Resolução - Monotonia e Extremos relativos

1. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g no intervalo $]1, +\infty[$:

   $g'(x) = (x^2 - 3x - 2\ln x)' = 2x - 3 - \frac{2}{x} = \frac{2x^2-3x-2}{x}$

   Os extremos relativos de g correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

   $g'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x^2-3x-2}{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 - 3x - 2 = 0 \;\wedge\; x \neq 0 \;\Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow\; x = \frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times(-2)}}{2\times2} \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{1}{2} \;\vee\; x = 2$

   Logo, $g'(x)$ tem um zero em $]1, +\infty[$ igual a 2.

   $g'(\frac{3}{2}) < 0$

   $g'(3) > 0$

   De modo a estudarmos a monotonia da função g vamos construir um quadro de sinal:

x	1		2	$+\infty$
$g'(x)$	n.d.	-	0	$+$
$g(x)$	n.d.	$\searrow$	Mínimo	$\nearrow$

O gráfico de g é decrescente no intervalo $]1,2]$ e é crescente no intervalo $[2,+\infty[$.

$g(2) = 4 - 6 - 2\ln 2 = -2 - 2\ln 2$

A função g tem um mínimo relativo em $x = 2$ igual a $-2 - 2\ln 2$.

2024, 1ªfase

2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f no intervalo $]0, 2\pi]$:

$f'(x) = \left(\frac{4\cos x}{\sin x - 2}\right)' = 4 \times \frac{-\sin x(\sin x - 2) - \cos x \times \cos x}{(\sin x - 2)^2} = 4 \times \frac{-\sin^2 x + 2\sin x - \cos^2 x}{(\sin x - 2)^2} =$
$= 4 \times \frac{2\sin x - 1}{(\sin x - 2)^2} = \frac{8\sin x - 4}{(\sin x - 2)^2}$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8\sin x - 4}{(\sin x - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow 8\sin x - 4 = 0 \ \wedge (\sin x - 2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \ \wedge \ \sin x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \ \wedge \ \sin x \neq 2_{\ (condio\ universal)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, $x = \frac{\pi}{6} \quad \in \left]0, 2\pi\right] \ \vee \ x = \frac{5\pi}{6} \quad \in \left]0, 2\pi\right]$

Para $k = -1$, $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi \quad \notin \left]0, 2\pi\right] \ \vee \ x = \frac{5\pi}{6} - 2\pi \quad \notin \left]0, 2\pi\right]$

Para $k = 1$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \quad \notin \left]0, 2\pi\right] \ \vee \ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \quad \notin \left]0, 2\pi\right]$

Logo, $f'(x)$ tem dois zeros em $\left]0, 2\pi\right]$ em $x = \frac{\pi}{6}$ e em $x = \frac{5\pi}{6}$.

$f'(\frac{\pi}{7}) = \frac{8\sin\frac{\pi}{7} - 4}{(\sin\frac{\pi}{7} - 2)^2} < 0 \qquad f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{8\sin\frac{\pi}{2} - 4}{(\sin\frac{\pi}{2} - 2)^2} > 0$

$f'(\pi) = \frac{8\sin\pi - 4}{(\sin\pi - 2)^2} < 0 \qquad f'(2\pi) = \frac{8\sin(2\pi) - 4}{(\sin(2\pi) - 2)^2} = -1$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		2π
$f'(x)$	n.d.	-	0	$+$	0	-	-1
$f(x)$	n.d.	$\searrow$	Mínimo	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	Mínimo

O gráfico de f é decrescente no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$ e é crescente no intervalo

$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

A função f tem extremos relativos em $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ e $x = 2\pi$.

2024, Época especial

3. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x+2x}{x}\right)' = \frac{(\frac{1}{x}+2)x-(\ln x+2x)}{x^2} = \frac{1+2x-\ln x-2x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Os extremos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \ \wedge \ x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \ \wedge \ x \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = e \ \wedge \ x \neq 0$

Logo, $f'(x)$ tem um zero em $x = e$.

$f'(1) = \frac{1-\ln 1}{1^2} = 1 > 0$

$f'(3) = \frac{1-\ln 3}{3^2} = \frac{1-\ln 3}{9} < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

O gráfico de f é crescente no intervalo $]0, e]$ e é decrescente no intervalo $[e, +\infty[$.

