

Resolução - Geometria no espaço

1.

- 1.1. Através da equação que define a reta BC , sabemos que o seu vetor diretor tem coordenadas $(2, 3, 6)$.

Como o plano ABF é perpendicular à reta BC , o vetor $(2, 3, 6)$ é um vetor normal do plano. Assim a equação do plano é da forma: $2x + 3y + 6z + d = 0$.

Como o ponto A pertence ao plano ABF , substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano, conseguimos determinar a constante d :

$$2x + 3y + 6z + d = 0 \Leftrightarrow 2 \times 4 + 3 \times (-4) + 6 \times (-3) + d = 0 \Leftrightarrow d = 22$$

Logo, $ABF : 2x + 3y + 6z + 22 = 0$.

Opção(A)

- 1.2. O ponto B tem a ordenada igual ao dobro da abcissa, logo o ponto B tem coordenadas $(x, 2x, z)$ e pertence à reta BC .

Substituindo o ponto B na equação vetorial da reta BC conseguimos determinar as suas coordenadas:

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 5 + 3k \\ z = 1 + 6k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2k \\ 2x = 5 + 3k \\ z = 1 + 6k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{-----} \\ 2(3 + 2k) = 5 + 3k \\ \text{-----} \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{-----} \\ k = -1 \\ \text{-----} \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2 \times (-1) \\ y = 5 + 3 \times (-1) \\ z = 1 + 6 \times (-1) \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -5 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

O ponto B tem coordenadas (1, 2, -5).

Com as coordenadas dos pontos B (1, 2, -5) e O(0, 0, 0) podemos calcular as coordenadas do vetor \overrightarrow{OB} e a sua norma:

$$\overrightarrow{OB} = B - O = (1, 2, -5) - (0, 0, 0) = (1, 2, -5)$$

$$\|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}$$

Sabendo as coordenadas dos pontos A (4, -4, -3) e O (0, 0, 0) podemos determinar as coordenadas do vetor \overrightarrow{OA} e a sua norma:

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (4, -4, -3) - (0, 0, 0) = (4, -4, -3)$$

$$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{41}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$$\cos(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\|} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) = \frac{(4, -4, -3) \cdot (1, 2, -5)}{\sqrt{41} \times \sqrt{30}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) = \frac{4-8+15}{\sqrt{1230}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) = \frac{11}{\sqrt{1230}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widehat{AOB} = \cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{1230}}\right) \Leftrightarrow \widehat{AOB} \approx 72^\circ$$

2024, 1ª fase

2.

2.1. Os vetores $(1, -5, 0)$ e $(-1, 5, 0)$ não são vetores colineares com o vetor diretor da reta FC , por isso nem a opção (A) nem a opção (B) definem uma reta paralela à reta FC .

Como $(5, 1, -7) = -1 \times (-5, -1, 7)$, então estes vetores são colineares por isso ambas as retas definidas na opções (C) e (D) são paralelas à reta FC .

O ponto A pertence ao semieixo positivo Oy e $\overline{OA} = 4$ logo tem coordenadas $(0, 4, 0)$.

Vamos verificar se o ponto A pertence à reta definida na opção (C):

$$\begin{cases} 0 = -10 + 5k \\ 4 = 2 + k \\ 0 = 14 - 7k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

Concluimos que o ponto A pertence à reta definida na opção (C).

Opção(C)

2.2. O ponto C pertence ao plano $x = 0$ por isso tem coordenadas $(0, y, z)$ e pertence à reta FC . Substituindo o ponto C na equação vetorial da reta FC conseguimos determinar as suas coordenadas:

$$\begin{cases} 0 = -5 - 5k \\ y = 2 - k \\ z = 14 + 7k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = 2 - (-1) \\ z = 14 + 7 \times -1 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y = 3 \\ z = 7 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

O ponto C tem coordenadas $(0, 3, 7)$.

O ponto F pertence ao plano xOy por isso tem coordenadas $(x, y, 0)$ e pertence à reta FC . Substituindo o ponto F na equação vetorial da reta FC conseguimos determinar as suas coordenadas:

$$\begin{cases} x = -5 - 5k \\ y = 2 - k \\ 0 = 14 + 7k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 - 5 \times -2 \\ y = 2 - (-2) \\ k = -2 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \\ \text{---} \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

O ponto F tem coordenadas $(5, 4, 0)$.

A superfície esférica que contém todos os vértices do cubo $[ABCDEFGH]$ tem diâmetro $[FC]$, centro no ponto médio do segmento de reta $[FC]$ e raio igual a $\frac{\overline{FC}}{2}$.

Vamos determinar as coordenadas do ponto médio:

$$M_{[FC]} \left(\frac{5+0}{2}, \frac{4+3}{2}, \frac{0+7}{2} \right)$$

$$M_{[FC]} \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right)$$

Usando a fórmula da distância entre dois pontos conseguimos calcular o diâmetro da superfície esférica:

$$d(FC) = \sqrt{(5-0)^2 + (4-3)^2 + (0-7)^2} = \sqrt{75}$$

Assim o raio da superfície esférica é igual a $\frac{\sqrt{75}}{2}$.

A superfície esférica que contém todos os vértices do cubo $[ABCDEFGH]$ tem equação:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{75}{4}$$

2024, 2ª fase

3.

3.1. O vetor $(1, -3, 5)$ é um vetor normal ao plano que contém a base do cone. Por isso este vetor também é perpendicular a todos os planos paralelos a este.

Logo a equação do plano paralelo ao plano que contém a base do cone é da forma:

$$x + 2y + d = 0$$

Como o ponto $(1, -3, 5)$ pertence ao plano, substituindo as coordenadas deste ponto na equação do plano, conseguimos determinar a constante d :

$$x + 2y + d = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 \times (-3) + d = 0 \Leftrightarrow d = 5$$

Uma equação do plano paralelo ao plano que contém a base do cone é:

$$x + 2y + 5 = 0.$$

Opção(C)

- 3.2. O ponto A pertence ao eixo Ox por isso tem coordenadas $(x, 0, 0)$ e pertence ao plano que contém a base do cone. Substituindo o ponto A na equação do plano da base do cone conseguimos determinar x :

$$x + 2 \times 0 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 8$$

O ponto A tem coordenadas $(8, 0, 0)$.

O ponto B pertence ao eixo Oy por isso tem coordenadas $(0, y, 0)$ e pertence ao plano que contém a base do cone. Substituindo o ponto B na equação do plano da base do cone conseguimos determinar y :

$$0 + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = 4$$

O ponto B tem coordenadas $(0, 4, 0)$.

Vamos determinar as coordenadas do ponto médio de $[AB]$:

$$M\left(\frac{8+0}{2}, \frac{4+0}{0}, 0\right)$$

$$M(4, 2, 0)$$

Vamos escrever a equação vetorial da reta VM :

$$VM: (x, y, z) = (4, 2, 0) + k(1, 2, 0), \quad k \in \mathbb{R}$$

Como o ponto V pertence à reta VM então sabemos que as suas coordenadas são da forma $(4 + k, 2 + 2k, 0)$.

