Resolução - Continuidade de uma função num ponto

1. Calculando o valor da função g no ponto $x = 1$:

$g(1) = 1 - 3 - 2\ln 1 = -2$

Calculando o valor do limite lateral da função g quando $x \to 1^+$:

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2 - 3x - 2\ln x) = -2$$

Calculando o valor do limite lateral da função g quando $x \to 1^-$:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-}\left[\frac{1-x}{e^{x-1}-1} - e^{x-k}\right] = -\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{e^{x-1}-1} - e^{1-k} = -\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}} - e^{1-k} = (*_1)$$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - 1$ ($y \to 0^-$ quando $x \to 1^-$)

$$(*_1) = -\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0^-}\frac{e^y-1}{y}} - e^{1-k} = -1 - e^{1-k} \qquad \text{(Limite notável)}$$

Como a função g é contínua em $x = 1$ então vem que:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = g(1) = \lim_{x\to 1^+} g(x) \Leftrightarrow -1 - e^{1-k} = -2 \Leftrightarrow e^{1-k} = 1 \Leftrightarrow 1 - k = \ln 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - k = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

2024, 1ªfase

2. $g(0) = f(0) = 2$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-k}(e^x-1)}{x(-x+2)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-k}}{(-x+2)} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = \frac{e^{-k}}{2} \times 1 = \frac{e^{-k}}{2}$$

Como a função g é continua em $x = 0$ então temos que ter:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = g(0) \Leftrightarrow \frac{e^{-k}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^{-k} = 4 \Leftrightarrow -k = \ln 4 \Leftrightarrow k = -\ln 4$$

2024, 2ªfase

3. Calculando o valor da função f no ponto $x = 0$:

$f(0) = \frac{4\cos 0}{\sin 0 - 2} = \frac{4}{-2} = -2$

Calculando o valor dos limites laterais da função f no ponto $x = 0$:

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4\cos x}{\sin x - 2} = \frac{4\cos 0}{\sin 0 - 2} = \frac{4}{-2} = -2$

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-e^{6x}}{3x} = -2 \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{6x}-1}{2\times 3x} = \ (*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y = 6x \ \ (y \to 0^- \ \text{ quando } \ x \to 0^-)$

$(*_1) = -2 \lim_{y\to 0^-} \frac{e^y-1}{y} = -2 \times 1 = -2$ (Limite notável)

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) =$ f(0), então a função f é contínua em $x = 0$.

2024, Época especial

4. Calculando o valor da função g no ponto $x = 1$:

   $g(1) = 7 \times 3^{1-1} - 3 = 7 - 3 = 4$

   Calculando o valor do limite lateral da função g quando $x \to 1^+$:

   $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (7 \times 3^{x-1} - 3) = 4$

   Calculando o valor do limite lateral da função g quando $x \to 1^-$:

   $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{4x-4}{e^{x-1}-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{4(x-1)}{e^{x-1}-1} = 4 \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} = (*_1)$

   Fazendo a mudança de variável: $y = x - 1$ ($y \to 0^-$ quando $x \to 1^-$)

   $(*_1) = 4 \lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{4}{\lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y}} = 4 = \frac{4}{1} = 4$ (Limite notável)

   Como $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = g(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$, então a função g é contínua em $x = 1$.

   2023, 1ªfase

5. Calculando o valor da função f no ponto $x = 2$:
   $f(2) = \frac{e^{2-2}}{2+2} = \frac{1}{4}$

   Calculando o valor dos limites laterais da função f no ponto $x = 2$:

   - $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{e^{2-2^+}}{2+2} = \frac{1}{4}$

   - $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\sin(x-2)}{(x-2)} \times \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{(x+2)} =$

     $= \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\sin(x-2)}{(x-2)} \times \frac{1}{4} = (*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - 2 \;\; (y \to 0^+ \;\; \text{quando} \;\; x \to 2^+)$

$(*_1) = \lim\limits_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y} \times \frac{1}{4} = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ (Limite notável)

Como $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \text{f}(2)$, então a função f é contínua em $x = 2$.

