Resolução - Concavidades e Pontos de inflexão

1. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função g:

$$g''(x) = (\cos(2x) + 2\sin x)' = -2\sin(2x) + 2\cos x = -4\sin x\cos x + 2\cos x$$

Os pontos de inflexão de g correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -4\sin x\cos x + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(-4\sin x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\vee x = \frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\vee x = \frac{5\pi}{6} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Para $k = 1$, $x = \frac{3\pi}{2} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\vee x = \frac{13\pi}{6} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\vee x = \frac{17\pi}{6} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Para $k = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\vee x = -\frac{11\pi}{6} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\vee x = -\frac{7\pi}{6} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Logo, $g''(x)$ tem um zero em $x = \frac{\pi}{6}$ no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$g''(0) = -4\sin 0\cos 0 + 2\cos 0 = 2 > 0$$

$$g''\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = -4\sin\tfrac{\pi}{4}\cos\tfrac{\pi}{4} + 2\cos\tfrac{\pi}{4} = -2 + \sqrt{2} < 0$$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$g''(x)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$g(x)$	n.d.	$\smile$	P.I.	$\frown$	n.d.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$.

A abcissa do ponto de inflexão do gráfico de g é igual a $\frac{\pi}{6}$.

2024, 2ª fase

2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função f:

$$f''(x) = (-2xe^{1-x^2})' = -2e^{1-x^2} + (-2x)e^{1-x^2}(-2x) = -2e^{1-x^2} + 4x^2e^{1-x^2} =$$
$$= e^{1-x^2}(-2+4x^2)$$

Os pontos de inflexão de f correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x^2}(-2+4x^2) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x^2} = 0 \ _{(cond.\ impossível)} \vee -2+4x^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} \Leftrightarrow x = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\smile$	P.I.	$\frown$	P.I.	$\smile$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$.

As abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de f são $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2023, 1ª fase

3. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função g no intervalo $]0, \pi[$:

$g''(x) = \left(x + 2\cos^2 x\right)' = 1 + 2 \times 2\cos x \times (-\sin x) = 1 - 2 \times 2\cos x \sin x = 1 - 2\sin(2x)$

Os pontos de inflexão de g correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\vee\; 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \;\vee\; x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, $x = \frac{\pi}{12} \in]0, \pi[\;\vee\; x = \frac{5\pi}{12} \in]0, \pi[$

Para $k = 1, \ x = \frac{13\pi}{12} \ \notin]0, \pi[\ \vee \ x = \frac{17\pi}{12} \notin]0, \pi[$

Para $k = -1, \ x = -\frac{11\pi}{12} \ \notin]0, \pi[\ \vee \ x = -\frac{7\pi}{12} \notin]0, \pi[$

Logo, $g''(x)$ tem dois zeros em $x = \frac{\pi}{12}$ e $x = \frac{5\pi}{12}$ no intervalo $]0, \pi[$.

$g''(\frac{\pi}{13}) = 1 - 2\sin\left(\frac{2\pi}{13}\right) < 0$

$g''(\frac{6\pi}{12}) = 1 - 2\sin\pi > 0$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		π
$g''(x)$	n.d.	+	0	-	0	+	n.d.
$g(x)$	n.d.	$\smile$	P.I.	$\frown$	P.I.	$\smile$	n.d.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{12}, \pi\right[$.

As abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de g são $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{5\pi}{12}$.

2022, 2ª fase

4. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função g:

$$g''(x) = \left(\frac{x-e^{3x}}{x}\right)' = \frac{(1-3e^{3x})x-(x-e^{3x})}{x^2} = \frac{x-3xe^{3x}-x+e^{3x}}{x^2} = \frac{e^{3x}(-3x+1)}{x^2}$$

Os pontos de inflexão de g correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{3x}(-3x+1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow e^{3x}(-3x+1) = 0 \ \wedge \ x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{3x} = 0_{\,cond.impossível} \ \vee \ -3x+1 = 0 \ \wedge \ x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \ \wedge \ x \neq 0$

$g''(\frac{1}{4}) = \frac{e^{3\times\frac{1}{4}}\left(-3\times\frac{1}{4}+1\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} > 0$

$g''(1) = \frac{e^{3\times 1}(-3\times 1+1)}{1^2} < 0$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

	0		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$g''(x)$	n.d.	+	0	-
$g(x)$	n.d.	$\smile$	P.I.	$\frown$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0, \frac{1}{3}\right]$.