$f(e) = \frac{\ln e+2e}{e} = \frac{1+2e}{e} = \frac{1}{e} + 2$

x	0		e	$+\infty$
$f'(x)$	n.d.	$+$	0	-
$f(x)$	n.d.	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$

A função f tem um máximo relativo igual a $\frac{1}{e}+2$.

2023, 2ªfase

4. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g:

$$g'(x) = (e^x \cos x)' = e^x \cos x + (-\sin x)e^x = e^x(\cos x - \sin x)$$

Os extremos de g correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0_{\,cond.impossível} \;\vee\; \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \;\vee\; x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \;\;\Leftrightarrow\;\; x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0,\;\; x = \frac{\pi}{4} \;\; \in [0, \pi[$

Para $k=-1$, $x=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}\notin[0,\pi[$

Para $k=1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}\quad\notin[0,\pi[$

Logo, $g'(x)$ tem um zero em $x=\frac{\pi}{4}$.

$g'(0)=e^0(\cos 0-\sin 0)=1>0$

$g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=e^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=e^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)<0$

De modo a estudarmos a monotonia da função g vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π
$g'(x)$	1	$+$	0	-	n.d.
$g(x)$	Mínimo	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	n.d.

O gráfico de g é crescente no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ e é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{4},\pi\right[$.

$g(0)=e^0\cos 0=1$

$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}\cos\frac{\pi}{4}=e^{\frac{\pi}{4}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}$

A função g tem um máximo relativo igual a $\frac{e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}$ e um mínimo relativo igual a 1.

2023, Época especial

5. Apenas o gráfico da opção C representa uma função que tem um mínimo em $x = 0$, pois todos os pontos que estão na vizinhança do ponto $x = 0$ têm ordenada superior ou igual ao valor da ordenada do ponto que tem abcissa igual a 0.

Opção(C)

2022, 2ªfase

6. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f:

$$f'(x) = \left(\tfrac{1}{3}x^3 + ax^2 + a^2x + \sqrt{2}\right)' = x^2 + 2ax + a^2$$

Os extremos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2ax + a^2$

$A = 1 \qquad b = 2a \qquad c = a^2$

Usando a fórmula resolvente temos:

$x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4Ac}}{2A} \Leftrightarrow x = \frac{-2a \pm\sqrt{(2a)^2-4\times1\times a^2}}{2\times1} \Leftrightarrow x = \frac{-2a \pm\sqrt{4a^2-4a^2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2a}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -a$

Para provarmos que a função f não tem extremos vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\infty$	$-a$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$

Concluimos que a função f é crescente em todo o seu domínio, ou seja, não tem extremos.

2022, 2ªfase

7. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f no intervalo $]-\infty,-2[$:

$$f'(x) = \left(\frac{e^{2-x}}{x+2}\right)' = \frac{-e^{2-x}(x+2)-e^{2-x}}{(x+2)^2} = \frac{e^{2-x}(-x-3)}{(x+2)^2}$$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{e^{2-x}(-x-3)}{(x+2)^2}=0 \;\Leftrightarrow\; e^{2-x}(-x-3)=0 \;\wedge\; (x+2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; e^{2-x}=0_{\;(cond.\,impossível)} \;\vee\; -x-3=0 \;\wedge\; x+2\neq 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; e^{2-x}=0_{\;(cond.\,impossível)} \;\vee\; x=-3 \;\wedge\; x\neq -2$

Logo, $f'(x)$ tem um zero em $x=-3$.

$f'(-4) = \frac{e^{2+4}(4-3)}{(-4+2)^2} = \frac{e^6}{4} > 0$

$f'(-1) = \frac{e^{2+1}(1-3)}{(-1+2)^2} = -\frac{2e^3}{1} = -2e^3 < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\infty$	-3		-2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n.d.
$f(x)$	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	n.d.

O gráfico de f é crescente no intervalo $]-\infty,-3]$ e é decrescente no intervalo $[-3,-2[$.

$f(-3)=\frac{e^{2+3}}{-3+2}=-e^5$

A função f tem um máximo relativo igual a $-e^5$.

