w = 2a + 4b + (2b - 4a)i = -1 + 6 + (3 + 2)i = 5 + 5i \in 1^o \text{ quadrante}$$

Considerando $a = \frac{1}{2}$ e $b = -3 \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$, conseguimos determinar o número complexo $z \times w$ na forma algébrica:

$$z \times w = 2a + 4b + (2b - 4a)i = 1 - 6 + (-3 - 2)i = -5 - 5i \in 3^o \text{ quadrante}$$

Concluímos que $a = \frac{1}{2}$ e $b = -\frac{3}{2}$ porque $z \times w \in 3^o$ quadrante.

$w = a + bi = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$

2024, 1ªfase

3. Escrevendo z na forma trigonométrica:

$$z = -2i = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Sendo o ponto A o afixo no plano complexo do número z, o transformado deste ponto por uma rotação de centro na origem e de ângulo orientado de amplitude $\frac{\pi}{3}$ radianos é igual a:

$$z \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

Escrevendo o número complexo $2e^{i\frac{11\pi}{6}}$ na forma algébrica:

$2e^{i\frac{11\pi}{6}} = 2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = 2\big[\cos\big(\frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\big) + i\sin\big(\frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\big)\big] =$

$= 2\big[\cos\big(-\frac{\pi}{6}\big) + i\sin\big(-\frac{\pi}{6}\big)\big] = 2\big[\cos\big(\frac{\pi}{6}\big) - i\sin\big(\frac{\pi}{6}\big)\big] = 2\big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\big) = \sqrt{3} - i$

Opção(A)

2024, 2ªfase

4. Vamos começar por escrever o número complexo $-1-\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica:

$$\begin{cases} tg\ \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} \\ \theta \in 3\ ^{o}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = \sqrt{3} \\ \theta \in 3\ ^{o}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{4\pi}{3} \text{ e } |-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{4} = 2$$

$-1-\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Calculando w na forma trigonométrica:

$w = \frac{-1-\sqrt{3}i}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{2e^{i\frac{4\pi}{3}}}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{25\pi}{12}} = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$

Sabendo que o número complexo w é uma das raízes sextas do número complexo z:

$$z = w^6 \Leftrightarrow z = \left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^6 \Leftrightarrow z = 2^6 e^{i\frac{6\pi}{12}} \Leftrightarrow z = 64e^{i\frac{\pi}{2}} = 64i$$

Logo, $iz = i \times 64i = 64i^2 = -64$

2024, 2ªfase

5. Escrevendo os números complexos z_1 e z_3 na forma algébrica:

$z_1 = \overline{OA} \quad \text{e} \quad z_3 = -\overline{OA}$

Conseguimos calcular $\overline{OA}$ através da equação:

$$|z_1 - z_3| = 6 \Leftrightarrow |\overline{OA} - (-\overline{OA})| = 6 \Leftrightarrow |2\overline{OA}| = 6 \Leftrightarrow 2|\overline{OA}| = 6 \Leftrightarrow |\overline{OA}| = 3$$

Usando o teorema de Pitágoras vamos determinar $\overline{OB}$:

$(\overline{AB})^2 = (\overline{OA})^2 + (\overline{OB})^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + (\overline{OB})^2 \Leftrightarrow (\overline{OB})^2 = 16 \Leftrightarrow \overline{OB} = \pm 4 \Leftrightarrow \overline{OB} = 4$

Escrevendo os números complexos z_2 e z_4 na forma trigonométrica:

$z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{e} \quad z_4 = 4e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$z_2 \times z_4 = 4e^{i\frac{\pi}{2}} \times 4e^{i\frac{3\pi}{2}} = 16e^{i\frac{4\pi}{2}} = 16e^{i2\pi} = 16e^{i0} = 16$

Opção(B)

2024, Época especial

6. $z = 2e^{i\theta} \quad \text{e} \quad \overline{z} = 2e^{-i\theta}$

Resolvendo a equação:

$z^2 + 2z\overline{z} - 6 = 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow (2e^{i\theta})^2 + 2(2e^{i\theta})(2e^{-i\theta}) - 6 = 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} + 2(4e^{i0}) - 6 = 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} + 8 - 6 = 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} = -2 + 2\sqrt{3}i \quad (*_2)$

Vamos escrever o número complexo $-2 + 2\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica:

$\begin{cases} tg\ \alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{2} \\ \alpha \in 2\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \alpha = -\sqrt{3} \\ \alpha \in 2\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} \quad \text{e} \quad |-2 + 2\sqrt{3}i| = \sqrt{16} = 4$

$-2 + 2\sqrt{3}i = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$(*_2) \Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow e^{i(2\theta)} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{3} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2024, Época especial

7. Sabemos que o ponto A é o afixo de um número complexo z tal que $Im(z) = Re(z)$ e $Re(z) > 0$, logo o $Arg(z) = \frac{\pi}{4}$.

   Escrevendo o número complexo z na forma trigonométrica, $z = |z|e^{i\frac{\pi}{4}}$.

   Como ponto B é o afixo de um número complexo w, pela observação da figura concluímos que $Arg(w) = Arg(z) + \frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$.

   Escrevendo o número complexo w na forma trigonométrica, $w = |w|e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

   Assim temos que o produto de w com z é igual a:

$$w \times z = |w|e^{i\frac{7\pi}{8}} \times |z|e^{i\frac{\pi}{4}} = |w| \times |z|e^{i\left(\frac{7\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)} = |w||z|e^{i\frac{9\pi}{8}}$$

   Opção(C)

2023, 1ªfase

8. Escrevendo o número complexo $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ na forma algébrica:

   $e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

   Vamos simplificar o número complexo w:

$z = \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}} - i^{17}}{i} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i - i}{i} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}{i} \times \frac{-i}{-i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Escrevendo w na forma trigonométrica:

$$\begin{cases} tg\ \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} \\ \theta \in 2\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = -\sqrt{3} \\ \theta \in 2\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ e } \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{1} = 1$$

Logo $w = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

As soluções da equação $z^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ são:

$$z = \sqrt{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}},\ \ k \in \{0,1\}$$

Para $k = 0$, $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

Para $k = 1$, $z_1 = e^{i\frac{8\pi}{6}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Escrevendo z_0 e z_1 na forma algébrica:

$z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_1 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2023, 1ªfase

9. Sabemos que o ponto A pertence ao semieixo imaginário positivo e é o afixo de um número complexo z_1.

   Escrevendo o número complexo z_1 na forma trigonométrica, $z_1 = |z_1|e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Como o triângulo [ABC] é equilátero, então $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{3}$.

O ponto B é o afixo de um número complexo z_2, pela observação da figura sabemos que $Arg(z_2) = Arg(z_1) + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$.

Escrevendo o número complexo z_2 na forma trigonométrica, $z_2 = |z_2|e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Vamos calcular ${z_1}^2 \times z_2$:

$${z_1}^2 \times z_2 = \left(|z_1|e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 \times |z_2|e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^i = |z_1|^2 e^{i\pi} \times |z_2|e^{i\frac{7\pi}{6}} = |z_1|^2|z_2|e^{i\left(\pi + \frac{7\pi}{6}\right)} = |z_1|^2|z_2|e^{i\left(\frac{13\pi}{6}\right)}$$

Concluímos que $Arg({z_1}^2 \times z_2) = \frac{13\pi}{6}$.