Sabendo que a abcissa do ponto V tem menos uma unidade do que a sua ordenada temos que:

$$4 + k - 1 = 2 + 2k \Leftrightarrow k = 3$$

As coordenadas do ponto V são $(7, 8, 0)$.

2024, Época especial

4.

4.1. A reta OD tem a mesma direção da reta AC , por isso o seu vetor diretor tem de ser colinear com o vetor diretor da reta AC .

Como os vetores $(0, 3, -4)$ e $(0, 4, 3)$ não são colineares então a **Opção(C)** e a **Opção(D)** estão excluídas.

Os vetores $(0, 4, 3)$ e $(0, 2, \frac{3}{2})$ são colineares porque $(0, 4, 3) = 2(0, 2, \frac{3}{2})$.

Vamos verificar se o ponto $O(0, 0, 0)$ pertence à reta definida na **Opção(A)**:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 6 + 2k \\ 0 = 8 + \frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ k = -3 \\ k = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

Como $-3 \neq -\frac{16}{3}$ então o ponto $O(0, 0, 0)$ não pertence à reta da **Opção(A)**, logo esta opção está excluída.

Vamos confirmar que o ponto $O(0, 0, 0)$ pertence à reta definida na **Opção(B)**:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = -4 + 2k \\ 0 = -3 + \frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases}$$

Opção(B)

4.2. Sabendo que $\overline{OE} = 12,5$ então as coordenadas do ponto E são $(0; 12,5; 0)$.

O vetor diretor da reta AC tem coordenadas $(0, 4, 3)$ e é também um vetor normal ao plano CBE .

A equação do plano CBE é da forma:

$$4y + 3z + d = 0$$

Como o ponto E pertence ao plano CBE , substituindo as coordenadas do ponto E na equação do plano, conseguimos determinar a constante d :

$$4y + 3z + d = 0 \Leftrightarrow 4 \times 12,5 + 3 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -50$$

Uma equação do plano CBE é: $4y + 3z - 50 = 0$.

As coordenadas genéricas de um ponto P pertencente à reta AC são:

$$P(10, 4k, 3k)$$

.

Como o ponto C pertence ao plano CBE (ponto de interseção do plano CBE com a reta AC), substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano CBE conseguimos calcular a constante k :

$$\begin{aligned} 4y + 3z - 50 = 0 &\Leftrightarrow 4 \times 4k + 3 \times 3k - 50 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 16k + 9k - 50 = 0 &\Leftrightarrow k = \frac{50}{25} \Leftrightarrow k = 2 \end{aligned}$$

Substituindo $k = 2$ nas coordenadas genéricas do ponto conseguimos saber as coordenadas do ponto C :

$$C(10, 8, 6)$$

2023, 1ª fase

5.

5.1. A superfície esférica de diâmetro $[AG]$ tem centro no ponto médio do segmento de reta $[AG]$ e raio igual a $\frac{\overline{AG}}{2}$.

Vamos determinar as coordenadas do ponto médio:

$$M_{[AG]} \left(\frac{4+12}{2}, \frac{0+\frac{13}{2}}{2}, \frac{0+2}{2} \right)$$

$$M_{[AG]} \left(8, \frac{13}{4}, 1 \right)$$

Usando a fórmula da distância entre dois pontos conseguimos calcular o raio da superfície esférica:

$$d(AG) = \sqrt{(4 - 12)^2 + \left[0 - \left(\frac{13}{2}\right)\right]^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{\frac{441}{4}} = \frac{21}{2}$$

O raio da superfície esférica de diâmetro $[AG]$ é igual a $\frac{\frac{21}{2}}{2} = \frac{21}{4}$.

A superfície esférica de diâmetro $[AG]$ tem equação:

$$(x - 8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z - 1)^2 = \frac{441}{16}$$

Opção(A)

5.2. Sabendo as coordenadas do ponto G e um vetor diretor da reta FG , uma equação vetorial desta reta é:

$$GF: (x, y, z) = \left(12, \frac{13}{2}, 2\right) + k(3, 4, 0), \quad k \in \mathbb{R}$$

O vetor diretor da reta EL tem coordenadas $(3, 4, 0)$ e é também um vetor normal ao plano AFE .

A equação do plano AFE é da forma:

$$3x + 4y + d = 0$$

Como o ponto A pertence ao plano AFE , substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano, conseguimos determinar a constante d :

$$3x + 4y + d = 0 \Leftrightarrow 3 \times 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$$

Uma equação do plano AFE é: $3x + 4y - 12 = 0$.

As coordenadas genéricas de um ponto P pertencente à reta GF são:

$$P\left(12 + 3k, \frac{13}{2} + 4k, 2\right)$$

Como o ponto F pertence ao plano AFE (ponto de interseção do plano AFE com a reta GF), substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano AFE conseguimos calcular a constante k :

$$3(12 + 3k) + 4\left(\frac{13}{2} + 4k\right) - 12 = 0 \Leftrightarrow 36 + 9k + 26 + 16k - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25k = -50 \Leftrightarrow k = -\frac{50}{25} \Leftrightarrow k = -2$$

Substituindo $k = -2$ nas coordenadas genéricas do ponto conseguimos saber as coordenadas do ponto F :

$$F\left(6, -\frac{3}{2}, 2\right)$$

2023, 2ª fase

6.

6.1. O plano perpendicular ao eixo Ox é da forma $x = \text{constante}$.

Sabendo que o plano passa no ponto A de coordenadas $(2\sqrt{3}, 6, 0)$, então tem equação igual a $x = 2\sqrt{3}$.

Opção(C)

6.2. Para sabermos a medida da base do triângulo $[OBA]$ vamos calcular \overline{OA} :

$$\overline{OA} = \sqrt{(2\sqrt{3} - 0)^2 + (6 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 4\sqrt{3}$$

Vamos determinar a equação do plano mediador de $[OA]$:

$$d(BO) = d(BA) \Leftrightarrow \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2} = \sqrt{(x - 2\sqrt{3})^2 + (y - 6)^2 + (z - 0)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x^2 - 4\sqrt{3}x + 12 + y^2 - 12y + 36 + z^2 \Leftrightarrow 4\sqrt{3}x + 12y - 48 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}x + 3y - 12 = 0$$

As coordenadas genéricas de um ponto P pertencente à reta AB são:

$$P(\sqrt{3}k, 16 - 5k, 0)$$

.

Como o ponto B pertence ao plano mediador de $[OA]$ (ponto de interseção do plano mediador de $[OA]$ com a reta AB), substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano mediador de $[OA]$ conseguimos calcular a constante k :

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3}k + 3(16 - 5k) - 12 = 0 \Leftrightarrow 4 \times 3k + 48 - 15k - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -12k + 36 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{36}{12} \Leftrightarrow k = 3$$

Substituindo $k = 3$ nas coordenadas genéricas do ponto conseguimos saber as coordenadas do ponto B:

$$B(3\sqrt{3}, 1, 0)$$

O ponto médio do segmento de reta OA tem coordenadas $(\frac{2\sqrt{3}+0}{2}, \frac{6+0}{2}, 0)$, ou seja, $M_{[OA]}(\sqrt{3}, 3, 0)$.

