

**Resolução - Equação da reta tangente**

1. Como o declive da reta  $r$  tangente ao gráfico da função  $g$  no ponto de abcissa 0 é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m_r = g'(0) = \cos(0) + 2 \sin 0 = 1$$

Sabendo que as retas  $r$  e  $s$  são paralelas então  $m_r = m_s = 1$ .

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $g$  no ponto de abcissa 0 é da forma:

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

A reta  $s$  intersecta o eixo  $Ox$  no ponto de abcissa 4, ou seja, o ponto de coordenadas  $(4, 0)$  pertence à reta  $s$ . Substituindo as coordenadas do ponto  $(4, 0)$  na equação da reta  $s$ , conseguimos determinar a constante  $b$ :

$$y = x + b \Leftrightarrow 0 = 4 + b \Leftrightarrow b = -4$$

Assim, a equação reduzida da reta  $s$  é:

$$y = x - 4$$

2024, 2ª fase

2. Para determinarmos a abcissa do ponto do gráfico da função  $g$ , no intervalo  $]-\infty, 0[$ , em que a reta tangente ao gráfico da função é paralela à reta de equação  $y = -2x$  vamos

resolver a equação:  $g'(x) = -2 \Leftrightarrow 3e^{2x} - 7e^x = -2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3(e^x)^2 - 7e^x + 2 = 0 \quad (*_1)$$

Fazendo a mudança de variável:  $y = e^x$

$$(*_1) \quad 3y^2 - 7y + 2 = 0$$

$$a = 3 \quad b = -7 \quad c = 2$$

Usando a fórmula resolvente temos:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow y = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3} \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{7+5}{6} \vee x = \frac{7-5}{6} \Leftrightarrow y = 2 \vee y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2 \vee e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = -\ln 3$$

No intervalo  $] -\infty, 0[$ , a abscissa do ponto do gráfico da função  $g$  em que a reta tangente ao gráfico da função é paralela à reta de equação  $y = -2x$  é igual a  $x = -\ln 3$ .

2022, 2ª fase

3. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função  $g$ :

$$g'(x) = (\ln(1 + e^x) - x)' = \frac{e^x}{1+e^x} - 1$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função  $g$  no ponto de abcissa 0 é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m = g'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Portanto, a equação reduzida da reta  $s$  é da forma:

$$y = x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto  $(0, g(0))$  (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante  $b$ :

$$y = -\frac{1}{2}x + b \Leftrightarrow g(0) = -\frac{e^2}{4} \times 0 + b \Leftrightarrow \ln(1 + e^0) - 0 = +b \Leftrightarrow b = \ln 2$$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $g$  no ponto de abcissa 0 é:

$$y = -\frac{1}{2}x + \ln 2$$

Sabendo que  $A$  é o ponto de intersecção da reta  $r$  com os eixo  $Oy$  então as suas coordenadas são da forma  $A(0, g(0))$ .

Como  $g(0) = \ln 2$  então as coordenadas do ponto  $A$  são  $(0, \ln 2)$ .

O ponto  $B$  é o ponto de intersecção da reta  $r$  com os eixo  $Ox$  então as suas coordenadas são da forma  $B(x_b, 0)$ .

Como  $0 = -\frac{1}{2}x_b + \ln 2 \Leftrightarrow x_b = -2 \ln 2$  então as coordenadas do ponto  $B$  são  $(-2 \ln 2, 0)$ .

A área do triângulo  $[OAB]$  é igual a:

$$A_{[AOB]} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\ln 2 \times 2 \ln 2}{2} = (\ln 2)^2$$

2022, Época especial

4. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função  $f$  para  $x \in ]-\infty, 0[$ :

$$f'(x) = \left(\frac{x-e^{-x}}{x}\right)' = \frac{(1+e^{-x})x - (x-e^{-x})}{x^2} = \frac{x+xe^{-x}-x+e^{-x}}{x^2} = \frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abcissa  $-2$  é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m = f'(-2) = \frac{e^2(-2+1)}{(-2)^2} = -\frac{e^2}{4}$$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abcissa  $-2$  é da forma:

$$y = -\frac{e^2}{4}x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto  $(-2, f(-2))$  (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante  $b$ :

$$y = -\frac{e^2}{4}x + b \Leftrightarrow f(-2) = -\frac{e^2}{4} \times (-2) + b \Leftrightarrow \frac{-2-e^2}{-2} = \frac{e^2}{2} + b \Leftrightarrow \frac{2+e^2}{2} = \frac{e^2}{2} + b \Leftrightarrow$$

$$b = \frac{2+e^2-e^2}{2} \Leftrightarrow b = 1$$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa  $-2$  é:

$$y = -\frac{e^2}{4}x + 1$$

2021, 2ª fase

5. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função  $f$  para  $x \in ]0, +\infty[$ :