$\frac{13\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{6} \in 1^{\text{o}}$ quadrante.

O afixo do número complexo ${z_1}^2 \times z_2$ pertence ao 1º quadrante.

Opção(A)

2023, 2ªfase

10. Escrevendo $-1 - \sqrt{3}i$ na forma trigonométrica:

$$\begin{cases} tg\ \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} \\ \theta \in 3\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = \sqrt{3} \\ \theta \in 3\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{4\pi}{3} \text{ e } |-1-\sqrt{3}i| = 2$$

Logo $-1-\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Vamos simplificar o número complexo z:

$$z = \frac{2i^{11}e^{i\alpha}}{-1-\sqrt{3}i} = \frac{2i^{3}e^{i\alpha}}{2e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \frac{-2ie^{i\alpha}}{2e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \frac{2e^{i\frac{3\pi}{2}}e^{i\alpha}}{2e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \frac{e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}}{e^{i\frac{4\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha-\frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}$$

Sabendo que $Re(z) = -Im(z)$ então o número complexo z pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

Por outro lado também sabemos que o afixo de z pertence ao 4º quadrante, ou seja, $arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

Assim temos que:

$\frac{\pi}{6} + \alpha = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$k = 0,\ \alpha = \frac{19\pi}{12} \in [0, 2\pi[.$

2023, 2ªfase

11. Escrevendo os números complexos z e $2i$ na forma trigonométrica:

$z = |z|e^{i\frac{\pi}{7}}$

$2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$2iz = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \times |z|e^{i\frac{\pi}{7}} = 2|z|e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)} = 2|z|e^{i\left(\frac{9\pi}{14}\right)}$$

Concluímos que $arg(2iz) = \frac{9\pi}{14}$

Opção(B)

2023, Época especial

12. Vamos começar por escrever o número complexo z_2 na forma trigonométrica:

$$\begin{cases} tg\ \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} \\ \theta \in 3\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = \ \sqrt{3} \\ \theta \in 3\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \ \theta = \frac{4\pi}{3} \text{ e } |-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{4} = 2$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Simplificando o número complexo w:

$$w = \frac{-5i+i^{23}}{(2e^{i\frac{4\pi}{3}})^n} = \frac{-5i-i}{2^n e^{i\frac{4\pi n}{3}}} = \frac{-6i}{2^n e^{i\frac{4\pi n}{3}}} = \frac{6e^{i\frac{3\pi}{2}}}{2^n e^{i\frac{4\pi n}{3}}} = \frac{6}{2^n}e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{4\pi n}{3}\right)}$$

Como w é um imaginário puro vem que:

$$\frac{3\pi}{2} - \frac{4\pi n}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4\pi n}{3} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\pi n}{3} = \pi - k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0,\ \ n = \frac{3}{4}\ \notin \mathbb{N}$

Para $k=-1$, $n=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$

Para $k=-2$, $n=\frac{9}{4} \notin \mathbb{N}$

Para $k=-3$, $n=\frac{12}{4}=3 \in \mathbb{N}$

O menor número natural n para o qual o número complexo w é um imaginário puro é $n=3$.

2023, Época especial

13. O ponto W é o afixo de um número complexo w tal que $Im(w)=-Re(w)$ então w escrito na forma trigonométrica é da forma:

$$w=|w|e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

$w^2=(|w|e^{i\frac{7\pi}{4}})^2=|w|^2e^{i\frac{7\pi}{4}\times 2}=|w|^2e^{i\frac{7\pi}{2}}$

$-i=e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Calculando $-iw^2$:

$$-iw^2=e^{i\frac{3\pi}{2}}\times |w|^2e^{i\frac{7\pi}{2}}=|w|^2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{7\pi}{2}\right)}=|w|^2e^{i\frac{10\pi}{2}}=|w|^2e^{i5\pi}$$

Opção(C)

2022, 1ªfase

14. Vamos começar por escrever os números complexos $-\sqrt{3}+i$ e $\sqrt{2}i$ na forma trigonométrica:

$$\begin{cases} tg\ \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \theta \in 2\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = -\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \theta \in 2\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow\ \theta = \frac{5\pi}{6}\ \text{ e }\ |-\sqrt{3}+i| = \sqrt{4} = 2$$

$-\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$\sqrt{2}i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

Calculando z^3 :

$z^3 = \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}i}\right)^6 = \left(\frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^6 = \left[\frac{2}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2})}\right]^6 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\frac{6\pi}{3}} = 8e^{i2\pi}$

As soluções da equação $z^3 = 8e^{i2\pi}$ são:

$$z = \sqrt[3]{8\,e^{i2\pi}} = 2\,e^{i\frac{2\pi+2k\pi}{3}},\ \ k \in \{0,1,2\}$$

Para $k=0$, $z_0 = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}\ \notin$ 3ºquadrante

Para $k=1$, $z_1 = 2\,e^{i\frac{4\pi}{3}}\ \in$ 3ºquadrante

O número complexo que é solução da equação e cujo afixo, no plano complexo, pertence ao terceiro quadrante é $z_1 = 2\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Escrevendo z_1 na forma algébrica:

$z_1 = 2\,e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1-\sqrt{3}i$

2022, 1ªfase

15. Substituindo na condição $z = x + yi$:

$z \times \overline{z} = 4 \Leftrightarrow (x+yi)(x-yi) = 4 \Leftrightarrow x^2 - (yi)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$

Esta condição equivale a uma circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a 2.

Opção(A)

2022, 2ªfase

16. Vamos começar por determinar o número complexo z:

$z = \frac{4}{1-i} + 4i^{18} = \frac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)} + 4i^2 = \frac{4+4i}{2} - 4 = 2 + 2i - 4 = -2 + 2i$

Escrevendo z na forma trigonométrica:

$$\begin{cases} tg\ \theta = \frac{2}{-2} \\ \theta \in 2\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = -1 \\ \theta \in 2\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow\ \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ e } |-2+2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Logo $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Como o número complexo z é uma das raízes cúbicas de um número complexo w, então existem outras duas raízes de w que têm o mesmo módulo de z e o seu argumento difere $\frac{2\pi}{3}$ do $arg(z)$.

As outras duas raízes cúbicas de w na forma trigonométrica são:

$$z_0 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{e} \quad z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

2022, 2ªfase

17. O número complexo z já está na forma trigonométrica logo sabemos o seu módulo e o ser argumento:

$$|z| = e \quad \wedge \quad arg(z) = e.$$

Como $e \approx 2,7$ e $\pi \approx 3,14$ então $\frac{\pi}{2} < arg(z) < \pi$

Opção(A)

2022, Época especial

18. Vamos escrever o número complexo z_1 na forma algébrica:

$z_1 = (1+i)^2 \times (2+i) + i^7 = (1+2i+i^2) \times (2+i) + i^3 = 2i(2+i) - i = 4i + 2i^2 - i = -2+3i$

Calculando z_2 na forma algébrica:

$z_1 \times z_2 = 3 + 2i \Leftrightarrow (-2+3i) \times z_2 = 3 + 2i \Leftrightarrow z_2 = \frac{3+2i}{-2+3i} \Leftrightarrow z_2 = \frac{(3+2i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_2 = \frac{-6-9i-4i-6i^2}{4+9} \Leftrightarrow z_2 = \frac{-13i}{13} \Leftrightarrow z_2 = -i$

Logo vem que $\sin\theta + i\cos\theta = -i \ \wedge \ \theta \in [0, 2\pi[\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\theta = 0 \ \wedge \ \cos\theta = -1 \ \wedge \ \theta \in [0, 2\pi[\ \Leftrightarrow \theta = \pi$

2022, Época especial

19. w é um dos vértices de um polígono regular com centro na origem do referencial.