Para sabermos a medida da altura do triângulo $[OBA]$ vamos calcular \overline{BM} :

$$\overline{BM} = \sqrt{(3\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 + (1 - 3)^2 + (0 - 0)^2} = 4$$

O volume do prisma é igual a:

$$V_{[OABCDE]} = A_{[OAB]} \times altura = \frac{\overline{OA} \times \overline{BM}}{2} \times \overline{OD} = \frac{4\sqrt{3} \times 4}{2} \times 5 = 40\sqrt{3}$$

2023, Época especial

7.

7.1. Para que dois planos sejam perpendiculares o produto escalar dos seus vetores normais tem de ser igual a zero.

$$(1, 4, -3) \cdot (0, 4, -3) \neq 0, \quad \text{logo não pode ser a opção (A)}$$

$$(3, 4, 1) \cdot (0, 4, -3) \neq 0, \quad \text{logo não pode ser a opção (B)}$$

Tanto a opção (C) como a opção (D) verificam esta condição.

Vamos averiguar se o ponto de coordenadas $(1, 2, -1)$ pertence ao plano definido na opção(C):

$$3 \times 2 + 4 \times (-1) \neq 8$$

Concluimos que o ponto $(1, 2, -1)$ não pertence ao plano definido na opção(D).

Vamos confirmar que o ponto de coordenadas $(1, 2, -1)$ pertence ao plano definido na opção(D):

$$1 + 3 \times 2 + 4 \times (-1) = 3$$

Concluimos que o ponto $(1, 2, -1)$ pertence ao plano definido na opção(C).

Opção(D)

- 7.2. O ponto A pertence ao eixo Oy por isso tem coordenadas $(0, y, 0)$ e pertence ao plano que contém a base do cone. Substituindo o ponto A na equação do plano da base do cone conseguimos determinar y :

$$4y - 3 \times 0 = 16 \Leftrightarrow y = 4$$

O ponto A tem coordenadas $(0, 4, 0)$.

Vamos escrever a equação vetorial da reta VA :

$$VA: (x, y, z) = (0, 4, 0) + k(0, 4, -3), \quad k \in \mathbb{R}$$

O ponto V pertence ao eixo Oz por isso tem coordenadas $(0, 0, z)$ e pertence à reta VA . Substituindo o ponto V na equação vetorial da reta VA conseguimos

determinar z :

$$\begin{cases} 0 = 0 + 0 \\ 0 = 4 + 4k \\ z = -3k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ k = -1 \\ z = -3 \times -1 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ \text{_____} \\ z = 3 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

O ponto V tem coordenadas $(0, 0, 3)$.

Calculando a altura do cone:

$$d(VA) = \sqrt{0 + (4 - 0)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

O volume do cone é igual a:

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 5 = \frac{45}{3}\pi = 15\pi$$

2022, 1ª fase

8.

8.1. Como os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{HE} formam um ângulo de 90° então o seu produto escalar é igual a 0.

Opção(B)

8.2. Vamos começar por determinar as coordenadas do vetor \overrightarrow{BA} :

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (-3, 6, -2)$$

O vetor \overrightarrow{BA} é um vetor normal ao plano ADE por isso a equação deste plano é da forma:

$$ADE: -3x + 6y - 2z + d = 0$$

Como o ponto A pertence ao plano ADE , substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano, conseguimos determinar a constante d :

$$-3x + 6y - 2z + d = 0 \Leftrightarrow -3 \times -2 + 6 \times 5 - 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -36$$

Logo, $ADE : -3x + 6y - 2z - 36 = 0$.

As coordenadas genéricas de um ponto P pertencente à reta de equação

$$(x, y, z) = (0, 0, 3) + k(1, -1, -1), \quad k \in \mathbb{R} \text{ são:}$$

$$P(k, -k, 3 - k)$$

Como o ponto E pertence ao plano ADE (ponto de interseção do plano ADE com a reta acima), substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano ADE conseguimos calcular a constante k :

$$\begin{aligned} -3x + 6y - 2z - 36 = 0 &\Leftrightarrow -3k - 6k - 2(3 - k) - 36 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -9k - 6 + 2k - 36 = 0 &\Leftrightarrow -7k = 42 \Leftrightarrow k = -6 \end{aligned}$$

Substituindo $k = -6$ nas coordenadas genéricas do ponto conseguimos saber as coordenadas do ponto E:

$$E(-6, 6, 9)$$

9.

9.1. A base $[GHIJKL]$ do prisma hexagonal é perpendicular ao eixo Oz , ou seja a equação do plano que contém esta base é da forma:

$$z = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Sabendo que o centro do prisma tem cota igual a 2 então a cota de todos os pontos pertencentes ao plano que define a base $[GHIJKL]$ do prisma hexagonal têm cota igual ao dobro de dois.

Assim vem que a equação que define o plano que contém a face $[GHIJKL]$ do prisma é $z = 4$.

Opção(B)

9.2. O vetor normal ao plano BCJ tem coordenadas $(3, -\sqrt{3}, 0)$ e é também um vetor normal ao plano LEF .

A equação do plano LEF é da forma:

$$-3x - \sqrt{3}y + d = 0$$

Pela observação da figura sabemos que plano CFG corta o prisma em duas metades iguais por isso o ponto M , o centro do prisma, pertence a este plano.

O ponto F pertence ao eixo Oy e a sua ordenada é igual à ordenada do ponto M , assim F tem coordenadas $(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$.

Como o ponto F pertence ao plano LEF , substituindo as coordenadas do ponto F na equação do plano, conseguimos determinar a constante d :

$$-3x - \sqrt{3}y + d = 0 \Leftrightarrow -3 \times 0 - \sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} + d = 0 \Leftrightarrow d = 2$$

Uma equação do plano LEF é: $-3x - \sqrt{3}y + 2 = 0$.

2022, Época especial

10.

10.1. Para que a reta seja perpendicular à reta EF o produto escalar do seu vetor diretor com o vetor diretor da reta EF tem de ser igual a 0.

$$(A) : (2, -3, 0) \cdot (-3, -2, 2) = 0$$

$$(B) : (0, 3, -3) \cdot (-3, -2, 2) = -12$$

$$(C) : (0, 3, 3) \cdot (-3, -2, 2) = 0$$

$$(D) : (2, 0, -3) \cdot (-3, -2, 2) = -12$$

Concluimos que só poderá ser a opção(A) ou a opção(C).

Vamos averiguar se o ponto E pertence à reta definida na opção(A):

$$(7, 2, 15) = (7, -3, 3) + k(2, -3, 0); \quad k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 + 2k \\ 2 = -3 - 3k; \\ 15 = 3 + 0k \end{cases}; \quad k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -\frac{5}{3} \\ 12 = 0 \end{cases}$$

Concluimos que o ponto E não pertence à reta definida na opção(A).

