Resolução - Cálculo Combinatório

1. Tendo em conta que a ordem em que se sentam os músicos interessa, temos ${}^4A_3$ hipóteses diferentes de sentarmos os 3 contrabaixistas na primeira fila que tem 4 lugares disponíveis.

   Como existem 2 filas com quatro lugares disponíveis, o número de maneiras diferentes de sentar os três contrabaixistas numa das duas filas é igual a ${}^4A_3 \times 2$.

   Da mesma forma, os restantes 5 músicos também podem trocar de lugar entre si, logo temos 5! maneiras diferentes para os sentar nos cinco lugares que faltam.

   Portanto o número de maneiras diferentes de dispor os oito músicos, ficando os três contrabaixistas numa fila é igual a:

   $${}^4A_3 \times 2 \times 5!$$

   Opção(B)

   2024, 1ª fase

2. Vamos considerar todos os números naturais com seis algarismos diferentes que é possível formar usando os algarismos 1 , 2 , 3 , 4 , 5 e 6 em que o número formado é par, inferior a trezentos mil, e com os algarismos 2 e 4 um ao lado do outro.

   Como o número formado tem de ser inferior a trezentos mil então na primeira posição pode estar o algarismo 1 ou 2. Por outro lado, para o número ser par também sabemos que o algarismo das unidades só pode ser o 2,4 ou 6.

   1ª hipótese: Na primeira posição colocamos o algarismo 1 e na última posição colocamos o algarismo 4, ou seja, o 2 tem de estar na penúltima posição de modo a estar ao lado do 4. Nas restantes posições pode ficar qualquer outro dos três algarismos que sobram de forma a não serem repetidos (3!).

$\underline{1}$ _ _ _ $\underline{2}$ $\underline{4}$

$1 \times 3! \times 1 \times 1 = 6$

2ª hipótese: Na primeira posição colocamos o algarismo 1 e na última posição colocamos o algarismo 2, ou seja, o 4 tem de estar na penúltima posição de modo a estar ao lado do 2. Nas restantes posições pode ficar qualquer outro dos três algarismos que sobram de forma a não serem repetidos (3!).

$\underline{1}$ _ _ _ $\underline{4}$ $\underline{2}$

$1 \times 3! \times 1 \times 1 = 6$

3ª hipótese: Na primeira posição colocamos o algarismo 1 e na última posição colocamos o algarismo 6. Depois temos $3 \times 2!$ maneiras de colocarmos os algarismos 2 e 4 juntos e 2 hipóteses de preencher as duas restantes posições com os dois algarismos que sobram de forma a não serem repetidos.

$\underline{1}$ _ _ _ _ $\underline{6}$

$1 \times 3 \times 2! \times 2! \times 1 = 12$

4ª hipótese: Na primeira posição colocamos o algarismo 2, ou seja, o 4 tem de estar na segunda posição de modo a estar ao lado do 2. Na última posição colocamos o algarismo 6, que é o único algarismo par que nos sobra. Depois temos 3! maneiras de colocarmos os restantes três algarismos que sobram de forma a não serem repetidos.

$\underline{2}$ $\underline{4}$ _ _ _ $\underline{6}$

$1 \times 1 \times 3! \times 1 = 6$

Usando os algarismos 1 , 2 , 3 , 4 , 5 e 6 podemos formar $6 + 6 + 12 + 6 = 30$ números pares, inferiores a trezentos mil, e com os algarismos 2 e 4 um ao lado do outro.

2024, 2ª fase

3. Existem 8 possibilidades para que a Ana, o Diogo e o Francisco fiquem juntos.
   Tendo em conta que a Ana, o Diogo e o Francisco podem trocar de lugar entre si, temos 3! maneiras de os dispor lado a lado em linha reta.

   Da mesma forma, os restantes 7 jovens também podem trocar de lugar entre si, logo temos 7! maneiras diferentes para dispor na fila.