$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{3\pi}{28}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{28}\right)} = e^{i\frac{4\pi}{28}} = e^{i\frac{2\pi}{14}} = e^{i\frac{\pi}{7}}$

O mesmo polígono tem outro vértice sobre o semieixo real positivo que pode ser representado pelo número complexo $z = e^{i0}$

Se este polígono tiver 7 vértices então o ângulo entre dois vértices consecutivos é igual a $\frac{2\pi}{7}$, ou seja, se andarmos no sentido positivo do círculo trigonométrico o vértice consecutivo ao vértice representado por z é representado pelo número complexo $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ o que ultrapassa o vértice representado por w, por isso esta não é a opção correta pois o afixo de w não poderá ser nenhum dos vértices do polígono.

Se este polígono tiver 14 vértices então o ângulo entre dois vértices consecutivos é igual a $\frac{2\pi}{14} = \frac{\pi}{7}$, ou seja, se andarmos no sentido positivo do círculo trigonométrico o vértice consecutivo ao vértice representado por z é representado pelo número complexo $z_1 = e^{i\frac{\pi}{7}} = w$, esta é a opção correta.

Opção(B)

2021, 1ªfase

20. Vamos começar por determinar na forma algébrica o número complexo w:

$w = \frac{z_1 \times z_2}{z_3} = \frac{(-3+2i)(1+2i)}{2-i} = \frac{-3-6i+2i-4}{2-i} = \frac{-7-4i}{2-i} = \frac{(-7-4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-14-7i-8i+4}{2^2+1^2} = \frac{-10-15i}{5} =$

$= -2-3i$

Calculando o módulo de w: $|w| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ c.q.d.

O afixo do número complexo w pertence ao 3º quadrante e como $Re(w) > Im(w)$ então $\frac{5\pi}{4} < Arg(w) < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} < Arg(w) < -\frac{\pi}{2}$ c.q.d.

2021, 1ªfase

21. Vamos começar por escrever o número complexo i na forma trigonométrica:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Calculando o número complexo w na forma trigonométrica:

$z \times w = i \Leftrightarrow e^{i\frac{3\pi}{5}} \times w = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow w = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{3\pi}{5}}} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{5}\right)} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{10}}$

$arg(w) = -\frac{\pi}{10} \Leftrightarrow arg(w) = -\frac{\pi}{10} + 2\pi \Leftrightarrow arg(w) = \frac{19\pi}{10}$

Opção(A)

2021, 2ªfase

22. Considerando $z = x + yi$ vamos determinar a equação da reta:

$(1-2i)z + (1-2i)\overline{z} + 10 = 0 \Leftrightarrow (1-2i)(x+yi) + (1-2i)(x-yi) + 10 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + yi + 2xi - 2y + x - yi - 2xi - 2y + 10 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y + 10 = 0 \Leftrightarrow 4y = 2x + 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$

O número complexo cujos afixos pertencem a esta reta e que tem menor módulo é o número complexo mais proximo da origem do referencial, ou seja, é o ponto resultante da interseção da reta $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ com a reta perpendicular a esta e que passa na origem do referencial.

Vamos calcular o declive da reta perpendicular à reta $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ e que passa na origem do referencial:

$$m = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

Assim sabemos que a reta perpendicular à reta $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ e que passa na origem do referencial tem equação:

$$y = -2x$$

Através de um sistema conseguimos calcular as coordenadas do ponto resultante da interseção das duas retas:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x = x + 5 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

O número complexo cujos afixos pertencem à reta $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ e que tem menor módulo é $-1 + 2i$.

2021, 2ªfase

23. Vamos escrever os números complexos z_1 e z_2 na forma algébrica:

$z_1 = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$z_2 = 2e^{i(\theta+\pi)} = 2(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)) = 2(-\cos\theta - i\sin\theta) = -2\cos\theta - 2i\sin\theta$

$z_1 + z_2 = \cos\theta + i\sin\theta - 2\cos\theta - 2i\sin\theta = -\cos\theta - i\sin\theta$

Logo o afixo do número complexo $z_1 + z_2$ tem coordenadas $(-\cos\theta, -\sin\theta)$.

Como θ pertence ao primeiro quadrante então $\cos\theta > 0$ e $\sin\theta > 0$, ou seja, $-\cos\theta < 0$ e $-\sin\theta < 0$. Concluímos que o afixo do número complexo $z_1 + z_2$ pertence ao terceiro quadrante.

Opção(C)

2021, Época especial

24. $(z_1)^2 = (\frac{1}{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}})^2 = \frac{1}{4}\, e^{i\frac{\pi}{2}}$

$(\overline{z_2})^3 = (\overline{z_2})^2 \times \overline{z_2} = (-2i)^2 \times (-2i) = 4i^2 \times (-2i) = 8i = 8\, e^{i\frac{\pi}{2}}$

Resolvendo a equação:

$iz^2 + z_1^2 \times (\overline{z_2})^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow iz^2 + \frac{1}{4}\, e^{i\frac{\pi}{2}} \times 8\, e^{i\frac{\pi}{2}} - 2 = 0 \Leftrightarrow iz^2 + 2\, e^{i\pi} - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow iz^2 - 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow iz^2 = 4 \Leftrightarrow z^2 = \frac{4}{i} \Leftrightarrow z^2 = \frac{4}{i} \times \frac{i}{i} \Leftrightarrow z^2 = -4i \Leftrightarrow z^2 = 4\, e^{i\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{4}\, e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)}, \quad k \in \{0, 1\}$

Os números complexos z_0 e z_1 , escritos na forma trigonométrica, que são solução da equação:

Para $k = 0$, , $z_0 = 2 \quad e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Para $k = 1, \ , \ z_1 = 2 \quad e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2021, Época especial

25.

25.1. Vamos considerar o número complexo z na forma trigonométrica:

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Fazendo o conjugado do número complexo z:

$$\overline{z} = |z|e^{-i\theta}$$

Resolvendo a equação:

$z^2 = \overline{z} \Leftrightarrow (|z|e^{i\theta})^2 = |z|e^{-i\theta} \Leftrightarrow |z|^2 e^{i2\theta} = |z|e^{-i\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|^2 = |z| \ \wedge \ 2\theta = -\theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow |z|^2 - |z| = 0 \ \wedge \ 3\theta = 2k\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|(|z| - 1) = 0 \ \wedge \ \theta = \frac{2k\pi}{3} \Leftrightarrow (|z| = 0 \quad (*_1) \ \vee \ |z| - 1 = 0) \ \wedge \ \theta = \frac{2k\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z| = 1 \ \wedge \ \theta = \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$(*_1)$ z é um número complexo não nulo logo $|z| \neq 0$

Como as soluções desta equação são os vértices de um polígono regular (polígono com todos os lados iguais) então $\theta \in [0, 2\pi[$.