Vamos averiguar se o ponto E pertence à reta definida na opção(C):

$$(7, 2, 15) = (7, -10, 3) + k(0, 3, 3); \quad k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 + 0k \\ 2 = -10 + 3k; \\ 15 = 3 + 3k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ k = 4 \\ k = 4 \end{cases}$$

Concluimos que o ponto E pertence à reta definida na opção (C).

Opção(C)

10.2. Através da condição que define a reta EF , sabemos que o seu vetor diretor tem coordenadas $(-3, -2, 2)$.

Como o plano FGB é perpendicular à reta EF , o vetor $(-3, -2, 2)$ é um vetor normal do plano. Assim a equação do plano é da forma: $-3x - 2y + 2z + d = 0$.

Como o ponto G pertence ao plano FGB , substituindo as coordenadas do ponto G na equação do plano, conseguimos determinar a constante d :

$$-3x - 2y + 2z + d = 0 \Leftrightarrow -3 \times 6 - 2 \times 10 + 2 \times 13 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$$

Logo, $FGB : -3x - 2y + 2z + 12 = 0$.

Sabendo que o ponto B pertence ao eixo Oy , então tem coordenadas $(0, y, 0)$.

Como o ponto B pertence ao plano FGB , substituindo as coordenadas do ponto B na equação do plano conseguimos determinar a sua ordenada:

$$-3 \times 0 - 2y + 2 \times 0 + 12 = 0 \Leftrightarrow y = 6$$

O ponto B tem coordenadas $(0, 6, 0)$.

O raio da superfície esférica é igual à distância entre os pontos E e G :

$$d(EG) = \sqrt{(7 - 6)^2 + (2 - 10)^2 + (15 - 13)^2} = \sqrt{69}$$

A equação da superfície esférica de centro no ponto B e que passa no ponto D é:

$$x^2 + (y - 6)^2 + z^2 = 69$$

2021, 1ª fase

11.

11.1. A superfície esférica de centro no ponto R e que passa no ponto Q tem raio igual a \overline{RQ} . Vamos calcular a distância entre os pontos R e Q :

$$d(RQ) = \sqrt{(-5 - (-2))^2 + (5 - 1)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{41}$$

A superfície esférica de centro no ponto \mathbb{R} e que passa no ponto \mathbb{Q} tem equação:

$$(x + 5)^2 + (y - 5)^2 + (z + 3)^2 = 41$$

Opção(C)

11.2. Um dos vetores normais ao plano perpendicular à reta RS é o vetor \overrightarrow{PQ} .

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2, 1, 1) - (1, -1, 2) = (-3, 2, -1)$$

Assim a equação do plano é da forma: $-3x + 2y - z + d = 0$.

Como o ponto P pertence ao plano, substituindo as coordenadas do ponto P na equação do plano, conseguimos determinar a constante d :

$$-3x + 2y - z + d = 0 \Leftrightarrow -3 \times 1 + 2 \times (-1) - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 7$$

Uma equação do plano perpendicular à reta RS e que passa no ponto P é $-3x + 2y - z + 7 = 0$.

2021, 2ª fase

12.

12.1. Sabendo que o plano α é perpendicular à reta BE então o vetor normal ao plano α tem de ser colinear com o vetor \overrightarrow{BE} .

O vetor normal ao plano da opção A, de coordenadas $(-1, 6, 2)$, é colinear com o vetor \overrightarrow{BE} . Da mesma forma o vetor normal ao plano da opção C, de coordenadas $(1, -6, -2)$ também é colinear com o vetor \overrightarrow{BE} .

Como os vetores normais aos planos da opções B e D não são colineares com

o vetor \overrightarrow{BE} excluimos estas duas opções.

Vamos verificar se o ponto de coordenadas $(1, 0, 1)$ pertence ao plano da opção A:

$$-x + 6y + 2z = 0 \Leftrightarrow -1 + 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \quad (\text{Não pertence})$$

Só pode ser a opção C mas vamos confirmar que o ponto de coordenadas $(1, 0, 1)$ pertence ao plano da opção C:

$$x - 6y - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + 0 - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad (\text{Pertence})$$

Opção(C)

12.2. Com as coordenadas do ponto E e do vetor \overrightarrow{BE} conseguimos calcular as coordenadas do ponto B:

$$\overrightarrow{BE} = E - B \Leftrightarrow B = (-2, 6, 2) - (-1, 6, 2) \Leftrightarrow B = (-1, 0, 0)$$

Através da fórmula do volume da pirâmide vamos determinar a área da base quadrada da pirâmide:

$$V_{[ABCDE]} = \frac{A_b \times h}{3} \Leftrightarrow 20 = \frac{A_b \times 6}{3} \Leftrightarrow A_b = 10$$

Como $A_b = 10$ então aresta $base = d(AB) = \sqrt{10}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[OAB]$, vamos determinar a distância do ponto O ao ponto A :

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2 \Leftrightarrow (\sqrt{10})^2 = 1^2 + d^2(OA) \Leftrightarrow d^2(OA) = 9 \Leftrightarrow d(OA) = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d(OA) = 3$$

Ou seja o ponto A tem coordenadas $(0,0,3)$.

Calculando as coordenadas do vetor \overrightarrow{AB} :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 0, 0) - (0, 0, 3) = (-1, 0, -3)$$

2021, Época especial

13.

13.1. O ponto A pertence ao plano ABC , substituindo na equação do plano ABC os valores da abcissa e cota podemos calcular o valor da ordenada do ponto A :

$$3x + 4y + 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow 0 + 4y + 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow z = 3$$

O ponto A tem coordenadas $(0, 3, 0)$.

O ponto B também pertence ao plano ABC , substituindo na equação do plano ABC os valores da ordenada e cota podemos calcular o valor da abcissa do ponto B :

$$3x + 4y + 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x + 0 + 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

O ponto B tem coordenadas $(4, 0, 0)$

Pela observação da figura, a altura do cilindro é igual à distância entre os pontos A e B :

$$d(AB) = \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\begin{aligned} V_{cilindro} = A_b \times h &\Leftrightarrow 10\pi = \pi \times \overline{BC}^2 \times \overline{AB} \Leftrightarrow 10 = \overline{BC}^2 \times 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 2 \Leftrightarrow \overline{BC} = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{2}, \quad \overline{BC} > 0 \end{aligned}$$

13.2. O ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P é o pé da perpendicular do ponto P com o plano ABC . Seja P' este ponto.

Vamos começar por determinar uma equação vetorial da reta PP' .

O vetor normal ao plano ABC tem coordenadas $(3, 4, 4)$ e é um vetor diretor da reta PP' .

Sabendo as coordenadas do ponto P e um vetor diretor da reta PP' , uma equação vetorial desta reta é:

$$(x, y, z) = (3, 5, 6) + k(3, 4, 4), \quad k \in \mathbb{R}$$

As coordenadas genéricas do ponto P' pertencente à reta são $(3+3k, 5+4k, 6+4k)$.