   Portanto o número de maneiras que se podem dispor os dez jovens na fila, de modo que a Ana, o Diogo e o Francisco fiquem juntos é igual a:

$$8 \times 3! \times 7! = 241920$$

   Opção(B)

   2023, 1ª fase

4. Vamos considerar todos os números naturais de seis algarismos que é possível formar com os algarismos de 1 a 9.

   Das seis posições possíveis vamos escolher duas para pôr os dois cincos, como os números são iguais a ordem de escolha não interessa, ou seja, temos ${}^6C_2$ hipóteses.

   Depois de selecionar os dois cincos restam-nos quatro posições onde pode ficar qualquer outro dos oito algarismos que sobram. Como os algarismos se podem repetir temos 8^4 combinações possíveis.

Assim existem ${}^6C_2 \times 8^4 = 61440$ números naturais de seis algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9 com exatamente dois cincos.

Opção(B)

2023, 2ª fase

5. Temos três cores disponíveis por isso podemos escolher duas peças da mesma cor ou duas peças de cores diferentes.

   A primeira hipótese é se escolhermos duas peças da mesma cor, ou seja, neste caso não interessa a ordem com que as colocamos no tabuleiro. Das três cores escolhemos uma (${}^3C_1 = 3$) e colocamos as duas peças em duas das doze casas disponíveis no tabuleiro (como não interessa a ordem ${}^{12}C_2$) o que corresponde a $3 \times {}^{12}C_2$.

   A segunda hipótese é se escolhermos duas peças de cores diferentes, ou seja, neste caso já interessa a ordem com que as colocamos no tabuleiro porque obtemos uma configuração colorida distinta. Das três cores escolhemos duas (${}^3C_2$) e colocamos as duas peças em duas das doze casas disponíveis no tabuleiro (como interessa a ordem ${}^{12}A_2$) o que corresponde a ${}^3C_2 \times {}^{12}A_2$.

   2022, 1ª fase

6. Ao todo existem 10 possibilidades de os três cartões azuis ficarem juntos. Das nove posições que sobram vamos colocar os dois cartões brancos, como são da mesma cor não interessa a ordem ${}^9C_2$. Depois de colocados os cartões azuis e brancos sobram 7

posições, vamos colocar os três cartões pretos, como são da mesma cor não interessa a ordem ${}^{7}C_3$. Por último basta colocar nas quatro posições os quatro cartôes vermelhos ${}^{4}C_4$.

Assim o número de casos favoráveis é igual a $10 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_3 \times {}^{4}C_4$.

O número de casos possíveis é igual a ${}^{12}C_3 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_3 \times {}^{4}C_4$.

$P(\text{os cartões azuis ficarem todos juntos}) = \frac{10\times{}^{9}C_2\times{}^{7}C_3\times{}^{4}C_4}{{}^{12}C_3\times{}^{9}C_2\times{}^{7}C_3\times{}^{4}C_4} = \frac{1}{22}$

2022, 2ª fase

7. Vamos considerar todos os números naturais de cinco algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos de 0 a 5 (ao todo 6 algarismos) em que o algarismo das unidades igual a 5.

Na última posição fica o algarismo 5 ou seja só temos 1 hipótese de escolha.

$\_ \times \_ \times \_ \times \_ \times \underline{1}$

Na primeira posição não pode estar o algarismo 0 nem o 5 que já colocámos na última posição logo temos 4 hipóteses de escolha (1,2,3 e 4) para o algarismo da primeira posição.

$\underline{4} \times \_ \times \_ \times \_ \times \underline{1}$

Na segunda posição pode estar o algarismo 0 ou qualquer algarismo que não seja o 5 e o que já colocámos na primeira posição logo temos 4 hipóteses de escolha para o algarismo da segunda posição.

$\underline{4} \times \underline{4} \times \_ \times \_ \times \underline{1}$

Nas restantes posições pode ficar qualquer outro dos três algarismos que sobram de forma a não serem repetidos.

$\underline{4} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 96$

Assim existem 96 números naturais de cinco algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos de 0 a 5 em que o algarismo das unidades igual a 5.

Opção(D)

2022, Época especial

8. Sabemos que os dois condutores são dirigentes, o número de maneiras de escolher dois dos três dirigentes é igual a ${}^3C_2$ mas como eles podem permutar entre si temos ${}^3C_2 \times 2!$ de hipóteses.