A abcissa do ponto de inflexão do gráfico de g é $\frac{1}{3}$.

2022, Época especial

5. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função f:

$f'(x) = \left(\frac{2+\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}.x-1(2+\ln x)}{x^2} = \frac{1-2-\ln x}{x^2} = \frac{-1-\ln x}{x^2}$

Os pontos de inflexão correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-1-\ln x}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; -1 - \ln x = 0 \;\wedge\; x^2 \neq 0 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; \ln x = -1 \;\wedge\; x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = e^{-1} \;\wedge\; x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{e} \;\wedge\; x \neq 0$

Logo, $f''(x)$ tem um zero em $x = \frac{1}{e}$ no intervalo $]0, +\infty[$.

$f''(1) = \frac{-1-\ln 1}{1^2} = -1 < 0$

$f''\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{-1-\ln e^{-2}}{(e^{-2})^2} = \frac{-1-(-2)}{e^{-4}} = \frac{1}{e^{-4}} = e^4 > 0$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f''(x)$	n.d.	$+$	0	-
$f(x)$	n.d.	$\smile$	P.I.	$\frown$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]-\infty, \frac{1}{e}\right]$.

O ponto de inflexão da função f tem abcissa igual a $\frac{1}{e}$.

2020, 2ª fase

6. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{4}\cos(2x) - \cos x\right)' = -\frac{1}{2}\sin(2x) + \sin x$$

Calculando a expressão algébrica da segunda derivada da função g:

$$g''(x) = \left(-\frac{1}{2}\sin(2x) + \sin x\right)' = -\cos(2x) + \cos x$$

Os pontos de inflexão correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -\cos(2x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x = x + 2k\pi \lor 2x = -x + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \lor 3x = 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k\pi \lor x = \frac{2k\pi}{3}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

Para $k=-1,\ \ x=-2\pi \quad \notin\,]0,\pi[\ \ \vee\ \ x=-\frac{2\pi}{3} \quad \notin\,]0,\pi[$

Para $k=0,\ \ x=0 \quad \notin\,]0,\pi[$

Para $k=1,\ \ x=2\pi \quad \notin\,]0,\pi[\ \ \vee\ \ x=\frac{2\pi}{3} \quad \in\,]0,\pi[$

Para $k=2,\ \ x=4\pi \quad \notin\,]0,\pi[\ \ \vee\ \ x=\frac{4\pi}{3} \quad \notin\,]0,\pi[$

Logo, $g''(x)$ tem um zero em $x=\frac{2\pi}{3}$ no intervalo $]0,\pi[$.

$g''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{2}=-\cos\pi+\cos\frac{\pi}{2}=-(-1)+0=1>0$

$g''\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\cos\left(2\times\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\frac{3\pi}{4}=-\cos\frac{3\pi}{2}+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{3\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{4}=$
$=0-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$g''(x)$	n.d	$+$	0	-	n.d
$g(x)$	n.d	$\smile$	P.I	$\frown$	n.d

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0,\frac{2\pi}{3}\right]$.

$g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\cos\left(2 \times \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{4}\cos\frac{4\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{4}\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$
$= -\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{3} - (-\cos\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

A função g tem um ponto de inflexão de coordenadas $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3}{8}\right)$.

2019, 2ª fase, caderno 2

7. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f:

$f'(x) = (x^3 + 6\ln x)' = 3x^2 + \frac{6}{x}$

Calculando a expressão algébrica da segunda derivada da função f:

$f''(x) = (3x^2 + \frac{6}{x})' = 6x - \frac{6}{x^2} = 6(x - \frac{1}{x^2})$

Os pontos de inflexão correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 6(x - \frac{1}{x^2}) = 0 \;\Leftrightarrow\; x - \frac{1}{x^2} = 0 \wedge x^2 \neq 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{x^2} \wedge x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 = 1 \wedge x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1 \wedge x \neq 0$

Logo, $f''(x)$ tem um zero em $x = 1$.