Como o ponto P' pertence ao plano ABC (ponto de interseção do plano ABC com a reta PP'), substituindo as coordenadas do ponto P' na equação do plano conseguimos calcular a constante k :

$$\begin{aligned}
 3x + 4y + 4z - 12 = 0 &\Leftrightarrow 3(3 + 3k) + 4(5 + 4k) + 4(6 + 4k) - 12 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 9 + 9k + 20 + 16k + 24 + 16k - 12 = 0 \Leftrightarrow 41k = -41 \Leftrightarrow k = -1
 \end{aligned}$$

Substituindo $k = -1$ nas coordenadas genéricas do ponto P' conseguimos saber as coordenadas do ponto de interseção do plano ABC com a reta PP' o que corresponde às coordenadas do ponto P' :

$$P'(0, 1, 2)$$

2020, 1ª fase

14.

14.1. Através da condição que define a reta AE , sabemos que o seu vetor diretor tem coordenadas $(3, -6, 2)$.

Como o plano EFG é perpendicular à reta AE , o vetor $(3, -6, 2)$ é um vetor normal do plano. Assim a equação do plano é da forma: $3x - 6y + 2z + d = 0$.

Como o ponto G pertence ao plano AEG , substituindo as coordenadas do ponto G na equação do plano, conseguimos determinar a constante d :

$$3x - 6y + 2z + d = 0 \Leftrightarrow 3 \times 5 - 6 \times 3 + 2 \times 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = -9$$

Logo, $AEG : 3x - 6y + 2z - 9 = 0$.

14.2. De acordo com a figura, o centro da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo é o centro do cubo que corresponde ao ponto médio da diagonal espacial

do cubo.

Calculando o ponto médio da diagonal espacial do cubo:

$$M_{[AG]} \left(\frac{7+5}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{4+6}{2} \right)$$

$$M_{[AG]} (6, 2, 5)$$

Calculando o diâmetro da superfície esférica:

$$d(AG) = \sqrt{(7-5)^2 + (1-3)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Determinando o raio da superfície esférica:

$$r = \frac{d(AG)}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

A equação reduzida da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo é:

$$(x-6)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 3$$

2020, 2ª fase

15.

- 15.1. Sabendo as coordenadas dos pontos O (0,0,0) e B (0, 2, 4) podemos determinar as coordenadas do vetor \overrightarrow{BO} e a sua norma:

$$\overrightarrow{BO} = O - B = (0, 0, 0) - (0, 2, 4) = (0, -2, -4)$$

$$\|\overrightarrow{BO}\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$$

Com as coordenadas do vetor \overrightarrow{BE} podemos calcular a sua norma:

$$\overrightarrow{BE} = (2, 2, -2)$$

$$\|\overrightarrow{BE}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{BO} \wedge \overrightarrow{BE}) &= \frac{\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BE}}{\|\overrightarrow{BO}\| \times \|\overrightarrow{BE}\|} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BO} \wedge \overrightarrow{BE}) = \frac{(0, -2, -4) \cdot (2, 2, -2)}{\sqrt{20} \times \sqrt{12}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BO} \wedge \overrightarrow{BE}) = \\ &= \frac{0 - 4 + 8}{\sqrt{240}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BO} \wedge \overrightarrow{BE}) = \frac{4}{\sqrt{240}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BO} \wedge \overrightarrow{BE}) = \frac{4}{\sqrt{240}} \Leftrightarrow \widehat{OBE} \approx 75^\circ \end{aligned}$$

15.2. Vamos começar por determinar as coordenadas do ponto E:

$$\overrightarrow{BE} = E - B \Leftrightarrow (2, 2, -2) = E - (0, 2, 4) \Leftrightarrow E = (2, 4, 2)$$

Sabendo as coordenadas dos pontos O (0,0,0) e E (2, 4, 2) podemos determinar as coordenadas do vetor \overrightarrow{OE}

$$\overrightarrow{OE} = E - O = (2, 4, 2)$$

Como o plano α é perpendicular à reta OE , o vetor (2, 4, 2) é um vetor normal do plano. Assim a equação do plano é da forma: $2x + 4y + 2z + d = 0$.

Pela observação da figura sabemos que o ponto G tem coordenadas (0, 2, 2).

Como o ponto G pertence ao plano α , substituindo as coordenadas do ponto G na equação do plano, conseguimos determinar a constante d :

$$2x + 4y + 2z + d = 0 \Leftrightarrow 2 \times 0 + 4 \times 2 + 2 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$$

Logo, $\alpha : 2x + 4y + 2z - 12 = 0$.

Consideremos os pontos P, Q e R os pontos do plano α que pertencem aos eixos coordenados x , y e z respectivamente:

$$P(x, 0, 0) \quad Q(0, y, 0) \quad R(0, 0, z)$$

O ponto P pertence ao plano α , substituindo na equação do plano α os valores da ordenada e cota podemos calcular o valor da abscissa do ponto P:

$$2x + 0 + 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

O ponto P tem coordenadas $(6, 0, 0)$.

O ponto Q também pertence ao plano α , substituindo na equação do plano α os valores da abscissa e cota podemos calcular o valor da ordenada do ponto Q:

$$0 + 4y + 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow y = 3$$

O ponto Q tem coordenadas $(0, 3, 0)$

O ponto R também pertence ao plano α , substituindo na equação do plano α os valores da abscissa e cota podemos calcular o valor da ordenada do ponto R:

$$0 + 0 + 2z - 12 = 0 \Leftrightarrow z = 6$$

O ponto R tem coordenadas $(0, 0, 6)$

Calculando o volume da pirâmide:

$$V_{[OPQR]} = \frac{A_b \times altura}{3} = \frac{\frac{\overline{OP} \times \overline{OQ}}{2} \times \overline{OR}}{3} = \frac{\frac{6 \times 3}{2} \times 6}{3} = \frac{54}{3} = 18$$

2020, Época especial

16. Tendo em conta que a base da pirâmide [ABCD] é um quadrado regular, então o ponto médio de [AC] é o ponto central da base.

Calculando o ponto médio de [AC]:

$$M_{[AC]} \left(\frac{2+0}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{0+2}{2} \right)$$

Logo,

$$M_{[AC]} (1, 0, 1)$$

O vetor \overrightarrow{MV} é um vetor perpendicular ao plano que contém a base da pirâmide.

Sabendo as coordenadas dos pontos M (1,0,1) e V (3, -1, 2) podemos determinar as coordenadas do vetor \overrightarrow{MV} :

$$\overrightarrow{MV} = V - M = (3, -1, 2) - (1, 0, 1) = (2, -1, 1)$$

Assim a equação do plano é da forma : $2x - y + z + d = 0$.

Como o ponto A pertence ao plano que contém a base da pirâmide, substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano conseguimos calcular a constante d:

$$2 \times 2 - 1 \times 1 + 1 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

Uma das equações do plano que contem a base da pirâmide é: $2x - y + z - 3 = 0$.

2019, 1ª fase, caderno 1

17.

17.1. O ponto A pertence ao eixo Ox por isso tem coordenadas $(x, 0, 0)$ e pertence ao plano ABC , substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano conseguimos calcular x :

$$3x + 4 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

Assim temos que $A(4, 0, 0)$.