   No automóvel, vão dois jogadores de cada sexo, ou seja, temos de escolher duas das cinco raparigas e dois dos cinco rapazes sendo que também eles podem permutar entre si (diferentes lugares no carro) logo temos ${}^5C_2 \times {}^5C_2 \times 4!$ possibilidades.

   Das restantes 8 pessoas vamos distribuí-las pelos 8 lugares que sobram, por isso temos $8!$ hipóteses.

   O número de maneiras diferentes de distribuir os catorze elementos da comitiva pelos catorze lugares disponíveis, sabendo-se que os dois condutores são dois dos dirigentes e que, no automóvel, vão dois jogadores de cada sexo é igual a:

$$^3C_2 \times 2! \times {}^5C_2 \times {}^5C_2 \times 4! \times 8!$$

2021, 1ª fase

9. O valor, arredondado às centésimas, da probabilidade de cada um dos dois conjuntos ficar com três raquetes de badmínton e três raquetes de ténis é igual a:

$$\frac{^6C_3 \times {}^6C_3}{^{12}C_6} \approx 0,43$$

Opção(B)

2021, 2ª fase

10. O número de triângulos que é possivel formar escolhendo dois vértices da reta r e um vértice da reta s é igual a $^5C_2 \times {}^nC_1$.

O número de triângulos que é possivel formar escolhendo um vértice da reta r e dois vértices da reta s é igual a $^5C_1 \times {}^nC_2$.

Assim, o número de triângulos total que é possivel formar é igual a $^5C_2 \times {}^nC_1 + {}^5C_1 \times {}^nC_2$.

Sabendo que é possível definir exatamente 175 triângulos ficamos com a equação:

$$^5C_2 \times {}^nC_1 + {}^5C_1 \times {}^nC_2 = 175$$

Resolvendo a equação conseguimos determinar n:

$$^5C_1 \times {}^nC_2 + {}^nC_1 \times {}^5C_2 = 175 \Leftrightarrow 5 \times {}^nC_2 + n \times 10 = 175 \Leftrightarrow 5 \times \frac{n!}{2!(n-2)!} + 10n = 175 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ 5\times\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}+10n=175\ \Leftrightarrow\ 5\times\frac{n(n-1)}{2}+10n=175\ \Leftrightarrow\ 5\times\frac{n^2-n}{2}+10n=175\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \frac{5n^2-5n}{2}+\frac{20n}{2}=\frac{350}{2}\ \Leftrightarrow\ 5n^2+15n-375=0\ \Leftrightarrow\ n=7\quad\vee\quad n=-10$

Como n é o número de pontos assinalados na reta s tem de ser positivo, logo $n=7$.

2021, 2ª fase

11. Consideremos um conjunto de doze objetos constituído por cinco livros e sete canetas.

A Fernanda vai oferecer três livros e três canetas a um dos netos e os restantes objetos ao outro, ou seja, a ordem de escolha dos objetos não interessa e este conjunto pode ficar com um neto ou com o outro, o que equivale a:

$$^5C_3\times{}^7C_3\times 2=700$$

Ou então, a Fernanda vai dar quatro livros e duas canetas a um dos netos, mais uma vez a ordem de escolha dos objetos não interessa e este conjunto pode ficar com um neto ou com o outro, que equivale a:

$$^5C_4\times{}^7C_2\times 2=210$$

Logo a Fernanda tem $^5C_3\times{}^7C_3\times 2+{}^5C_4\times{}^7C_2\times 2=910$ maneiras diferentes de repartir os doze objetos pelos seus dois netos.

2021, Época especial

12. No grupo das quatro pessoas existem $^4C_2$ hipóteses para exatamente duas delas escolherem o número cinco. Tendo em conta que duas das quatro pessoas já escolheram o

número cinco, as outras duas pessoas só têm quatro hipóteses de escolha de entre os números: 1, 2, 3 e 4, logo o número de casos favoráveis é $4^2 \times {}^4C_2 = 96$.

O número de hipóteses posssíveis para as quatro pessoas escolherem um número de entre cinco números (1, 2, 3, 4 e 5) é igual a 5^4.