$f''(\frac{1}{2}) = \frac{6}{2} - \frac{6}{(\frac{1}{2})^2} = 3 - \frac{6}{\frac{1}{4}} = 3 - 24 = -21 < 0$

$f''(2) = 6 \times 2 - \frac{6}{2^2} = 12 - \frac{6}{4} = 12 - \frac{3}{2} = \frac{21}{2} > 0$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

x	0		1	$+\infty$
$f''(x)$	n.d	-	0	+
$f(x)$	n.d	$\frown$	P.I.	$\smile$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]0, 1]$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[1, +\infty[$.

$f(1) = 1^3 + 6\ln 1 = 1 + 0 = 1$

A função f tem um ponto de inflexão de coordenadas $(1, 1)$.

2018, Época especial, caderno 2

8. De acordo com a figura 1 podemos construir o quadro de sinal da segunda derivada da função f:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frown$	P.I.	$\smile$

Assim temos que:

$$f''(1) > 0 \text{ e } f''(2) > 0 \Rightarrow f''(1) \times f''(2) > 0$$

Opção(D)

2017, 1ª fase, grupo I

9. O gráfico da função g é simétrico relativamente ao eixo das abcissas do gráfico da função $f(x-5)$, que por sua vez é uma translação horizontal do gráfico de f associada ao vetor de coordenadas $(5,0)$.

Através da tabela de variação de sinal da função $f''(x)$ podemos construir uma tabela de variação de sinal da função $-f''(x-5)$:

x	$-\infty$	-5		5		15	$+\infty$
$f''(x-5)$	-	0	$+$	0	-	0	$+$
$-f''(x-5)$	$+$	0	-	0	$+$	0	-
$g(x)$	$\smile$	P.I.	$\frown$	P.I.	$\smile$	P.I.	$\frown$

O gráfico de g tem concavidade voltada para baixo no intervalo $]-5,5[\ \cup\ ]15,+\infty[$.

Opção(C)

2017, 2ª fase, grupo I

10. Através da figura 2 podemos construir um quadro de sinal de $f'(x)$ bem como de $f''(x)$ e conseguimos estudar o seu produto:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	-	-	-	0	$+$
$f''(x)$	-	-	-	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x) \times f''(x)$	-	0	$+$	0	-	0	$+$

C.S.$= [-2, 0] \cup [2, +\infty[$

2017, Época especial, grupo I

11. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função f, para $x > 1$:

$$f'(x) = [e^{-2x+4} + \ln(x-1)]' = -2e^{-2x+4} + \tfrac{1}{x-1}$$

$$f''(x) = [-2e^{-2x+4} + \tfrac{1}{x-1}]' = 4e^{-2x+4} - \tfrac{1}{(x-1)^2}$$

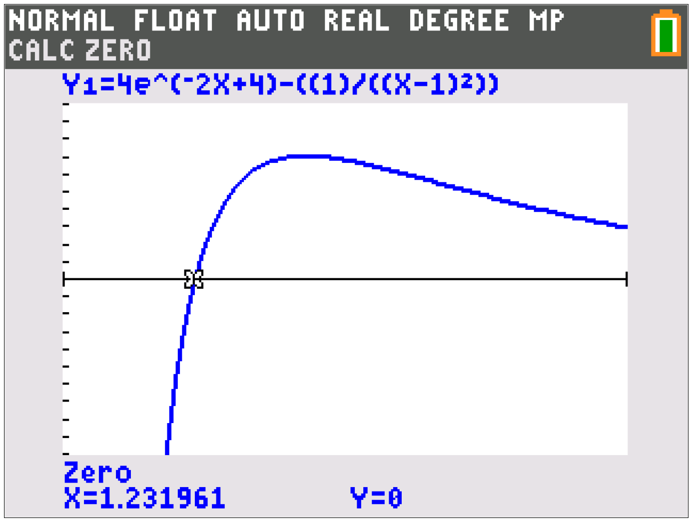
Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora representamos o gráfico da função $f''(x)$ no intervalo pedido $]1, 2[$ e calculamos o zero de $f''(x)$ neste intervalo.