De acordo com a figura 2 o ponto B pertence ao eixo Oy por isso tem coordenadas $(0, y, 0)$, sabendo as coordenadas do ponto C temos que $B(0, 3, 0)$.

Sabendo as coordenadas dos pontos A $(4, 0, 0)$ e B $(0, 3, 0)$ podemos determinar a distância \overline{AB} :

$$\overline{AB} = \sqrt{(4 - 0)^2 + (0 - 3)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Sabendo as coordenadas dos pontos G $(6, 11, 0)$ e B $(0, 3, 0)$ podemos determinar a distância \overline{GB} :

$$\overline{GB} = \sqrt{(6 - 0)^2 + (11 - 3)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

Pelas coordenadas do vértice C sabemos que a altura do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ é igual a 6.

Calculando o volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ vem que:

$$V_{[ABCDEFGH]} = A_{[ABGH]} \times altura = 5 \times 10 \times 6 = 300$$

17.2. Sabendo as coordenadas do ponto P e um vetor diretor da reta r , uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (1, -4, 3) + k(3, 4, 0), \quad k \in \mathbb{R}$$

As coordenadas genéricas do ponto Q pertencente à reta r são $(1 + 3k, -4 + 4k, 3)$.

Como o ponto Q pertence ao plano ABC (ponto de interseção do plano ABC com a reta r), substituindo as coordenadas do ponto Q na equação do plano conseguimos calcular a constante k :

$$\begin{aligned} 3x + 4y - 12 = 0 &\Leftrightarrow 3(1 + 3k) + 4(-4 + 4k) - 12 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 + 9k - 16 + 16k - 12 = 0 &\Leftrightarrow 25k = 25 \Leftrightarrow k = 1 \end{aligned}$$

Substituindo $k = 1$ nas coordenadas genéricas do ponto Q conseguimos saber as coordenadas do ponto de interseção do plano ABC com a reta r : $(4, 0, 3)$.

2019, 2ª fase, caderno 1

18.

18.1. Através da equação do plano α , sabemos que um vetor normal a este plano tem coordenadas $(2, 3, -1)$.

Como o plano é paralelo ao plano α , o vetor $(2, 3, -1)$ é também um vetor normal do plano. Assim a equação do plano é da forma: $2x + 3y - z + d = 0$.

Sabendo que a ordenada do ponto A é igual a 4, as suas coordenadas são $(x, 4, z)$.

Como o ponto A pertence à reta r , substituindo na equação da reta r o valor da sua ordenada conseguimos calcular os valores da abscissa e da cota do ponto A através do seguinte sistema:

$$(x, 4, z) = (1, 2, 1) + k(0, 1, 5) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4 = 2 + k \\ z = 1 + 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ k = 2 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ z = 11 \end{cases}$$

Assim, o ponto A tem coordenadas $(1, 4, 11)$.

Substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano, conseguimos determinar a constante d :

$$2x + 3y - z + d = 0 \Leftrightarrow 2 + 12 - 11 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

Logo, o plano tem equação $2x + 3y - z - 3 = 0$.

18.2. As coordenadas genéricas do ponto G pertencente à reta r são $(1, 2 + k, 1 + 5k)$.

Como o ponto G pertence ao plano α (ponto de interseção do plano α com a reta r), substituindo as coordenadas do ponto G na equação do plano conseguimos calcular a constante k :

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z - 3 = 0 &\Leftrightarrow 2 + 3(2 + k) - (1 + 5k) - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 + 6 + 3k - 1 - 5k - 3 = 0 \Leftrightarrow -2k = -4 \Leftrightarrow k = 2 \end{aligned}$$

Substituindo $k = 2$ nas coordenadas genéricas do ponto G conseguimos saber as coordenadas do ponto de interseção do plano α com a reta r :

$$P(1, 4, 11)$$

2019, Época especial, caderno 1

19. Para calcular a área lateral do prisma precisamos de saber as coordenadas do ponto P.

Sabendo as coordenadas do ponto S e um vetor diretor da reta PS, uma equação vetorial da reta PS é:

$$(x, y, z) = (14, 5, 0) + k(2, 3, -1), \quad k \in \mathbb{R}$$

Logo as coordenadas genéricas do ponto P são $(14 + 2k, 5 + 3k, -k)$.

Como o ponto P pertence ao plano PQR, substituindo as coordenadas do ponto P na equação do plano conseguimos calcular a constante k:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z - 15 = 0 &\Leftrightarrow 2(14 + 2k) + 3(5 + 3k) - (-k) - 15 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 28 + 4k + 15 + 9k + k - 15 = 0 &\Leftrightarrow 14k = -28 \Leftrightarrow k = -\frac{28}{14} \Leftrightarrow k = -2 \end{aligned}$$

Logo as coordenadas do ponto P são $(10, -1, 2)$.

Com as coordenadas dos pontos S e P podemos calcular as coordenadas do vetor \overrightarrow{SP} e a sua norma:

$$\overrightarrow{SP} = P - S = (10, -1, 2) - (14, 5, 0) = (-4, -6, 2)$$

$$\|\overrightarrow{SP}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{56}$$

A área lateral do prisma é igual a:

$$A_{lateral} = \overline{SP} \times \overline{PQ} \times 6 = \sqrt{56} \times 4 \times 6 \approx 179,6$$

2018, 1ª fase, caderno 1

20. Através da condição que define a reta r , sabemos que o seu vetor diretor tem coordenadas $(4, 1, -2)$.

Como o plano é perpendicular à reta r , o vetor $(4, 1, -2)$ é um vetor normal do plano. Assim a equação do plano é da forma: $4x + y - 2z + d = 0$.

Como o ponto P pertence à superfície esférica, substituindo na equação da superfície esférica os valores da abscissa e ordenada podemos calcular o valor da cota do ponto P:

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 10 &\Leftrightarrow (1 - 1)^2 + (3 - 2)^2 + (z + 1)^2 = 10 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (z + 1)^2 = 9 &\Leftrightarrow z + 1 = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow z = \pm 3 - 1 \Leftrightarrow z = -4, \text{ porque o ponto P} \\ \text{tem cota negativa}\end{aligned}$$

Assim, o ponto P tem coordenadas $(1, 3, -4)$.

Substituindo as coordenadas do ponto P na equação do plano, conseguimos determinar a constante d :

$$4x + y - 2z + d = 0 \Leftrightarrow 4 + 3 + 8 + d = 0 \Leftrightarrow d = -15$$

Logo, $\alpha : 4x + y - 2z - 15 = 0$.

2018, 2ª fase, caderno 1

21. Sabemos que o ponto P tem coordenadas $(1,1,1)$.

O ponto O é a origem do referencial por isso tem coordenadas (0,0,0).

Calculando as coordenadas do vetor \overrightarrow{OP} :

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (1, 1, 1) - (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$$

Calculando as coordenadas do vetor \overrightarrow{u} :

$$\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{OP} = -2(1, 1, 1) = (-2, -2, -2)$$

Como $Q = P + \overrightarrow{u}$, vem que:

$$Q = (1, 1, 1) + (-2, -2, -2) = (-1, -1, -1)$$

O ponto Q é o simétrico do ponto P em relação à origem do referencial. Como o ponto P pertence à superfície esférica então [PQ] é o diâmetro da superfície esférica.