Assim, a probabilidade de exatamente duas pessoas escolherem o número 5 é igual a:

$$\frac{4^2 \times {}^4C_2}{5^4} = \frac{96}{625} = 0,1536$$

Opção(D)

2020, 1ª fase

13. De foma a obtermos todos os números naturais superiores a 9999 e inferiores a 22 000 com os algarismos 0, 1, 2 e 3, vamos considerar três hipóteses.

- 1ª hipótese: Na primeira posição fica o algarismo 1 e nas restantes pode ficar qualquer outro dos quatro algarismos.

  $\underline{1}$ _ _ _ _

  Neste caso o número de maneiras diferentes que podemos dispor os números 0,1,2,e 3 é igual a 4^4.

- 2ª hipótese: Na primeira posição fica o algarismo 2, na segunda o algarismo 0 e nas restantes posições pode ficar qualquer outro dos quatro algarismos.

$\underline{2}\ \underline{0}\ \_\ \_\ \_$

Então o número de maneiras diferentes que podemos dispor os números 0,1,2,e 3 é igual a 4^3.

- 3ª hipótese: Na primeira posição fica o algarismo 2, na segunda o algarismo 1 e nas restantes posições pode ficar qualquer outro dos quatro algarismos.

  $\underline{2}\ \underline{1}\ \_\ \_\ \_$

  Logo o número de maneiras diferentes que podemos dispor os números 0,1,2,e 3 é igual a 4^3.

Considerando todos os números naturais superiores a 9999 e inferiores a 22 000, o número de maneiras diferentes que podemos dispor os números 0,1,2,e 3 é igual a:

$$4^4 + 4^3 + 4^3 = 384$$

. **Opção(C)**

2020, 2ª fase

14. De foma a obtermos um número par, menor do que 5000 e capicua, a última posição do número tem de ser preenchida pelos algarismos 2 ou 4 logo temos duas hipóteses para a última posição do número.

    Como o número é capicua (sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número), o algarismo na última posição tem de ser igual ao algarismo que está na primeira posição por isso só há uma única hipótese para a escolha do algarismo na primeira posição do número.

$\underline{1} \times \_ \times \_ \times \underline{2}$

As restantes duas posições têm de ser preenchidas pelo mesmo algarismo de entre os 6 algarismos existentes nas faces do dado. Por isso para uma das posições temos 6 hipóteses e para a outra posição temos apenas uma única hipótese.

$\underline{1} \times \underline{6} \times \underline{1} \times \underline{2}$

Como o dado tem 6 faces ou seja 6 algarismos e é lançado 4 vezes, a quantidade de números que podem ser obtidos tendo em conta que os algarismos podem ser repetidos, é igual a $6^4 = 1296$.

A probabilidade de esse número ser par, menor do que 5000 e capicua é igual a:

$$\frac{12}{1296} = \frac{6}{648} = \frac{3}{324} = \frac{1}{108}$$

. **Opção(C)**

2020, Época especial

15. Para que o número obtido com os algarismos 5,6 e 7 seja ímpar e maior do que seis milhões, então a primeira posição só pode ser ocupada pelos algarismos 6 ou 7 e a última posição só pode ser ocupada pelo algarismos 5 ou 7.

- Vamos considerar para primeira hipótese que a primeira posição é ocupada pelo algarismo 6 e a última pelo algarismo 5.

$$\underline{6}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \underline{5}$$

As restantes 5 posições podem ser ocupadas pelos algarismos 5, 6, 6, 6 e 7 o que faz ${}^5C_3 \times {}^2C_1 \times {}^1C_1 = 20$ hipóteses.

- Para segunda hipótese que vamos admitir que a primeira posição é ocupada pelo algarismo 6 e a última pelo algarismo 7.

$$\underline{6}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \underline{7}$$

As restantes 5 posições podem ser ocupadas pelos algarismos 5, 5, 6, 6 e 6 o que faz ${}^5C_3 \times {}^2C_2 \times {}^1C_1 = 10$ hipóteses.