2022, 1ªfase

6. Calculando o valor da função f no ponto $x = 0$:

$f(0) = \ln \sqrt{e + 0} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$

Calculando o valor do limite lateral da função f quando $x \to 0^-$:

item $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1 - \cos^2 x}{x} \times \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{1 + \cos x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin^2 x}{x} \times \frac{1}{2} = \lim\limits_{x \to 0^-} \sin x \times \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{2} = 0 \times 1 \times \frac{1}{2} = 0$ (Limite notável)

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq f(0)$, então a função f não é contínua em $x = 0$.

2022, 2ªfase

7. Calculando o valor da função f no ponto $x = 0$:

$f(0) = \frac{3}{5}$

Calculando o valor dos limites laterais da função f quando $x \to 0$:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{e^{5x}-1} = 3\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^{5x}-1} = 3\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\frac{e^{5x}-1}{x}} = 3\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{5\frac{e^{5x}-1}{5x}} = \frac{3}{5}\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\frac{e^{5x}-1}{5x}} = (*_4)$

Fazendo a mudança de variável: $y = 5x \quad (y \to 0$ quando $x \to 0)$

$(*_4)\ \frac{3}{5}\lim\limits_{y\to 0} \frac{1}{\frac{e^{y}-1}{y}} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{5}$ (Limite notável)

Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, então a função f é contínua em $x = 0$.

2022, Época especial

8. Calculando o valor da função f no ponto $x = 1$:

$f(1) = -1^2(1 + 2\ln 1) = -1(1 + 0) = -1$

Calculando o valor dos limites laterais da função f no ponto $x = 1$:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} -x^2(1 + 2\ln x) = -1^2(1 + 2\ln 1) = -1(1 + 0) = -1$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} = 5\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1-e^{x-1}}{x^2+3x-4} = -5\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{(x-1)(x+4)} =$

  $= -5\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{e^{x-1}-1}{x-1} \times \frac{1}{x+4}\right) = -5\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \times \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x+4} =$

  $= -5\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \times \frac{1}{5} = -\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \quad (*_1)$

  Fazendo a mudança de variável: $y = x - 1$ $\ (y \to 0^+$ quando $x \to 1^+)$

  $(*_1) = -\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{e^y-1}{y} = -1 \qquad$ (Limite notável)

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$, então a função f é contínua em $x = 1$.

2021, 1ªfase

9. Para que exista $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ temos que ter:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x).$$

Calculando os valores do limites laterais da função g no ponto $x = 0$:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2 + x\ln x) = 2 + \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x \quad (*_2)$

  Fazendo a mudança de variável: $y = \frac{1}{x}$ $\ (y \to +\infty$ quando $x \to 0^+)$

$(*_2) = 2 + \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right) = 2 + \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\ln 1 - \ln y}{y} = 2 - \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y} = 2$ (Limite notável)

- $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \left[\frac{x^3-x}{x^2-x} + k\right] = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{x(x^2-1)}{x(x-1)} + k = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{x^2-1}{x-1} + k = 1 + k$

Calculando o valor de k:

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^-} g(x) \Leftrightarrow 2 = 1 + k \Leftrightarrow k = 1.$$

2021, 2ªfase

10. Como a função f é continua em $x = 1$ então temos que ter:

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1).$$

Calculando os valores do limites laterais da função f no ponto $x = 1$:

- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \left[\frac{\sin(x-1)}{1-x^2} + k\right] = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sin(x-1)}{(1-x)(1+x)} + k = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sin(x-1)}{(1-x)(1+x)} + k =$

$= \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sin(x-1)}{(1-x)} \times \lim\limits_{x\to1^+} \frac{1}{1+x} + k = -\lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)} \times \frac{1}{2} + k = (*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - 1$ ($y \to 0^+$ quando $x \to 1^+$)

$(*_1) = -\lim\limits_{y\to0^+} \frac{\sin y}{y} \times \frac{1}{2} + k = -\frac{1}{2} + k$ (Limite notável)

- $f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} [x - 2 + \ln(3 - 2x)] = -1$

Calculando o valor de k:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -\tfrac{1}{2} + k = -1 \Leftrightarrow k = -\tfrac{1}{2}.$$