Para $k = 0$, $z_1 = e^{i0}$ $(0 \in [0, 2\pi[)$

Para $k = 1$, $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $\left(\frac{2\pi}{3} \in [0, 2\pi[\right)$

Para $k = 2$, $z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ $\left(\frac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi[\right)$

Para $k = 3$, $z_4 = e^{i\frac{6\pi}{3}} = e^{i2\pi}$ $\left(2\pi \notin [0, 2\pi[\right)$

Assim temos que os afixos dos números complexos z_1, z_2 e z_3 são os vértices de um triângulo equilátero.

Sejas A o afixo do número complexo z_1 que tem coordenadas $A(1, 0)$

Escrevendo o número complexo z_2 na forma algébrica:

$$z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Seja B o afixo do número complexo z_2 que tem coordenadas $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Calculando a distância entre os pontos A e B:

$$d(AB) = \sqrt{\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

O perímetro do triângulo equilátero é:

$P_{triângulo} = 3 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

25.2. Consideremos em $\mathbb{C}$ o número complexo $z = x + iy$.

$$Re(z) \times Im(z) = 1 \;\Leftrightarrow\; x \times y = 1 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{x}$$

Opção(D)

2020, 1ª fase

26.

26.1. Vamos considerar o número complexo z_2 na forma algébrica:

$$z_2 = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}^+$$

$|z_2| = \sqrt{5} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5} \;\Leftrightarrow\; a^2 + b^2 = 5 \;\; (3)$

Vamos simplificar e escrever o número complexo z_1 na forma algébrica:

$z_1 = \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^5} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{4}{i} = \frac{2+2i}{2} + \frac{4\times(-i)}{i\times(-i)} = 1 + i - 4i = 1 - 3i$

$z_1 \times z_2 = (1 - 3i) \times (a + bi) = a + bi - 3ai - 3bi^2 = a + 3b + (b - 3a)i$

Sabendo que o afixo do numero complexo $z_1 \times z_2$ tem coordenadas iguais ficamos com a equação:

$$a + 3b = b - 3a \Leftrightarrow 4a = -2b \Leftrightarrow 2a = -b \Leftrightarrow b = -2a \quad (4)$$

Resolvendo o sistema resultante das equações (3) e (4):

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ b = -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (2a)^2 = 5 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 4a^2 = 5 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 = 5 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \vee a = -1 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Como o afixo do numero complexo $z_1 \times z_2$ tem coordenadas positivas então $a + 3b > 0 \wedge b - 3a > 0$, portanto $a = -1 \wedge b = 2$.

$z_2 = -1 + 2i$

26.2. Como $k + i$ é uma das raízes quadradas do número complexo $3 - 4i$, vem que:

$$k + i = \sqrt{3 - 4i} \Leftrightarrow (k + i)^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow k^2 + 2ki + i^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 1 + 2ki = 3 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 1 = 3 \\ 2k = -4 \end{cases} \Leftrightarrow k = -2$$

Opção(D)

2020, 2ª fase

27. Fazendo o conjugado de z temos: $\overline{z} = -1 - 2i$.

Ambas as partes real e imaginária de $\overline{z}$ são negativas logo o afixo de $\overline{z}$ pertence ao 3º quadrante. Como a parte real é maior que a parte imaginária então o arg(z) tem de ser maior que $\frac{5\pi}{4}$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).

Opção(D)

2019, 1ª fase, caderno 1

28. Vamos começar por simplificar e escrever o número complexo w na forma algébrica.

$W = \frac{z_1+i^6+2\,\overline{z_1}}{z_1-z_2} = \frac{3+4i+i^2+2\,(3-4i)}{3+4i-(4+6i)} = \frac{3+4i-1+6-8i}{-1-2i} = \frac{8-4i}{-1-2i} = \frac{(8-4i)(-1+2i)}{(-1-2i)(-1+2i)} = \frac{-8+16i+4i-8i^2}{1+4} =$

$= \frac{20i}{5} = 4i$

A condição $|z| = |w| \;\Leftrightarrow\; |z| = 4$ representa uma circunferência de centro na origem e raio 4.

A condição $Im(z) \geq 0$ representa o semiplano em que a parte imaginária é positiva ou igual a zero (1º e 2º quadrante) e a condição $Re(z) \geq 0$ representa o semiplano em que a parte real é positiva ou igual a zero (1º e 4º quadrante).

Assim, a interseção das três condições dá a linha da circunferência que está no 1º quadrante que é equivalente a $\frac{1}{4}$ do perímetro da circunferencia de raio 4.

Logo, $\frac{1}{4}P_{circunferência} = \frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{1}{4} \times 2\pi \times 4 = 2\pi$

2019, 1ª fase, caderno 2

29. Vamos considerar que A é o afixo do número complexo $z = r\,e^{i\theta}$.

Sabendo que r é a medida do lado do quadrado, conseguimos calcular $\overline{DB}$:

$$\overline{DB}^2 = r^2 + r^2 \;\Leftrightarrow\; \overline{DB} = \sqrt{2}r \quad (r > 0)$$

De acordo com a figura 1 o ângulo que o afixo de B faz com o eixo Ox é igual a $\theta + \frac{\pi}{4}$, portanto B é o afixo do número complexo $\sqrt{2}r\,e^{i\,(\theta+\frac{\pi}{4})}$.

$\sqrt{2}r\,e^{i\,(\theta+\frac{\pi}{4})} = (r\,e^{i\theta})(\sqrt{2}e^{i\,\frac{\pi}{4}}) = z(1+i)$

Opção(A)

2019, 2ª fase, caderno 1

30. Vamos começar por simplificar e escrever o número complexo w na forma algébrica.

$w = \frac{3(2-3i)-i(1+2i)}{1+i^7} = \frac{6-9i-i+2}{1+i^3} = \frac{8-10i}{1-i} = \frac{(8-10i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{8+8i-10i+10}{2} = \frac{18-2i}{2} = 9-i$

Escrevendo a equação da circunferência de centro no afixo de z_1 e raio igual a $\sqrt{53}$:

$$|z-(2-3i)| = \sqrt{53} \;\Leftrightarrow\; |z-2+3i| = \sqrt{53}$$

Substituindo o número complexo w na equação da circunferência vem que:

$$|9-i-2+3i| = \sqrt{53} \;\Leftrightarrow\; |7+2i| = \sqrt{53} \Leftrightarrow \sqrt{7^2+2^2} = \sqrt{53} \Leftrightarrow \sqrt{53} = \sqrt{53}$$

O número complexo w verifica a equação da circunferência logo ele pertence à circunferência de centro no afixo de z_1 e raio igual a $\sqrt{53}$.

2019, 2ª fase, caderno 2

31. Como o centro do quadrado coincide com a origem do referencial, todos os pontos A, B, C e D são equidistantes da origem, o que quer dizer que os números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 têm a mesma norma.

    Os números complexos z_1 e z_3 diferem entre si 180^o, logo são simétricos por isso temos que $z_1 = -z_2$.