2022, 1ªfase

8. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f no intervalo $]0,1[$:

$f'(x)=[-x^2(1+2\ln x)]'=-2x(1+2\ln x)+\frac{2}{x}\times -x^2=-2x(1+2\ln x)-2x=$

$=-2x(1+2\ln x+1)=-2x(2+2\ln x)$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; -2x(2+2\ln x)=0 \;\Leftrightarrow\; -2x=0 \;\vee\; 2+2\ln x=0 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x = 0 \ \vee\ \ln x = -1 \ \Leftrightarrow\ x = 0 \ \vee\ x = e^{-1} \ \Leftrightarrow\ x = 0 \ \vee\ x = \frac{1}{e}$

Logo, $f'(x)$ tem um zero em $]0,1[$ igual a $\frac{1}{e}$.

$f'(0,1) > 0$

$f'(0,5) < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$f'(x)$	n.d.	$+$	0	-	n.d.
$f(x)$	n.d.	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	n.d.

O gráfico de f é crescente no intervalo $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ e é decrescente no intervalo $\left[\frac{1}{e}, 1\right[$.

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\left(\frac{1}{e}\right)^2\left[1 + 2\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right] = -\frac{1}{e^2}[1 + 2 \times -1] = \frac{1}{e^2}$

A função f tem um máximo relativo em $x = \frac{1}{e}$ igual a $\frac{1}{e^2}$.

2021, 1ªfase

9. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função h de domínio $[0, \frac{\pi}{2}[$:

$h'(x) = (\sin x + \cos^2 x)' = \cos x + 2\cos x \times (-\sin x) = \cos x - 2\cos x \sin x =$
$= \cos x(1 - 2\sin x)$

Os extremos relativos de h correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$h'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos x(1 - 2\sin x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos x = 0 \;\vee\; 1 - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \;\vee\; \sin x = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\vee\; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\vee\; x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \;\notin [0, \frac{\pi}{2}[\;\vee\; x = \frac{\pi}{6} \in [0, \frac{\pi}{2}[\;\vee\; x = \frac{5\pi}{6} \notin [0, \frac{\pi}{2}[$

Para $k = -1$, $x = \frac{\pi}{2} \;\notin [0, \frac{\pi}{2}[\;\vee\; x = \frac{\pi}{6} \notin [0, \frac{\pi}{2}[\;\vee\; x = \frac{5\pi}{6} \notin [0, \frac{\pi}{2}[$

Para $k = 1$, $x = \frac{\pi}{2} \;\notin [0, \frac{\pi}{2}[\;\vee\; x = \frac{\pi}{6} \notin [0, \frac{\pi}{2}[\;\vee\; x = \frac{5\pi}{6} \notin [0, \frac{\pi}{2}[$

Logo, $h'(x)$ tem um zero em $x = \frac{\pi}{6}$.

$h'(0) = \cos 0(1 - 2\sin 0) = 1$

$h'\left(\frac{\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)(1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)) > 0$

$h'(\frac{\pi}{4}) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)(1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)) < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função h vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$	1	$+$	0	$-$	n.d.
$h(x)$	mínimo	$\nearrow$	máximo	$\searrow$	n.d.

O gráfico de h é crescente no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ e é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$h(0) = \sin 0 + \cos^2 0 = 1$

$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

A função h tem um mínimo relativo igual a 1 e um máximo absoluto igual a $\frac{5}{4}$.

2021, 2ªfase

10. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f no intervalo $]-\infty, 1[$:

$f'(x) = [x - 2 + \ln(3 - 2x)]' = 1 - \frac{2}{3-2x}$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - \frac{2}{3-2x} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 = \frac{2}{3-2x} \;\Leftrightarrow\; 3 - 2x = 2 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{2}$

Logo, $f'(x)$ tem um zero em $x = \frac{1}{2}$.

$f'(0) = 1 - \frac{2}{3-2\times 0} = \frac{1}{3} > 0$

$f'(0,8) = 1 - \frac{2}{3-2\times 0{,}8} < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n.d.
$f(x)$	$\nearrow$	máximo	$\searrow$	n.d.

O gráfico de f é crescente no intervalo $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ e é decrescente no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

$f(0) = \frac{1}{2} - 2 + \ln\left(3 - 2 \times \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \ln 2$

A função f tem um máximo relativo em $x = \frac{1}{2}$ igual a $-\frac{3}{2} + \ln 2$.

2021, Época especial

11. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g no intervalo $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = (x^2 \ln x)' = 2x \ln x + \frac{1}{x} \times x^2 = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1)$$

Os extremos relativos de g correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$g'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x(2\ln x + 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; 2\ln x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; \ln x = -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = e^{-\frac{1}{2}}$

Logo, $g'(x)$ tem um zero em $]0, +\infty[$ igual a $e^{-\frac{1}{2}}$.