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x-\ln x}\right)' = \frac{x-\ln x - (1-\frac{1}{x})(x)}{(x-\ln x)^2} = \frac{x-\ln x - x + 1}{(x-\ln x)^2} = \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa 1 é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m = f'(1) = \frac{1-\ln 1}{(1-\ln 1)^2} = \frac{1}{1^2} = 1$$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $f$  é da forma:

$$y = x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto  $(1, f(1))$  (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante  $b$ :

$$y = x + b \Leftrightarrow f(1) = 1 + b \Leftrightarrow \frac{1}{1-\ln 1} = 1 + b \Leftrightarrow \frac{1}{1} = 1 + b \Leftrightarrow 1 = 1 + b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = 0$$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa 1 é:

$$y = x$$

2019, 1ª fase, caderno 2

6. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função  $g$  para  $x \in ]-\infty, 0]$ :

$$g'(x) = (x \ln(1-x))' = \ln(1-x) - \left(\frac{1}{1-x}\right)x$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função  $g$  no ponto de abscissa  $-1$  é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m = g'(-1) = \ln(1 - (-1)) - \left(\frac{1}{1-(-1)}\right)(-1) = \ln 2 + \frac{1}{2}$$

### Opção(A)

2019, Época especial, caderno 2

7. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função  $f$  para  $x \in ]1 - \pi, 1[$ :

$$f'(x) = \left(\frac{2x-2}{\sin(x-1)}\right)' = \frac{2 \sin(x-1) - \cos(x-1)(2x-2)}{\sin^2(x-1)}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abcissa  $1 - \frac{\pi}{2}$  é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m = f'(1 - \frac{\pi}{2}) = \frac{2 \sin[(1 - \frac{\pi}{2}) - 1] - \cos[(1 - \frac{\pi}{2}) - 1][2(1 - \frac{\pi}{2}) - 2]}{\sin^2[(1 - \frac{\pi}{2}) - 1]} = \frac{2 \sin(-\frac{\pi}{2}) - \cos(-\frac{\pi}{2})(-\pi)}{\sin^2(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-2 \sin(\frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2})(-\pi)}{\sin^2(-\frac{\pi}{2})} =$$

$$= \frac{-2 \times 1 - 0}{(-1)^2} = -2$$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $f$  é da forma:

$$y = -2x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto  $(1 - \frac{\pi}{2}, f(1 - \frac{\pi}{2}))$  (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante  $b$ :

$$y = -2x + b \Leftrightarrow f(1 - \frac{\pi}{2}) = -2(1 - \frac{\pi}{2}) + b \Leftrightarrow \frac{2(1 - \frac{\pi}{2}) - 2}{\sin[(1 - \frac{\pi}{2}) - 1]} = -2 + \pi + b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\pi}{\sin(-\frac{\pi}{2})} = -2 + \pi + b \Leftrightarrow \frac{-\pi}{-1} = -2 + \pi + b \Leftrightarrow \pi = -2 + \pi + b \Leftrightarrow b = 2$$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abcissa  $1 - \frac{\pi}{2}$  é:

$$y = -2x + 2$$

2017, Época especial, grupo II

8. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função  $f$  para  $x > 0$ :

$$f'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abcissa  $\frac{1}{2}$  é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1$$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $f$  é da forma:

$$y = x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto  $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$  (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante  $b$ :

$$y = -x + b \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + b \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + b \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \ln 2^{-1} = b$$

$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 - (-1) \ln 2 = b \Leftrightarrow b = 1 + \ln 2$$

Assim, a equação reduzida da reta  $r$  é:

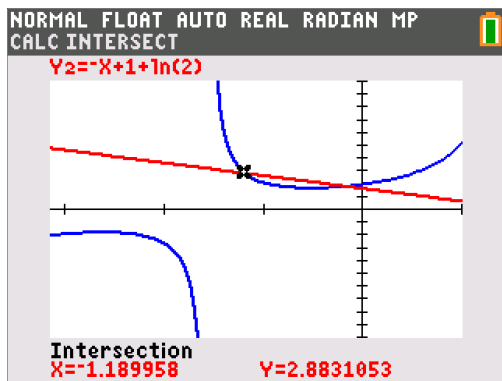
$$y = -x + 1 + \ln 2$$

Como a reta  $r$  intersecta o gráfico de  $f$  em dois pontos, A e B, cujas abcissas pertencem ao intervalo  $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ , então temos que:

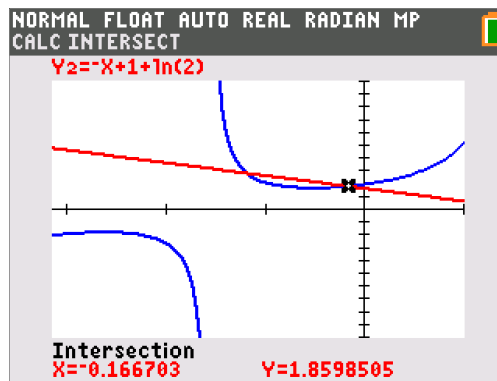
$$\frac{2+\sin x}{\cos x} = -x + 1 + \ln 2$$

Recorrendo à calculadora gráfica, vamos determinar as abcissas dos pontos A e B:





$$x_A \approx -1,19$$



$$x_B \approx -0,17$$

2016, 2ª fase, grupo II

9. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função  $f$  para  $x \geq 0$ :

$$f'(x) = [\ln(e^x + x)]' = \frac{e^x + 1}{e^x + x}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa  $a$  é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

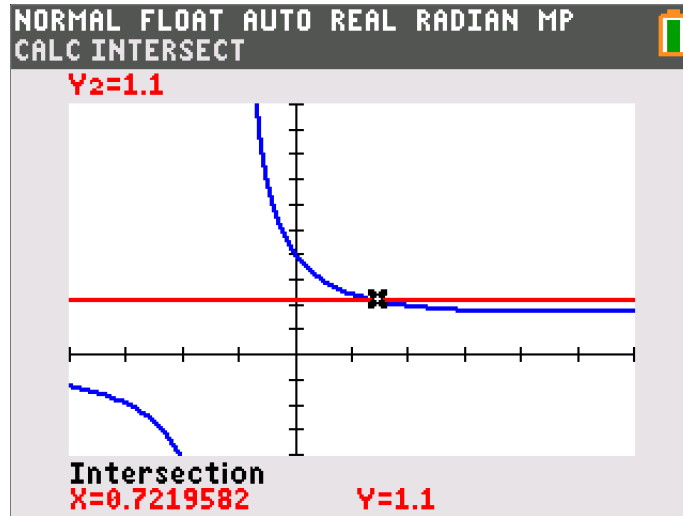
$$m = f'(a) \Leftrightarrow 1,1 = \frac{e^a + 1}{e^a + a}$$

Recorrendo à calculadora gráfica, vamos determinar a constante  $a$  (abscissa do ponto A):

Assim, temos que  $a \approx 0,72$ .

2016, Época especial, grupo II

10. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função  $f$  para  $x > 4$ :



$$f'(x) = [\ln(x-3) - \ln x]' = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa 4 é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m = f'(4) = \frac{1}{4-3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $f$  é da forma:

$$y = \frac{3}{4}x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto  $(4, f(4))$  (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante  $b$ :

$$\begin{aligned} y = \frac{3}{4}x + b &\Leftrightarrow \ln(4-3) - \ln 4 = \frac{3}{4} \times 4 + b \Leftrightarrow b = \ln 1 - \ln 4 - 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b = -\ln 4 - 3 \end{aligned}$$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa 4 é:

$$y = \frac{3}{4}x - \ln 4 - 3$$

2015, 2ª fase, grupo II

11. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função  $f$ :

$$f'(x) = [a \sin x]' = a \cos x$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa  $\frac{2\pi}{3}$  é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m_r = f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a \cos \frac{2\pi}{3} = a \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -a \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{a}{2}$$

Sabendo que a inclinação da reta  $r$  é igual a  $\frac{\pi}{6}$  vem que:

$$\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow -a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2015, Época especial