    Usando o raciocínio anterior também sabemos que $z_2 = -z_4$

    $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$

    Opção(A)

    2019, Época especial, caderno 1

32. Vamos começar por simplificar e escrever o número complexo z na forma algébrica.

    $w = \frac{5+(1+i)^4}{2+2i^{15}} - \frac{1}{2} = \frac{5+(1+i)^2(1+i)^2}{2+2i^3} - \frac{i}{2} = \frac{5+(1+2i+i^2)(1+2i+i^2)}{2+2(-i)} - \frac{i}{2} = \frac{5+2i\times 2i}{2-2i} - \frac{i}{2} = \frac{5+4i^2}{2-2i} - \frac{i}{2} =$
    $= \frac{1}{2-2i} - \frac{i}{2} = \frac{2+2i}{(2-2i)(2+2i)} - \frac{i}{2} = \frac{2+2i}{8} - \frac{i}{2} = \frac{2+2i-4i}{8} = \frac{2-2i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

    Escrevendo o número complexo z na forma trignométrica:

    $$\begin{cases} tg\ \theta = -\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \\ \theta \in 4^o Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = -1 \\ \theta \in 4^o Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ e } |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

    Logo, $z = \frac{\sqrt{2}}{4}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

    Calculando z^n, vem que:

    $$z^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}$$

Para que z^n seja um número real negativo temos que ter:

$$-\frac{n\pi}{4} = \pi + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\ \ \Leftrightarrow n = -4 - 8k,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0,\ \ n = -4 \notin \mathbb{N}$

Para $k = 1,\ \ n = -12 \notin \mathbb{N}$

Para $k = -1,\ \ n = 4 \in \mathbb{N}$

Assim temos que o menor número natural n para o qual z^n é um número real negativo é 4.

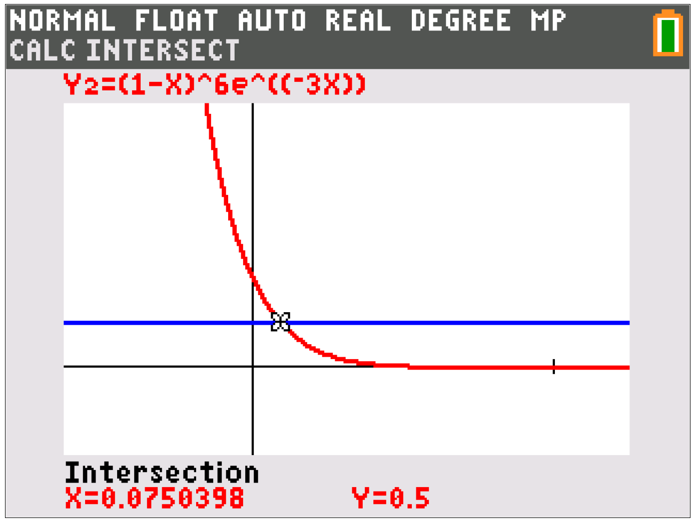
2019, Época especial, caderno 2

33. $z = (\cos x + i \sin x)^{10} = (e^{ix})^{10} = e^{ix \times 10} = e^{i10x} = \cos(10x) + i \sin(10x)$

Sabendo que o número complexo z verifica a condição $Im(z) = \frac{1}{3}Re(z)$, vem que:

$$Im(z) = \frac{1}{3}Re(z)\ \ \Leftrightarrow\ \ \sin(10x) = \frac{1}{3}\cos(10x)$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Tendo em conta que $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, temos que $x =\approx 0,03$.

Opção(B)

2018, 1ª fase, caderno 1

34. Vamos começar por simplificar e escrever o número complexo w na forma algébrica.

$$w = 1+\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}i^5}{1+2i} = 1+\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}i}{1+2i} = 1+\frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{3}i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = 1+\frac{2\sqrt{3}-4\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i^2}{1^2+2^2} = 1-\frac{5\sqrt{3}i}{5} =$$
$$= 1-\sqrt{3}i$$

Escrevendo o número complexo w na forma trignométrica:

$$\begin{cases} tg\ \theta = -\frac{\sqrt{3}}{1} \\ \theta \in 4^o Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = -\sqrt{3} \\ \theta \in 4^o Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} \text{ e } |w| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

Logo, $w = 2\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Sabendo que w é uma raiz quarta de um certo complexo z, vem que:

$$z = w^4 = (2\,e^{-i\frac{\pi}{3}})^4 = 2^4\,e^{-i\frac{4\pi}{3}} = 16\,e^{-i\frac{4\pi}{3}}$$

As quatro raízes quartas de z são:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16\,e^{-i\frac{4\pi}{3}}} = \sqrt[4]{16}\,e^{i\frac{-\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}} = 2\,e^{i\frac{-4\pi+6k\pi}{12}} = 2\,e^{i\frac{-2\pi+3k\pi}{6}},\;\; k \in \{0,1,2,3\}$$

Para $k = 0,\;\; z_1 = 2e^{i(\frac{-2\pi}{6})} = 2e^{i(\frac{-\pi}{3})}\;\; (-\frac{\pi}{3} \notin]0, \frac{\pi}{2}[)$

Para $k = 1,\, ,\;\; z_2 = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}\;\; (\frac{\pi}{6} \in]0, \frac{\pi}{2}[)$

Assim temos que a raiz quarta de z, cuja representção geométrica pertence ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$ é $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2018, 1ª fase, caderno 2

35. Consideremos z_2 o número complexo cujo afixo é o ponto C. De acordo com a figura 3, o ponto C pertence ao semieixo real negativo bem como à circunferência de raio igual a 1, logo $z_2 = -1$.

    Como z e z_2 são ambos raízes de índice 5 do mesmo número complexo, vem que:

$$z^5 = z_1^5 = (-1)^5 = -1$$

Opção(A)

2018, 2ª fase, caderno 1

36. Vamos começar por simplificar e escrever o número complexo z na forma algébrica.

$z = \frac{(2-i)^2+1+i}{1-2i} + 3i^{15} = \frac{4-4i+i^2+1+i}{1-2i} + 3i^{15-4\times 3} = \frac{(4-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} + 3i^3 = \frac{4+8i-3i-6i^2}{1^2+2^2} - 3i =$
$= \frac{10+5i}{5} - 3i = 2 + i - 3i = 2 - 2i$

$-\frac{1}{2} \times \overline{z} = -\frac{1}{2}(2+2i) = -1 - i$

Escrevendo o número complexo $-\frac{1}{2} \times \overline{z}$ na forma trignométrica:

$$\begin{cases} \tan\,\theta = \frac{-1}{-1} \\ \theta \in 3^{o} Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = 1 \\ \theta \in 3^{o} Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \ \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \ \text{ e } \ |-1-i| = \sqrt{2}$$

Logo, $w = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$

2018, 2ª fase, caderno 2

37. Sabe-se que:

$$i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1$$

Fazendo a divisão inteira de 2018 por 4, vem que:

$$\begin{array}{r|l} 2018 & 4 \\ \hline 2 & 504 \end{array}$$

Como o resto da divisão inteira de 2018 por 4 é igual a 2 então $i^{2018} = i^2$.

Observando o esquema abaixo percebemos que a soma de quatro em quatro parcelas é igual a zero.