2021, Época especial

11. Calculando o valor da função g no ponto $x = 0$:

$g(0) = 0$

Calculando o valor dos limites laterais da função g no ponto $x = 0$:

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x = (*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$ $\;(y \to +\infty \;\text{ quando }\; x \to 0^+)$

$(*_1) = \lim\limits_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{\ln 1 - \ln y}{y^2} = -\left(\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y} \times \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{y}\right) = 0 \times 0 = 0$

(Limite notável)

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 + \frac{\sin x}{1 - e^x} = 1 + \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\sin x \times \frac{1}{1 - e^x}\right) = 1 + \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{1 - e^x}\right) =$

$= 1 + \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{1 - e^x} = 1 + 1 \times \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{1 - e^x} = 1 + 1 \times \left(-\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{e^x - 1}\right) =$

$$= 1 + 1 \times \left(- \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}\right) = 1 + 1 \times -1 = 1 - 1 = 0$$

Como $g(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$, então a função g é contínua em $x = 0$.

2020, 1ª fase

12. Calculando o valor da função h no ponto $x = 1$:

$h(1) = 1 + e^{1-1} = 2$

Calculando o valor dos limites laterais da função h no ponto $x = 1$:

- $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 1 + xe^{x-1} = 1 + e^{1^- - 1} = 2$

- $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{\sin(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sin(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x-1}{\sin(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$

  $= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x-1}{\sin(x-1)} \times \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x-1}{\sin(x-1)} \times \frac{1}{2} = \ (*_1)$

  Fazendo a mudança de variável: $y = x - 1$ $(y \to 0^+ \ \text{ quando } \ x \to 1^+)$

  $(*_1) = \lim\limits_{y \to 0^+} \frac{y}{\sin y} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\lim\limits_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (Limite notável)

Como $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$, então a função h não é contínua em $x = 1$.

2020, 2ª fase

13. Calculando o valor da função f no ponto $x=0$:

$f(0)=0$

Calculando o valor dos limites laterais da função f no ponto $x=0$:

► $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x-\ln x} = \frac{0}{0-\ln 0^+} = \frac{0}{-\infty} = 0$

► $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} =$
$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 x}{x} \times \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{1+\cos x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \sin x \times \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{1+\cos 0} =$
$= \sin 0 \times 1 \times \frac{1}{2} = 0$

Como $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, então a função f é contínua em $x=0$.

2019, 1ª fase, caderno 2

14. A função f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ pois resulta do quociente entre funções polinomiais que são contínuas.

Para que a função f seja contínua em $\mathbb{R}$ tem de ser contínua em $x=1$, ou seja, temos que ter:

$$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x).$$

Calculando o valor da função f no ponto $x=1$:

$f(1) = \log_3 k$

Calculando o valor dos limites laterais da função f no ponto $x = 1$:

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^\pm} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^\pm} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \lim\limits_{x \to 1^\pm} x + 1 = 2$

Logo vem que:

$$\log_3 k = 2 \;\Leftrightarrow\; k = 3^2 \;\Leftrightarrow\; k = 9$$

Opção(D)

2019, 2ª fase, caderno 1

15. Para que a função f seja contínua em $\mathbb{R}$ tem de ser contínua em $x = 1$, ou seja, temos que ter:

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x).$$

Calculando o valor da função f no ponto $x = 1$:

$f(1) = k$

Calculando o valor do limite lateral da função f no ponto $x = 1$:

- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x^2+x} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$

Logo vem que, $k = \frac{1}{3}$.

Opção(C)

2019, Época especial, caderno 1

16. Calculando o valor da função g no ponto $x=0$: $g(0)=\frac{1}{2-\sin 0}=\frac{1}{2}$

Calculando o valor dos limites laterais da função g no ponto $x=0$:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2-\sin(2x)}=\frac{1}{2-\sin 0}=\frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{4x}=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}=\frac{2}{4}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x}=(*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y=2x$ $(y\to 0^-$ quando $x\to 0^-)$

$(*_1)=\frac{1}{2}\lim\limits_{y\to 0^-}\frac{e^{y}-1}{y}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$ (Limite notável)

Como $g(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$, então a função g é contínua em $x=0$.