$g'(e^{-1}) < 0$

$g'(e) > 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função g vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$	n.d.	-	0	$+$
$g(x)$	n.d.	$\searrow$	Mínimo	$\nearrow$

O gráfico de g é decrescente no intervalo $]0, e^{-\frac{1}{2}}]$ e é crescente no intervalo $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$.

$g(e^{-\frac{1}{2}}) = (e^{-\frac{1}{2}})^2 \ln(e^{-\frac{1}{2}}) = e^{-1} \times (-\frac{1}{2})\frac{1}{e} \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2e}$

A função g tem um mínimo relativo igual a $-\frac{1}{2e}$.

2020, 1ª fase

12. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$g'(x) = \left(\frac{e^{-x}}{x}\right)' = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}$$

Os extremos relativos de g correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$g'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-x}(-x-1) = 0 \;\wedge\; x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; e^{-x} = 0_{\;(cond.\ impossível)} \;\vee\; -x-1 = 0 \;\wedge\; x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-x} = 0_{\;(cond.\ impossível)} \;\vee$
$x = -1 \;\wedge\; x \neq 0$

Logo, $g'(x)$ tem um zero em $x = -1$.

$g'(-2) = \frac{e^2(2-1)}{(-2)^2} = \frac{e^2}{4} > 0$

$g'(-\frac{1}{2}) = \frac{e^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-1)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{4}} = -\frac{\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}}{\frac{1}{4}} = -\frac{4e^{\frac{1}{2}}}{2} = -2e^{\frac{1}{2}} < 0$

$g'(1) = \frac{e^{-1}(-1-1)}{1^2} = -2e^{-1} < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função g vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\infty$ $+\infty$	-1		0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	-	n.d	-
$g(x)$	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	n.d	$\searrow$

O gráfico de g é crescente no intervalo $]-\infty, -1]$ e é decrescente no intervalo $[-1, 0[$ $\cup\ ]0, +\infty[$.

$g(1) = \frac{e^1}{-1} = -e$

A função g tem um máximo relativo igual a $-e$.

2019, 1ª fase, caderno 2

13. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f de domínio $]0,\pi[$:

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)' = \frac{\cos x(2+\cos x)-(-\sin x).\sin x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\cos x + 1 = 0 \;\wedge\; (2+\cos x)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \cos x = -\frac{1}{2} \;\wedge\; 2+\cos x \neq 0 \;\Leftrightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \;\vee\; x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ,\;\; k \in \mathbb{Z} \wedge$
$\cos x \neq -2\ _{(cond.\ universal)} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;\vee\; x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\ ,\;\; k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0,\;\; x = \frac{2\pi}{3} \;\in\,]0,\pi[\;\vee\; x = \frac{4\pi}{3} \notin\,]0,\pi[$

Para $k = -1,\;\; x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3} \notin\,]0,\pi[\;\vee\; x = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3} \notin\,]0,\pi[$

Para $k = 1,\;\; x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3} \notin\,]0,\pi[\;\vee\; x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{10\pi}{3} \notin\,]0,\pi[$

Logo, $f'(x)$ tem um zero em $x = \frac{2\pi}{3}$ no intervalo $]0,\pi[$.

$f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{2\cos\frac{\pi}{2}+1}{(2+\cos\frac{\pi}{2})^2} = \frac{1}{4} > 0$

$f'(\frac{3\pi}{4}) = \frac{2\cos\frac{3\pi}{4}+1}{(2+\cos\frac{3\pi}{4})^2} = \frac{-2\cos\frac{\pi}{4}+1}{(2-\cos\frac{\pi}{4})^2} = \frac{-2\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{(2-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{-\sqrt{2}+1}{(2-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

O gráfico de f é crescente no intervalo $]0,\frac{2\pi}{3}]$ e é decrescente no intervalo $[\frac{2\pi}{3},\pi[$.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	n.d.	$+$	0	-	n.d.
$f(x)$	n.d.	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	n.d.