Opção(A)

$$\underbrace{\overset{1}{\overset{/\!/}{i^0}} + \overset{i}{\overset{/\!/}{i^1}} + \overset{-1}{\overset{/\!/}{i^2}} + \overset{-i}{\overset{/\!/}{i^3}}}_{0} + \dots + \underbrace{\overset{1}{\overset{/\!/}{i^{2016}}} + \overset{i}{\overset{/\!/}{i^{2017}}} + \overset{-1}{\overset{/\!/}{i^{2018}}}}_{i}$$

2018, Época especial, caderno 1

38. Vamos resolver a equação complexa:

$$z^4+16=0 \Leftrightarrow z^4=-16 \Leftrightarrow z^4=16e^{i\pi}_{(-16=e^{i\pi})} \Leftrightarrow (r\,e^{i\alpha})^4=16e^{i\pi} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r^4e^{i(4\alpha)}=16e^{i\pi} \Leftrightarrow r=\sqrt[4]{16} \wedge 4\alpha=\pi+2k\pi,\ k\in\{0,1,2,3\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r=2 \wedge \alpha=\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{k\pi}{2},\ k\in\{0,1,2,3\}$$

Para $k=0,\ \alpha=\frac{\pi}{4}\ \in 1^{\text{o}}$ quadrante

Para $k=1,\ \alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}\ \in 2^{\text{o}}$ quadrante

Para $k=2,\ \alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{2}=\frac{5\pi}{4}\ \in 3^{\text{o}}$ quadrante

Para $k=3,\ \alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}=\frac{7\pi}{4}\ \in 4^{\text{o}}$ quadrante

As soluções da equação complexa são $\{2e^{i\frac{\pi}{4}},\ 2e^{i\frac{3\pi}{4}},\ 2e^{i\frac{5\pi}{4}},\ 2e^{i\frac{7\pi}{4}}\}$.

Os elementos do conjunto A são todas as soluções da equação complexa tais que a parte real é negativa (ou seja, são os números complexos que pertencem ao 2º e 3º quadrantes).

Assim os elementos do conjunto A são: $\{2e^{i\frac{3\pi}{4}}, 2e^{i\frac{5\pi}{4}}\}$

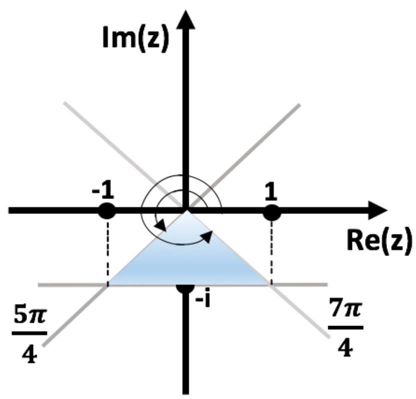
Apresentar os elementos do conjunto A na forma algébrica:

$2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

2018, Época especial, caderno 2

39. Sabendo que $\frac{5\pi}{4} \leq arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \;\Leftrightarrow\; \pi + \frac{\pi}{4} \leq arg(z) \leq 2\pi - \frac{\pi}{4}$, vamos representar, no plano complexo, a condição $\frac{5\pi}{4} \leq arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \;\wedge\; Im(z) \geq -1$:



A região definida pela condição é um triângulo, calculando a sua área:

$$A_{triângulo} = \frac{b \times a}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

Opção(D)

2017, 1ª fase, grupo I

40. Vamos começar por simplificar e passar para a forma algébrica os números complexos z_1 e z_2.

$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} = \frac{1-3i^3}{1+i} = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+3i-3i^2}{1+1} = \frac{1+2i+3}{2} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$

$z_2 = -3kcis(\frac{3\pi}{2}) = -3k[\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})] = -3k(0-i) = 3ki$

Sabemos que no plano complexo, a distância entre a imagem geométrica de z_1 e a imagem geométrica de z_2 é igual a $\sqrt{5}$, logo vem que:

$|z_1-z_2| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |2+i-3ki| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |2+i(1-3k)| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{2^2+(1-3k)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{4+1-6k+9k^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5-6k+9k^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5-6k+9k^2 = 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -6k+9k^2 = 0 \Leftrightarrow k(-6+9k) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee -6+9k = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{6}{9}$

Como $k \in \mathbb{R}^+$, $k = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

2017, 1ª fase, grupo II

41. z é um número complexo da forma: $z = \rho cis(\frac{\pi}{5})$.

- $iz = 1cis(\frac{\pi}{2}) \times \rho cis(\frac{\pi}{5}) = \rho cis(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}) = \rho cis(\frac{7\pi}{10})$
- $-5iz = 5cis(\pi) \times \rho cis(\frac{7\pi}{10}) = 5\rho cis(\pi + \frac{7\pi}{10}) = 5\rho cis(\frac{17\pi}{10})$

$\frac{17\pi}{10} - 2\pi = -\frac{3\pi}{10}$

Opção(A)

2017, 2ª fase, grupo I

42. Vamos começar por determinar a forma algébrica do número complexo z_2.

$z_1 \times \overline{z_2} = 4 - 3i \;\Leftrightarrow\; (2+i) \times \overline{z_2} = 4 - 3i \;\Leftrightarrow\; \overline{z_2} = \frac{4-3i}{2+i} \;\Leftrightarrow\; \overline{z_2} = \frac{(4-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$
$\Leftrightarrow\; \overline{z_2} = \frac{8-4i-6i+3i^2}{2^2+1^2} \;\Leftrightarrow\; \overline{z_2} = \frac{5-10i}{5} \;\Leftrightarrow\; \overline{z_2} = 1 - 2i$

Logo, $z_2 = 1 + 2i$

Agora vamos escrever $\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4})$ na forma algébrica:

$\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})] = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}i = 1 + i$

Vamos mostrar que o número complexo $\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4})$ verifica a condição $|z - z_1| = |z - z_2|$:

$|z - z_1| = |z - z_2| \;\Leftrightarrow\; |1+i-(2+i)| = |1+i-(1+2i)| \;\Leftrightarrow\; |1+i-2-i| = |1+i-1-2i|$
$\Leftrightarrow\; |-1| = |-i| \;\Leftrightarrow\; 1 = 1$

Como $|z - z_1| = |z - z_2|$ então o número complexo $\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4})$ está a igual distância dos números complexos z_1 e z_2, ou seja, $\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4})$ pertence à mediatriz do segmento de reta z_1z_2.

2017, 2ª fase, grupo II

43. Sabemos que $i^3z = i^2 \times iz = -iz$.

A multiplicação de um número complexo z por i corresponde a uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos da imagem geométrica de z, ou seja, neste caso e observando a figura 4, iz corresponde à imagem geométrica do ponto B.

Como $-iz$ é o simétrico da imagem geométrica de iz, então $-iz$ corresponde a uma rotação de π radianos da imagem geométrica de iz, logo $-iz$ corresponde à imagem geométrica do ponto D.

Opção(D)

2017, Época especial, grupo I

44. Vamos começar por simplificar e passar para a forma trignométrica o número complexo z_1.

O número complexo $1-i$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares (4º quadrante) e $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$.

$z_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}cis\theta} = \frac{\sqrt{2}cis(-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}cis\theta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}cis(-\frac{\pi}{4}-\theta) = cis(-\frac{\pi}{4}-\theta)$

Escrevendo w na forma trignométrica temos:

$w = \overline{z_1} \times z_1^4 = cis(\frac{\pi}{4}+\theta) \times [cis(-\frac{\pi}{4}-\theta)]^4 = cis(\frac{\pi}{4}+\theta) \times 1^4 cis(-\pi-4\theta) = cis(\frac{\pi}{4}+\theta-\pi-4\theta) = cis(-\frac{3\pi}{4}-3\theta)$

Como $\theta \in]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}[$ vem que:

$\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} < -3\theta < -\frac{3\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} < -\frac{3\pi}{4} - 3\theta < -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{6\pi}{4} < -\frac{3\pi}{4} - 3\theta < -\frac{9\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{6\pi}{4} < -\frac{3\pi}{4} - 3\theta < -\pi$

Como $Arg(w) \in]-\frac{6\pi}{4}, -\pi[$ então o número complexo w pertence ao 2º quadrante, ou seja, $Re(w) < 0$, $Im(w) > 0$ e $|w| = 1$.