2018, 1ª fase, caderno 2

17. Calculando o valor da função h no ponto $x=0$:

$h(0)=\frac{e^0}{0+1}=1$

Calculando o valor dos limites laterais da função h no ponto $x=0$:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x+1}=\frac{e^0}{0+1}=1$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}[\frac{\sin^2 x}{1}\times\frac{1}{\sin x^2}]=\lim\limits_{x\to 0^-}[\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{x^2}{\sin x^2}]=$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{\sin x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x^2}{x^2}} =$$
$$= 1 \times 1 \times \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\sin y}{y}} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

Como $h(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$, então a função h é contínua em $x = 0$.

2018, Época especial, caderno 2

18. Calculando o valor da função g no ponto $x = 1$: $\quad g(1) = 2$

Calculando o valor dos limites laterais da função g no ponto $x = 1$:

► $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} [3 + \frac{\sin(x-1)}{1-x}] = 3 + \lim\limits_{x\to 1^+} -\frac{\sin(x-1)}{x-1} = 3 - \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = (*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - 1$ $(y \to 0^+$ quando $x \to 1^+)$

$(*_1) = 3 - \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 3 - 1 = 2$ (Limite notável)

► $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(1+x)(1-x)}{-(e^{x-1}-1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} -\frac{(1+x)(1-x)}{(e^{x-1}-1)} =$
$= \lim\limits_{x\to 1^-} -(1+x)\frac{(1-x)}{(e^{x-1}-1)} = 2 \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(x-1)}{(e^{x-1}-1)} = (*_2)$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - 1$ $(y \to 0^-$ quando $x \to 1^-)$

$(*_2) = 2 \lim\limits_{y\to 0^-} \frac{y}{(e^y-1)} = 2 \times \frac{1}{1} = 2$ (Limite notável)

Como $g(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$, então a função g é contínua em $x = 1$.

2017, 1ª fase, grupo II

19. Calculando o valor da função f no ponto $x = 1$: $\quad f(1) = 2$

    Calculando o valor dos limites laterais da função f no ponto $x = 1$:

    $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} e^{-2x+4} + \ln(x-1) = e^{-2+4} + \ln(1^+ - 1) = e^2 + \ln 0^+ = -\infty$$

    $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \tfrac{2x-2}{\sin(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} 2 \times \tfrac{x-1}{\sin(x-1)} = (*_1)$$

    Fazendo a mudança de variável: $y = x - 1$ $\ (y \to 0^- \text{ quando } x \to 1^-)$

    $(*_1) = 2 \lim\limits_{y\to 0^-} \frac{y}{\sin y} = 2 \times \frac{1}{1} = 2$ (Limite notável)

    Como $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, então a função f é contínua à esquerda no ponto 1, mas não é contínua à direita nesse ponto. Afirmação Verdadeira.

    2017, Época especial, grupo II

20. Dado que a função f é contínua em $\mathbb{R}$, é contínua em $x = -1$ logo vem que:

    $$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$$

    Como $f(-1) = k + 2$ temos:

    $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = k+2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1} \frac{\sin(3x+3)}{4x+4} = k+2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \lim\limits_{x\to -1} \frac{\sin(3x+3)}{x+1} = k+2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \times 3 \lim\limits_{x\to -1} \frac{\sin(3x+3)}{3x+3} = k+2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \lim\limits_{x\to -1} \frac{\sin(3x+3)}{3x+3} = k+2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \times 1 = k+2 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4} - 2 \Leftrightarrow k = -\frac{5}{4}$ (Limite notável)

    Opção(B)

    2016, Época especial, grupo I

21. Dado que a função f é contínua em $\mathbb{R}$, é contínua em $x=0$ logo vem que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

Como $f(0) = 2 + e^k$ temos:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2 + e^k \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{2x+\ln(x+1)}{x} = 2 + e^k \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 2 + e^k \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2 + \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 2 + e^k \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = e^k \Leftrightarrow 1 = e^k \Leftrightarrow k = 0$
(Limite notável)

Opção(A)

2015, 2ª fase, grupo I