$$f''(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x \approx 1,23$$

2017, Época especial, grupo II

12. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função f:

$$f''(x) = [e^x(x^2+x+1)]' = e^x(x^2+x+1) + (2x+1)e^x = e^x(x^2+x+1+2x+1) =$$
$$= e^x(x^2+3x+2)$$



Os pontos de inflexão correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2+3x+2) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0_{\,(Eq.imp.)} \vee x^2+3x+2 = 0$

$a = 1 \qquad b = 3 \qquad c = 2$

Usando a fórmula resolvente:

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{9-4\times1\times2}}{2\times1} \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-3+1}{2} \vee x = \frac{-3-1}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -2$

Assim, os pontos de inflexão da função f têm abcissas -2 e -1.

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-2,1[$ e tem a

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	-	0	$+$
$f(x)$	$\smile$	P.I.	$\frown$	P.I.	$\smile$

concavidade voltada para cima no intervalo $]-\infty,-2[\,\cup\,]-1,+\infty[$.

2016, 1ª fase, grupo II

13. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função f para $x \in]-\frac{3\pi}{2},0[$:

$$f'(x) = (\tfrac{1}{4}x^2 + \cos x)' = \tfrac{1}{2}x - \sin x$$

$$f''(x) = (\tfrac{1}{2}x - \sin x)' = \tfrac{1}{2} - \cos x$$

Os pontos de inflexão de f correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Para $k=-1$, $x = \frac{\pi}{3} - 2\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} \notin]-\frac{3\pi}{2},0[\vee x = -\frac{7\pi}{6} \notin]-\frac{3\pi}{2},0[$

Para $k=0$, $x = \frac{\pi}{3} \notin]-\frac{3\pi}{2},0[\vee x = -\frac{\pi}{3} \in]-\frac{3\pi}{2},0[$

Para $k=1$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} \notin]-\frac{3\pi}{2},0[\vee x = \frac{5\pi}{6} \notin]-\frac{3\pi}{2},0[$

Assim, o único ponto de inflexão da função f tem abcissa igual a $-\frac{\pi}{3}$.

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de f tem concavidade voltada para

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		0
$f''(x)$	n.d.	$+$	0	-	n.d.
$f(x)$	n.d.	$\smile$	P.I.	$\frown$	n.d.

baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-\frac{\pi}{3},0[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{3}[\,\cup\,]-1,+\infty[$.

2016, Época especial, grupo II

14. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função f para $x \in]\frac{1}{2},+\infty[$:

$$f'(x) = [(x+1)\ln x]' = \ln x + (x+1)\frac{1}{x} = \ln x + 1 + \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = (\ln x + 1 + \frac{1}{x})' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

Os pontos de inflexão de f correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x-1}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x-1=0 \wedge x^2 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1 \wedge x^2 \neq 0 \;\; (x \in]\frac{1}{2},+\infty[)$$

Assim, o único ponto de inflexão da função f tem abcissa igual a 1.

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

x	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$f''(x)$	n.d.	-	0	$+$
$f(x)$	n.d.	$\frown$	P.I.	$\smile$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]\frac{1}{2}, 1[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]1, +\infty[$. O ponto de inflexão da função f tem coordenadas $(1, f(1))$, ou seja, $(1, 0)$.

2015, 1ªfase, grupo II

15. O gráfico A não pode ser o gráfico da função f porque tem um ponto em que a função não é contínua, ou seja, tem um ponto onde a função não tem derivada, enquanto que a função f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio.

    O gráfico B não pode ser o gráfico da função f porque porque tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]-\infty, 0[$ portanto neste intervalo a segunda derivada é positiva, enquanto que $f''(x) < 0$ para $x \in]-\infty, 0[$.

    O gráfico C não pode ser o gráfico da função f porque a reta tangente em $x = 0$ tem declive negativo , isto é, a primeira derivada é negativa em $x = 0$, enquanto que na função f sabemos que $f'(0) > 0$.

    2015, 2ªfase, grupo II

16. De acordo com a figura 3, sabemos que o único ponto de inflexão da função f é em

$x = 0$ e que a função f tem concavidade voltada para baixo no intervalo $]-\infty, 0[$ e tem concavidade voltada para cima no intervalo $]0, +\infty[$.

Opção(C)

2015, Época especial, grupo I