- Em última alternativa a primeira posição é ocupada pelo algarismo 7 e a última pelo algarismo 5.

$$\underline{7}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \underline{5}$$

As restantes 5 posições podem ser ocupadas pelos algarismos 5, 6, 6, 6 e 6 o que faz ${}^5C_4 \times {}^1C_1 = 5$ hipóteses.

Logo, o número de números naturais de sete algarismos que se podem escrever utilizando dois algarismos 5, quatro algarismos 6 e um algarismo 7 de modo que sejam ímpares e maiores do que seis milhões é:

$$20 + 10 + 5 = 35$$

2019, 1ª fase, caderno 1

16. Como o delegado (D) já faz parte da comissão vamos considerar que ele já foi escolhido por isso sobram-nos 15 raparigas (A) e 10 rapazes (B). A comissão tem de ser mista logo só temos duas hipóteses, escolhemos duas raparigas ou escolhemos uma rapariga e um rapaz:

$$\underline{D}\ \underline{A}\ \underline{A} \quad \text{ou} \quad \underline{D}\ \underline{A}\ \underline{B}$$

Tendo em conta que a ordem de escolha não interessa, o número de comissões mistas e diferentes que se podem formar, sabendo-se que o delegado de turma tem de fazer parte da comissão é igual a ${}^{15}C_2 + {}^{10}C_1 \times {}^{15}C_1 = 255$.

Opção(D)

2019, 2ª fase, caderno 1

17. Para as primeiras 3 posições da disposição dos nove cartões em cima de uma mesa, lado a lado, em linha reta, existem 4 hipóteses que correspondem aos 4 números primos $\{2, 3, 5, 7\}$. Como a ordem interessa (números diferentes) temos ${}^{4}A_3$ maneiras diferentes de os selecionar .

Para as restantes 6 posições, temos 6 algarismos disponíveis. Tendo em conta que os algarismos são todos diferentes e não se repetem temos ${}^{6}A_6$ maneiras diferentes de os selecionar.

Logo temos ${}^{4}A_3 \times {}^{6}A_6 = 17280$ maneiras diferentes para colocar os cartões, de modo que os números inscritos nos três primeiros cartões sejam primos.

2019, Época especial, caderno 1

18. Existem 2 possibilidades para dispor os doze alunos, de modo que os alunos da mesma disciplina fiquem juntos:

$$\underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \ \underline{E}\ \underline{E}\ \underline{E}\ \underline{E} \quad \text{ou} \quad \underline{E}\ \underline{E}\ \underline{E}\ \underline{E}\ \ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}$$

Tendo em conta que os 4 alunos de Espanhol podem trocar de lugar entre si, logo temos 4! maneiras de os dispor lado a lado em linha reta.

Da mesma forma, os 8 alunos de Inglês também podem trocar de lugar entre si, logo temos 8! maneiras de os dispor lado a lado em linha reta.

Portanto o número de maneiras que se podem dispor os doze alunos, de modo que os alunos da mesma disciplina fiquem juntos é igual a:

$$2 \times 4! \times 8! = 1935360$$

Opção(D)

2018, 1ª fase, caderno 1

19.

19.1. Para a primeira posição do código de quatro caracteres, existem 5 hipóteses que correspondem às 5 vogais.

Para as restantes 3 posições do código, temos 9 algarismos disponíveis. Tendo em conta que os algarismos não se repetem temos $9 \times 8 \times 7 = 504$ maneiras diferentes de os selecionar.

Logo podemos formar $5 \times 504 = 2520$ códigos iniciados por uma vogal seguida de três algarismos diferentes.

Opção(D)

19.2. O número de casos possíveis é igual ao número de arranjos com repetição da seleção de 4 dos 14 caracteres disponíveis, ou seja, ${}^{14}A'_4 = 14^4$.

Para que produto dos quatro algarismos diferentes seja um número ímpar, todos os quatro algarismos têm ser ímpares . De 1 a 9 temos 5 algarismos ímpares, portanto o número de casos favoráveis é igual a $5 \times 4 \times 3 \times 2$.