2018, Época especial, caderno 1

22.

22.1. O ponto T pertence ao eixo Oz logo tem abcissa e ordenada nulas e como pertence ao plano $z = 3$ as suas coordenadas são (0, 0, 3). Como o ponto T' é o simétrico do ponto T relativamente à origem do referencial tem coordenadas (0, 0, -3).

A superfície esférica tem diâmetro [TT'] que é igual a 6, assim temos que o raio é igual a 3.

O centro da superfície esférica corresponde à origem do referencial (0, 0, 0) que é o ponto médio do diâmetro [TT']. A equação da superfície esférica é:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

22.2. O ponto Q pertence ao eixo Oy por isso tem abcissa e cota nulas.

Como o ponto Q pertence ao plano PQV, substituindo na equação do plano PQV o valor da abcissa podemos calcular o valor da ordenada do ponto Q:

$$x + y = 2 \Leftrightarrow 0 + y = 2 \Leftrightarrow y = 2$$

Assim o ponto Q tem coordenadas (0, 2, 0) e já sabemos que o ponto T tem coordenadas (0, 0, 3).

Vamos calcular o vetor diretor da reta TQ:

$$\overrightarrow{TQ} = Q - T = (0, 2, 0) - (0, 0, 3) = (0, 2, -3)$$

Uma condição cartesiana que define a reta TQ é:

$$x = 0 \wedge \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3} \Leftrightarrow x = 0 \wedge \frac{y}{2} = \frac{3-z}{3}$$

2017, 1ª fase, grupo II

23.

23.1. De acordo com a figura 5 o ponto A pertence ao plano xOy, por isso tem cota nula e a sua ordenada é igual à ordenada do ponto D, ou seja, é igual 4.

Como o ponto A pertence ao plano ACG, substituindo na equação do plano ACG os valores da ordenada e cota podemos calcular o valor da abcissa do ponto A:

$$x + y - z - 6 = 0 \Leftrightarrow x + 4 - 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Logo o vértice A tem abcissa igual a 2.

23.2. Vamos escrever a equação do plano ACG em ordem a z :

$$x + y - z - 6 = 0 \Leftrightarrow z = x + y - 6$$

Substituindo a variável z no sistema de equações que define a reta r vem que:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - 1 = z \\ 1 - y = z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = x + y - 6 \\ 1 - y = x + y - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x - y = -6 + 1 \\ - - - - - \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} -y = -5 \\ - - - - \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ - - - \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ 1 - 5 = x + 5 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ 1 - 5 - 5 + 6 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Como o ponto de interseção da reta r com o plano ACG pertence ao plano ACG, substituindo na equação do plano ACG os valores da abcissa e ordenada podemos calcular o valor da cota do ponto:

$$x + y - z - 6 = 0 \Leftrightarrow -3 + 5 - z - 6 = 0 \Leftrightarrow z = -4$$

As coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG são $(-3, 5, -4)$.

2017, 2ª fase, grupo II

24.

- 24.1. De acordo com a figura 6, a secção produzida no cilindro pelo plano de equação $x = 1$, corresponde ao retângulo cujos lados são a altura do cilindro (igual a 3) e o diâmetro da base do cilindro (igual a 2).

$$A_{\text{retângulo}} = c \times l = 3 \times 2 = 6$$

- 24.2. Pela observação da figura 6, sabemos que o ponto C tem coordenadas (1, 2, 3).

Com as coordenadas dos pontos C e B podemos calcular as coordenadas do vetor \overrightarrow{CB} :

$$\overrightarrow{CB} = B - C = (1, 3, 0) - (1, 2, 3) = (0, 1, -3)$$

Uma condição cartesiana que define a reta CB é:

$$x = 1 \wedge \frac{y-3}{1} = \frac{z-0}{-3} \Leftrightarrow x = 1 \wedge y - 3 = -\frac{z}{3}$$

O ponto de intersecção da reta BC com o plano xOz tem ordenada nula, logo tem coordenadas (1, 0, z).

Substituindo $y = 0$ na condição que define a reta, podemos determinar o valor da cota do ponto de intersecção:

$$x = 1 \wedge y - 3 = -\frac{z}{3} \Leftrightarrow x = 1 \wedge 0 - 3 = -\frac{z}{3} \Leftrightarrow x = 1 \wedge z = 9$$

As coordenadas do ponto de intersecção da reta BC com o plano xOz são (1, 0, 9).

2017, Época especial, grupo II

25.

- 25.1. O ponto A tem cota 1, ou seja, a distância do ponto A ao plano xOy é igual a 1, assim a superfície esférica de centro em A e tangente ao plano xOy tem raio 1.

A equação da superfície esférica de centro em A e tangente ao plano xOy é:

$$(x - (-1))^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$$

- 25.2. De acordo com a figura 7, sabemos que o ponto V tem abcissa igual a -2 e ordenada igual a 2.

Como o ponto V pertence ao plano BCV, substituindo na equação do plano BCV o valor da ordenada podemos calcular o valor da cota do ponto V:

$$3y + z - 10 = 0 \Leftrightarrow 3 \times 2 + z - 10 = 0 \Leftrightarrow z = 4$$

Logo o vértice V tem coordenadas $(-2, 2, 4)$.

- 25.3. Vamos começar por determinar uma equação do plano α .

O plano α é perpendicular à reta AC então \overrightarrow{AC} é um vetor normal a este plano:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3, 3, 1) - (-1, 1, 1) = (-2, 2, 0)$$

Logo, $\alpha : -2x + 2y + d = 0$

Substituindo as coordenadas do ponto P (que pertence ao plano α) na equação do plano α , conseguimos determinar a constante d :

$$-2 \times 1 + 2 \times (-2) + d = 0 \Leftrightarrow -2 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 6$$

Assim vem que, $\alpha : -2x + 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha : -x + y + 3 = 0$.

Resolvendo o sistema de equações em ordem à variável comum nas equações dos dois planos (variável y) temos:

$$\begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ 3y + z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ 3y = 10 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = \frac{10-z}{3} \end{cases}$$

As equações cartesianas da reta que corresponde à intersecção dos planos α e β são da forma:

$$x - 3 = y = \frac{10-z}{3} \Leftrightarrow \frac{x-3}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-10}{-3}$$

Ou seja, a reta passa no ponto $(3, 0, 10)$ e tem vetor diretor $(1, 1, -3)$.

Uma equação vetorial desta reta é:

$$(x, y, z) = (3, 0, 10) + k(1, 1, -3), \quad k \in \mathbb{R}$$

2016, 1ª fase, grupo II

26.

26.1. O vetor normal do plano α é um vetor diretor da reta perpendicular a este plano.

Logo o vetor diretor da reta tem coordenadas $(3, 2, 4)$.