Logo o número complexo w pertence ao conjunto A.

2017, Época especial, grupo II

45. Como $\theta \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$, o número complexo $3cis\theta$ está no 3ºquadrante do plano complexo.

$z = -3cis\theta$ é o simétrico da imagem geométrica de $3cis\theta$, então z corresponde a uma rotação de π radianos da imagem geométrica de $3cis\theta$, logo, z está no 1ºquadrante do plano complexo.

Opção(A)

2016, 1ª fase, grupo I

46. Vamos começar por escrever o número complexo $-1+\sqrt{3}i$ na forma trignométrica:

$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$$\begin{cases} tg\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} \\ \theta \in 2^o Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Logo, $-1+\sqrt{3}i = 2cis(\frac{2\pi}{3})$

Vamos simplificar e escrever na forma trignométrica o número complexo z_1:

$z_1 = \frac{8cis\theta}{-1+\sqrt{3}i} = \frac{8cis\theta}{2cis(\frac{2\pi}{3})} = \frac{8}{2}cis(\theta - \frac{2\pi}{3}) = 4cis(\theta - \frac{2\pi}{3})$

$\overline{z_1} \times z_2 = 4cis(-\theta + \frac{2\pi}{3}) \times cis(2\theta) = 4cis(-\theta + \frac{2\pi}{3} + 2\theta) = 4cis(\theta + \frac{2\pi}{3})$

Para o número complexo $\overline{z_1} \times z_2$ ser um número real então $\text{Arg}(\overline{z_1} \times z_2) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\theta + \frac{2\pi}{3} = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ \theta = -\frac{2\pi}{3} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = -1,\ \ \theta < 0\ \ \notin]0, \pi[$

Para $k = 0,\ \ \theta = -\frac{2\pi}{3}\ \ \notin]0, \pi[$

Para $k = 1,\ \ \theta = -\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3}\ \ \in]0, \pi[$

Para $k = 2,\ \ \theta = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}\ \ \notin]0, \pi[$

O valor de $\theta\ \in]0, \pi[$ para o qual $\overline{z_1} \times z_2$ é um número real é $\theta = \frac{\pi}{3}$.

2016, 1ª fase, grupo II

47. O polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 6 do número complexo w é um hexágono regular.

Podemos decompor o hexágono regular em 6 triângulos equiláteros em que o comprimento do lado do hexágono é igual ao raio da circunferência em que o hexágono está inscrito, ou seja, é igual a $|z|$.

Calculando o módulo do número complexo z:

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Logo o perímetro do polígono é igual a:

$$P = 6 \times 5 = 30$$

Opção(C)

2016, 2ª fase, grupo I

48. Vamos simplificar e escrever na forma trignométrica o número complexo z.

O número complexo $-1+i$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares (2º quadrante) e $|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Ou seja, $-1+i = \sqrt{2}cis(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}cis(\frac{3\pi}{4})$

$z = \frac{-1+i}{(\rho cis\theta)^2} = \frac{\sqrt{2}cis(\frac{3\pi}{4})}{\rho^2 cis(2\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{\rho^2}cis(\frac{3\pi}{4} - 2\theta)$

O número complexo $w = -\sqrt{2}i$ pertence ao semieixo imaginário negativo ($\text{Arg}(w) = \frac{3\pi}{2}$) e $|w| = \sqrt{2}$.

$w = -\sqrt{2}i = \sqrt{2}cis(\frac{3\pi}{2})$

Como $z = w$ temos:

$|z| = |w| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \rho^2 = 1 \Leftrightarrow \rho = 1 \ (\rho > 0)$

$\text{Arg}(z) = \text{Arg}(w) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} - 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} - 2k\pi,$ $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\theta = -\frac{3\pi}{4} - 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{8} - k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0,\ \theta = -\frac{3\pi}{8} \ \notin]0, \pi[$

Para $k = 1,\ \theta < 0 \ \notin]0, \pi[$

Para $k = -1$, $\theta = -\frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{5\pi}{8} \in]0, \pi[$

Para $k = -2$, $\theta = -\frac{3\pi}{8} + 2\pi = \frac{13\pi}{8} \notin]0, \pi[$

O valor de $\theta \in]0, \pi[$ e ρ para o qual $z = w$ é $\theta = \frac{5\pi}{8}$ e $\rho = 1$.

2016, 2ª fase, grupo II

49. $\text{Arg}(3+4i) > \frac{\pi}{4} \notin [0, \frac{\pi}{4}]$, por isso este número complexo não pertence à região definida pela condição.

$\text{Re}(6 + 2i) = 6 \notin [1, 5]$, logo este número complexo também não pertence à região definida pela condição.

$\text{Re}(cis\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin [1, 5]$, então este número complexo também não pertence à região definida pela condição.

Opção(C)

2016, Época especial, grupo I

50. Vamos começar por simplificar o número complexo z:

$z = \frac{2i}{1-i} + 2i^{23} = \frac{(2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} + 2i^3 = \frac{2i+2i^2}{1^2+1^2} - 2i = \frac{-2+2i}{2} - 2i = -1 + i - 2i = -1 - i$

O número complexo $z = -1 - i$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares (3º quadrante) e $|-1-i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Ou seja, $z = -1 - i = \sqrt{2}cis(\pi + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}cis(\frac{5\pi}{4})$

Logo, $\overline{z} = \sqrt{2}cis(-\frac{5\pi}{4})$

Como $w^3 = \overline{z}$, através da fórmula de Moivre:

$w = \sqrt[3]{\sqrt{2}cis(-\frac{5\pi}{4})} \Leftrightarrow w = \sqrt[3]{\sqrt{2}}cis(\frac{-\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}),\ k \in \{0,1,2\} \Leftrightarrow w = \sqrt[6]{2}cis(\frac{-\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3})$, $k \in \{0,1,2\}$

Para $k = 0$, $w_1 = \sqrt[6]{2}cis(-\frac{5\pi}{12})$

Para $k = 1$, $w_2 = \sqrt[6]{2}cis(\frac{-\frac{5\pi}{4}+2\pi}{3}) = \sqrt[6]{2}cis(\frac{3\pi}{12}) = \sqrt[6]{2}cis(\frac{\pi}{4})$

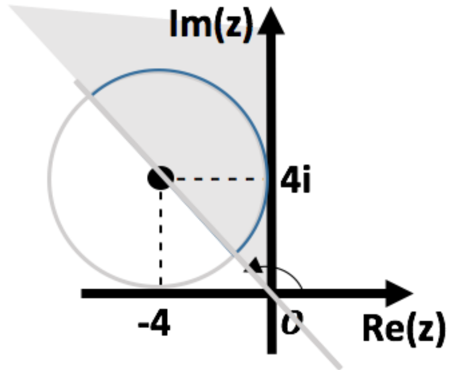
Para $k = 2$, $w_3 = \sqrt[6]{2}cis(\frac{-\frac{5\pi}{4}+4\pi}{3}) = \sqrt[6]{2}cis(\frac{11\pi}{12})$