Usando a regra de Laplace:

P(Código ser constituído por quatro algarismos diferentes cujo produto é um número ímpar)= $\frac{5\times4\times3\times2}{14^4} \approx 0,003$

2018, 2ª fase, caderno 1

20. Tendo 5 pessoas o objectivo é formar conjuntos com pelo menos três pessoas, ou seja, podemos formar conjutos com 3 pessoas, conjuntos com 4 pessoas ou ainda conjuntos com 5 pessoas. Como a ordem de escolha das pessoas não interessa vamos usar combinações:

$$ {}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5 = 16 $$

Opção(D)

2018, Época especial, caderno 1

21. Os números naturais de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9 e que são múltiplos de 5 têm na sua última posição um algarismo múltiplo de cinco, considerando os algarismos de 1 a 9 só pode ser o número 5.

$$\_\ \_\ \_\ \underline{5}$$

As restantes 3 posições anteriores podem ser ocupadas por qualquer algarismo de 1 a 9.

Logo, o número de números que são múltiplos de cinco é:

$$9 \times 9 \times 9 \times 1 = 9^3 = 729$$

Opção(A)

2017, 1ª fase, grupo I

22. Considerando que os algarismos pares de 1 a 5, ou seja, os algarismos 2 e 4 ficam juntos, temos 4 maneiras diferentes de os colocar:

$$\underline{2}\ \underline{4}\ \_\ \_\ \_$$
$$\_\ \underline{2}\ \underline{4}\ \_\ \_$$
$$\_\ \_\ \underline{2}\ \underline{4}\ \_$$
$$\_\ \_\ \_\ \underline{2}\ \underline{4}$$

O número de maneiras diferentes que podemos dispor os números 2 e 4 juntos tendo em conta que podem permutar entre si é igual a $4 \times 2!$.

As restantes 3 posições podem ser ocupadas pelos algarismos 1, 3 e 5 o que faz 3! hipóteses.

Logo, o número de números naturais de cinco algarismos diferentes de 1 a 5 que têm os algarismos pares um a seguir ao outro é:

$$2! \times 4 \times 3! = 48$$

Opção(B)

2017, 2ª fase, grupo I

23. O número de casos possíveis é igual ao número de escolhas diferentes que podem ser feitas de quatro dos trinta cartões existentes no saco, ou seja, ${}^{30}C_4$.

    Considerando que os cartões com os dois menores números saídos, 7 e 22 já estão escolhidos, os restantes dois números devem ser escolhidos dos $30 - 22 = 8$ cartões com números superiores a 22. Portanto o número de casos favoráveis é igual a ${}^{1}C_1 \times {}^{1}C_1 \times {}^{8}C_2$.

    Usando a Regra de LaPlace vem que:

    $P(\text{"Os dois menores números saídos serem o 7 e o 22"}) = \frac{n^{o}\ de\ casos\ favoráveis}{n^{o}\ de\ casos\ possíveis} =$
    $= \frac{{}^{1}C_1 \times {}^{1}C_1 \times {}^{8}C_2}{{}^{30}C_4} \approx 0,001$

    2017, 2ª fase, grupo II

24. Considerando que o número formado tem de ser maior do que 20 000, a primeira posição só pode ser ocupada por um dos algarismos 2, 3 e 4, ou seja, temos 3 hipóteses para a primeira posição:

$$\underline{2}\ \_\ \_\ \_\ \_ \quad \text{ou} \quad \underline{3}\ \_\ \_\ \_\ \_ \quad \text{ou} \quad \underline{4}\ \_\ \_\ \_\ \_$$

As restantes 4 posições podem ser ocupadas por qualquer dos 4 algarismos que sobram tendo em conta que não se podem repetir, portanto temos 4! hipóteses.

Logo, o número de números naturais maiores do que 20 000 e com os cinco algarismos todos diferentes que é possível formar com os algarismos de 0 a 4 é igual a:

$$3 \times 4! = 72$$

Opção(C)

2017, Época especial, grupo I

25. Para o número com 9 algarismos ser ímpar então o último algarismo tem de ser um número ímpar, neste caso só pode ser 1.

    Sombram-nos 8 bolas: quatro bolas com o número 2, uma bola com o número 4 e três bolas com o número 1.