$f(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2+\cos\frac{2\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2-\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

A função f tem um máximo relativo igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2019, Época especial, caderno 2

14. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g no intervalo $]0,\pi]$:

$$g'(x) = (\frac{1}{2-\sin(2x)})' = \frac{-(-2\cos(2x))}{(2-\sin(2x))^2} = \frac{2\cos(2x)}{(2-\sin(2x))^2}$$

Os extremos relativos de g correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos(2x)}{(2-\sin(2x))^2} = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2x) = 0 \wedge (2-\sin(2x))^2 \neq 0_{\ cond.\ universal} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

Para $k=-1$, $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} < 0 \notin]0,\pi]$

Para $k=0$, $x = \frac{\pi}{4} \in]0,\pi]$

Para $k = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \in]0, \pi]$

Para $k = 2$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2} = \frac{5\pi}{4} \notin]0, \pi]$

Logo, $g'(x)$ tem dois zeros em $]0, \pi]$.

$g'(\frac{\pi}{6}) > 0$

$g'(\frac{\pi}{2}) < 0$

$g'(\pi) = \frac{2\cos(2\pi)}{(2-\sin(2\pi))^2} = \frac{1}{2}$

De modo a estudarmos a monotonia da função g vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$g'(x)$	n.d.	+	0	-	0	+	$\frac{1}{2}$
$g(x)$	n.d.	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	Mínimo	$\nearrow$	Máximo

O gráfico de g é crescente no intervalo $]0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]$ e é decrescente no intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

$g(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2-\sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2-1} = 1$

$g(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{2-\sin(\frac{3\pi}{2})} = \frac{1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$

$g(\pi) = \frac{1}{2-\sin(2\pi)} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$

A função g tem um mínimo relativo igual a $\frac{1}{3}$ e dois máximos relativos iguais a $\frac{1}{2}$

e 1.

2018, 1ª fase, caderno 2

15. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g:

$g'(x) = [\frac{k}{x} + f(x)]' = (\frac{k}{x} + \frac{\ln x}{x})' = -\frac{k}{x^2} + \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2} = -\frac{k}{x^2} + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{-k+1-\ln x}{x^2}$

Os extremos relativos da função g correspondem aos zeros da primeira derivada, logo para $x = 1$ temos que:

$g'(1) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-k+1-\ln 1}{1^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-k+1-0}{1} = 0 \;\Leftrightarrow\; -k+1 = 0 \;\Leftrightarrow\; k = 1$

2017, 2ª fase, grupo II

16. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f para $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$:

$f'(x) = (\frac{2+\sin x}{\cos x})' = \frac{(\cos x)(\cos x)-(-\sin x)(2+\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1+2\sin x}{\cos^2 x}$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1+2\sin x}{\cos^2 x} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + 2\sin x = 0 \wedge \cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \wedge \cos x \neq 0$ (Como $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ então $\cos x > 0$) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\;\; k \in \mathbb{Z}$

Para $k = -1$, $x = -\frac{\pi}{6} - 2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} - 2\pi \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{13\pi}{6} \notin]-\frac{\pi}{2}, 0[\vee x = -\frac{5\pi}{6} \notin]-\frac{\pi}{2}, 0[$

Para $k = 0$, $x = -\frac{\pi}{6} \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\vee x = \frac{7\pi}{6} \notin]-\frac{\pi}{2}, 0[$

Para $k = 1$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{11\pi}{6} \notin]-\frac{\pi}{2}, 0[\vee x = \frac{19\pi}{6} \notin]-\frac{\pi}{2}, 0[$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		0
$f'(x)$	n.d.	-	0	+	n.d.
$f(x)$	n.d.	$\searrow$	Mínimo	$\nearrow$	n.d.

O gráfico de f é decrescente no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}]$, é crescente no intervalo $[-\frac{\pi}{6}, 0[$ e tem um mínimo para $x = -\frac{\pi}{6}$.

2016, 2ª fase, grupo II

17. Vamos determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f:

$$f'(x) = (x^2 e^{1-x})' = 2xe^{1-x} - e^{1-x}x^2 = e^{1-x}(2x - x^2)$$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{1-x}(2x - x^2) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{1-x} = 0_{\,(Eq.imp.)} \vee 2x - x^2 = 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; x(2 - x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \vee 2 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \vee x = 2$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0	-
$f(x)$	Mínimo	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$

O gráfico de f é decrescente no intervalo $[2, +\infty[$, é crescente no intervalo $[0, 2]$, tem um máximo para $x = 2$ e um mínimo para $x = 0$.

2015, Época especial, grupo II