2016, Época especial, grupo II

51. $|z + 4 - 4i| = 3 \wedge \frac{pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow |z - (-4 + 4i)| = 3 \wedge \frac{pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$

Sabendo que $|z - (-4 + 4i)| = 3$ define uma circunferência de centro no afixo do número complexo $-4+4i$ e raio igual a 3 e que $\frac{pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$ é a região do 3º quadrante limitada pelo semieixo imaginário positivo e a bissetriz dos quadrantes pares, vamos representar no plano complexo a linha definida pela condição $|z-(-4+4i)| = 3$ $\wedge\ \frac{pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$:
Logo o comprimento da linha definida pela condição anterior, é igual a metade do perímetro da circunferência de raio 3, ou seja, $P = \frac{2\pi \times raio}{2} = \frac{2\pi\times 3}{2} = 3\pi$.

Opção(C)



2015, 1ª fase, grupo I

52. Vamos começar por simplificar e escrever o número complexo z na forma trignométrica.

$z = \frac{-2+2i^{19}}{\sqrt{2}cis\theta} = \frac{-2+2i^{3}}{\sqrt{2}cis\theta} = \frac{-2-2i}{\sqrt{2}cis\theta}$

O número complexo $-2-2i$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares (3º quadrante) e $|-2-2i| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Ou seja, $-2-2i = 2\sqrt{2}cis(\pi+\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}cis(\frac{5\pi}{4})$

Logo, temos que:

$z = \frac{-2-2i}{\sqrt{2}cis\theta} = \frac{2\sqrt{2}cis(\frac{5\pi}{4})}{\sqrt{2}cis\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}cis(\frac{5\pi}{4}-\theta) = 2cis(\frac{5\pi}{4}-\theta)$

Para o número complexo z ser um número imaginário puro então $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$\frac{5\pi}{4}-\theta = \frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{2}-k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}-k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, $\theta = \frac{3\pi}{4} \in]0, 2\pi[$

Para $k = 1$, $\theta = \frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4} \notin]0, 2\pi[$

Para $k = -1$, $\theta = \frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4} \in]0, 2\pi[$

Para $k = -2$, $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4} \notin]0, 2\pi[$

Os valores de θ para os quais z é um imaginário puro são $\theta = \{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$.

2015, 1ª fase, grupo II

53. Sabendo que o triângulo $[OAB]$ é equilátero e que o ponto A pertence tem abcissa igual a 1, vem que:

$$\overline{OB} = 1 \ \Leftrightarrow \ |z| = 1$$

Podemos então excluir as opções de resposta A e C.

Dado que o triângulo $[OAB]$ é equilátero e que a imagem geométrica de z pertence ao 4º quadrante, temos que:

$$arg(z) = -\frac{\pi}{3} \ \Leftrightarrow \ arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{3} \ \Leftrightarrow \ arg(z) = \frac{5\pi}{3}$$

Opção(D)

2015, 2ª fase, grupo I

54. Vamos começar por simplificar o número complexo z_1:

$z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{2})}$

O número complexo $-1+i$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares (2º quadrante) e $|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Ou seja, $-1+i = \sqrt{2}cis(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}cis(\frac{3\pi}{4})$

$z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{2})} = \frac{\sqrt{2}cis(\frac{3\pi}{4})}{\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}cis(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12}) = cis(\frac{8\pi}{12}) = cis(\frac{2\pi}{3})$

Logo, $\overline{z_1} = cis(-\frac{2\pi}{3})$

Como $z^4 = \overline{z_1}$, através da fórmula de Moivre:

$z = \sqrt[4]{cis(-\frac{2\pi}{3})} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{1}cis(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}),\ k \in \{0,1,2,3\} \Leftrightarrow z = cis(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4})$, $k \in \{0,1,2,3\}$

Para $k=0$, $z_1 = cis(-\frac{2\pi}{12}) = cis(-\frac{\pi}{6})$

Para $k=1$, $z_2 = cis(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}) = cis(\frac{4\pi}{12}) = cis(\frac{\pi}{3})$

Para $k=2$, $z_3 = cis(\frac{-\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}) = cis(\frac{10\pi}{12}) = cis(\frac{5\pi}{6})$

Para $k=3$, $z_4 = cis(\frac{-\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}) = cis(\frac{16\pi}{12}) = cis(\frac{4\pi}{3})$

2015, 2ª fase, grupo II

55. De acordo com a figura 6, o centro do quadrado coincide com a origem e cada lado do quadrado é paralelo a um eixo. Os vértices do quadrado estão sobre as bissetrizes dos quadrantes por isso vamos considerar:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = -a + bi \quad z_3 = -a - bi \quad z_4 = a - bi$$

$|z_3 - z_1| = |z_4 - z_2| \Leftrightarrow |-a - bi - (a + bi)| = |a - bi - (-a + bi)| \Leftrightarrow |-a - bi - a - bi| =$
$= |a - bi + a - bi| \Leftrightarrow |-2a - 2bi| = |2a - 2bi|$ Afirmação verdadeira

$z_1 + z_4 = 2Re(z_1) \Leftrightarrow a + bi + a - bi = 2(a) \Leftrightarrow 2a = 2a$ Afirmação verdadeira

$\frac{z_4}{i} = z_1 \Leftrightarrow a - bi = i \times (a + bi) \Leftrightarrow a - bi = ai - b$ Afirmação falsa

$-\overline{z_1} = z_2 \Leftrightarrow -(a - bi) = -a + bi \Leftrightarrow -a + bi = -a + bi$ Afirmação verdadeira

2015, Época especial, grupo I

56. Sabemos que o ângulo entre duas raízes de índice n consecutivas é igual a $\frac{2\pi}{n}$. Como z_1 e z_2 são vértices consecutivos do polígono regular, basta determinarmos o ângulo entre eles para calcularmos o número de lados n do polígono.

Vamos começar por simplificar e escrever na forma trignométrica os números complexos z_1 e z_2.

O número complexo $1 + i$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares (1º quadrante) e $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Logo, $z_1 = (1 + i)^6 = (\sqrt{2} cis(\frac{\pi}{4}))^6 = (\sqrt{2})^6 cis(\frac{6\pi}{4}) = 8cis(\frac{3\pi}{2})$

O número complexo $8i$ pertence ao semieixo imaginário positivo ($\text{Arg}(8i) = \frac{\pi}{2}$) e $|w| = 8$. Ou seja, $8i = 8cis(\frac{\pi}{2})$.

$z_2 = \frac{8i}{cis(-\frac{6\pi}{5})} = \frac{8cis(\frac{\pi}{2})}{cis(-\frac{6\pi}{5})} = \frac{8}{1}cis(\frac{\pi}{2} + \frac{6\pi}{5}) = 8cis(\frac{17\pi}{10})$

O ângulo entre z_1 e z_2 é igual a $\text{Arg}(z_2) - \text{Arg}(z_1)$:

$$\frac{17\pi}{10} - \frac{3\pi}{2} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{10} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow n = 10$$

2015, Época especial, grupo II