    A quantidade de números ímpares diferentes que se podem obter é:

    $$^{8}C_4 \times {}^{4}C_1 \times {}^{3}C_3 = 280$$

    2016, 1ª fase, grupo II

26. No total existem 9 fichas (todas diferentes), quatro com número par e cinco com número ímpar.

No tabuleiro existem 4 filas horizontais logo o número de formas que existem para dispor as quatro fichas com números pares (todas diferentes entre si) no tabuleiro, ocupando uma única fila horizontal é igual a $4 \times 4!$.

Depois de colocadas as fichas pares restam $16 - 4 = 12$ posições disponíveis no tabuleiro que podem ser ocupadas por fichas com número ímpar. O número de formas que existem para dispor as cinco fichas com números ímpares (todas diferentes entre si) nas restantes posições do tabuleiro é igual a ${}^{12}A_5$

Assim o número de maneiras diferentes de dispor as nove fichas de forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal do tabuleiro é:

$$4 \times 4! \times {}^{12}A_5 = 9123840$$

2016, 2ª fase, grupo II

27. Existem 2 possibilidades para sentar os dois rapazes nas extremidades do banco porque eles podem trocar entre si, ou seja, 2!.

    Nos restantes 4 lugares do meio vamos sentar as 4 raparigas sendo que também elas podem trocar de lugar entre si, logo temos 4! maneiras de as sentar.

    Portanto o número de maneiras de sentar os dois rapazes e as quatro raparigas de modo que, fique um rapaz em cada extremidade do banco é igual a:

$$2! \times 4! = 48$$

Opção(C)

2015, 1ª fase, grupo I

28. Consideremos o acontecimento A: "O poliedro ficar com exatamente duas faces brancas, ambas triangulares, exatamente duas faces azuis, ambas quadradas, e as restantes faces coloridas com cores todas diferentes".

O número de casos possíveis é igual ao número de hipóteses que temos para pintar as 9 faces do poliedro com a 7 cores, sendo que vamos ter de repetir cores, ou seja, é igual a ${}^{9}A'_{7} = 7^{9}$.

O número de hipóteses diferentes para pintarmos de branco 2 das 4 faces triangulares do poliedro é igual a ${}^{4}C_{2}$.

O número de hipóteses diferentes para pintarmos de azul 2 das 5 faces quadradas do poliedro é igual a ${}^{5}C_{2}$.

O número de hipóteses que temos para pintar as restantes 5 faces do poliedro (cada uma com uma cor diferente) com as $7-2=5$ cores que nos restam é igual a ${}^{5}A_{5} = 5!$.

Assim o número de casos favoráveis é igual a ${}^{4}C_{2} \times {}^{5}C_{2} \times 5!$.

Usando a Regra de LaPlace:

$$P(\text{A}) = \frac{{}^{4}C_{2} \times {}^{5}C_{2} \times 5!}{7^{9}} \approx 0,0002$$

2015, 2ª fase, grupo II

29. Considerando que os rapazes (R) ficam juntos, temos 7 maneiras diferentes de os colocar:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\underline{R} & \underline{R} & \underline{R} & _ & _ & _ & _ & _ & _ \\
_ & \underline{R} & \underline{R} & \underline{R} & _ & _ & _ & _ & _ \\
_ & _ & \underline{R} & \underline{R} & \underline{R} & _ & _ & _ & _ \\
_ & _ & _ & \underline{R} & \underline{R} & \underline{R} & _ & _ & _ \\
_ & _ & _ & _ & \underline{R} & \underline{R} & \underline{R} & _ & _ \\
_ & _ & _ & _ & _ & \underline{R} & \underline{R} & \underline{R} & _ \\
_ & _ & _ & _ & _ & _ & \underline{R} & \underline{R} & \underline{R}
\end{array}$$

O número de maneiras diferentes que temos de dispor os rapazes juntos tendo em conta que podem permutar entre si é igual a $7 \times 3!$.

As restantes 6 posições são ocupadas pelas 6 raparigas o que faz 6! hipóteses.

Logo, o número de maneiras o podem fazer, de modo que os rapazes fiquem juntos é:

$$7 \times 3! \times 6! = 7! \times 3! = 30240$$

Opção(B)

2015, Época especial, grupo I