Uma equação vetorial da reta que tem vetor diretor de coordenadas $(3, 2, 4)$ e passa no ponto C é:

$$(x, y, z) = (2, 1, 4) + k(3, 2, 4), \quad k \in \mathbb{R}$$

26.2. Vamos começar por escrever as equações cartesianas da reta OD.

O vetor diretor da reta OD é:

$$\overrightarrow{OD} = D - O = (4, 2, 2) - (0, 0, 0) = (4, 2, 2)$$

As equações cartesianas desta reta OD são da forma:

$$\frac{x-0}{4} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-0}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$$

Para calcular as coordenadas do ponto de intersecção da reta OD com o plano α temos de resolver o sistema de equações:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{2} \\ \frac{z}{2} = \frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \\ x = 2y \\ z = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \times 2y + 2y + 4y - 12 = 0 \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 12y = 12 \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

O plano α e a reta OD intersectam-se no ponto de coordenadas $(2, 1, 1)$.

2016, 2ª fase, grupo II

27.

27.1. Como o ponto F pertence ao plano OFB, substituindo na equação do plano OFB os valores da abcissa e ordenada podemos calcular o valor da cota do ponto F:

$$3x + 3y - z = 0 \Leftrightarrow 0 + 3 \times 2 - z = 0 \Leftrightarrow z = 6$$

Logo o vértice F tem cota igual a 6.

De acordo com a figura 8, o ponto D tem coordenadas $(-2, 0, 6)$.

O vetor de coordenadas $(3, 3, -1)$ é um vetor normal do plano OFB bem como de todos os planos paralelos a este plano.

Assim, uma equação do plano paralelo ao plano OFB é da forma: $3x + 3y - z + d = 0$

Substituindo as coordenadas do ponto D na equação do plano, conseguimos determinar a constante d :

$$3x + 3y - z + d = 0 \Leftrightarrow 3 \times (-2) + 0 - 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$$

Assim, uma equação do plano paralelo ao plano OFB que passa no ponto D é:

$$3x + 3y - z + 12 = 0$$

27.2. Pela observação da figura 8, sabemos que o ponto B tem coordenadas $(-2, 2, 0)$.

Com as coordenadas dos pontos B e O (origem do referencial) podemos calcular as coordenadas do vetor \overrightarrow{OB} :

$$\overrightarrow{OB} = B - O = (-2, 2, 0) - (0, 0, 0) = (-2, 2, 0)$$

Uma condição cartesiana que define a reta OB é:

$$\frac{x-0}{-2} = \frac{y-0}{2} \wedge z = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{2} = \frac{y}{2} \wedge z = 0$$

2016, Época especial, grupo II

28.

28.1. O vetor de coordenadas $(1, -2, 1)$ é um vetor normal do plano α bem como de todos os planos paralelos a este plano.

Assim, uma equação do plano paralelo ao plano α é da forma: $x - 2y + z + d = 0$

Substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano, conseguimos determinar a constante d :

$$x - 2y + z + d = 0 \Leftrightarrow 0 + 0 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$$

Assim, uma equação do plano paralelo ao plano α que passa no ponto A é:

$$x - 2y + z - 2 = 0$$

28.2. Vamos começar por determinar a distância entre A e B:

$$d(AB) = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

O segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro da superfície esférica logo o raio é:

$$r = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

O centro da superfície esférica é ponto médio do segmento de reta $[AB]$:

$$C = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (2, 0, 1)$$

Uma equação cartesiana que define a superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro é:

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 + (z - 1)^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$$

2015, 1ª fase, grupo II

29.

29.1. O vértice V coincide com o centro geométrico da face $[URST]$ do cubo, ou seja, o vértice V tem de coordenadas $(1, 1, z)$, $z \in \mathbb{R}$.

Como o ponto V pertence ao plano PQV , substituindo na equação do plano PQV o valor da abcissa podemos calcular o valor da cota do ponto V :

$$6x + z - 12 = 0 \Leftrightarrow 6 \times 1 + z - 12 = 0 \Leftrightarrow z = 6$$

Logo o vértice V tem coordenadas $(1, 1, 6)$.

29.2. O vetor \overrightarrow{OR} é um vetor normal do plano perpendicular à reta OR .

Com as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e R podemos calcular as coordenadas do vetor \overrightarrow{OR} :

$$\overrightarrow{OR} = R - O = (2, 2, 2) - (0, 0, 0) = (2, 2, 2)$$

Assim, uma equação do plano perpendicular à reta OR é da forma:

$$2x + 2y + 2z + d = 0$$

Substituindo as coordenadas do ponto P na equação do plano, conseguimos determinar a constante d :

$$2x + 2y + 2z + d = 0 \Leftrightarrow 2 \times 2 + 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$$

Assim, uma equação do plano perpendicular à reta OR que passa no ponto P é:

$$2x + 2y + 2z - 4 = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 2 = 0$$

2015, 2ª fase, grupo II

30.

30.1. O vetor $(2, -1, 1)$ é um vetor normal do plano β .

Como a reta OP é perpendicular ao plano β então o vetor \overrightarrow{OP} e o vetor normal do plano $(2, -1, 1)$ são colineares:

$$\overrightarrow{OP} = k(2, -1, 1), \quad k \in \mathbb{R}$$

Com as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e P podemos calcular as coordenadas do vetor \overrightarrow{OP} :

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (-2, 1, 3a) - (0, 0, 0) = (-2, 1, 3a)$$

Logo temos que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} = k(2, -1, 1) &\Leftrightarrow (-2, 1, 3a) = k(2, -1, 1) \Leftrightarrow -2 = 2k \wedge 1 = -k \wedge \\ \wedge 3a = k &\Leftrightarrow k = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

30.2. Seja T o ponto de tangência do plano β com a superfície esférica.

Sabendo as coordenadas do ponto O e um vetor diretor da reta OT (vetor normal ao plano β), uma equação vetorial da reta OT é:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(2, -1, 1), \quad k \in \mathbb{R}$$

As coordenadas genéricas do ponto P pertencente à reta OT são $(2k, -k, k)$.

Como o ponto T pertence ao plano β (ponto de interseção do plano β com a reta OT), substituindo as coordenadas do ponto P na equação do plano conseguimos calcular a constante k:

$$\begin{aligned} 2x - y + z - 4 = 0 &\Leftrightarrow 2(2k) - (-k) + k - 4 = 0 \Leftrightarrow 4k + k + k = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6k = 4 &\Leftrightarrow k = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Substituindo $k = \frac{2}{3}$ nas coordenadas genéricas do ponto P conseguimos saber as coordenadas do ponto de interseção do plano β com a reta OT:

$$T \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

Fazendo a distância entre o ponto O e o ponto T, conseguimos calcular o raio da superfície esférica:

$$d(OT) = \sqrt{\left(0 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left[0 - \left(-\frac{2}{3}\right)\right]^2 + \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{24}}{3}$$

Uma equação cartesiana que define a superfície esférica de centro na origem do referencial e que é tangente ao plano β é:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = \left(\frac{\sqrt{24}}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{24}{9}$$

2015, Época especial, grupo II