Resolução - Assíntotas e limites notáveis

1. Como $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e sabendo que f é contínua no seu domínio pois resulta de operações entre funções contínuas, a única possível assíntota vertical do gráfico da função f, é a reta $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^4(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \times \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1}{0^+} = \left[\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}\right]^2 \times (+\infty) = 1^2 \times (+\infty) = +\infty$$

Concluímos que a reta $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f.

2024, 1ª fase

2. Sabendo que a reta de equação $y = 3x - 5$ é assíntota ao gráfico da função g, quando $x \to +\infty$ temos que:

- $m = \lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x} \Leftrightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 3$

- $b = \lim_{x\to +\infty} [g(x) - mx] \Leftrightarrow \lim_{x\to +\infty} [g(x) - 3x] = -5 \Leftrightarrow \lim_{x\to +\infty} [g(x) - 3x + 5] = 0$

Opção(D)

2024, 2ª fase

3. $m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(2-e^{-x})+x+2}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(2-e^{-x})}{x} + \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} =$

$= \frac{\ln(2-e^{-\infty})}{+\infty} + 1 + 0 = 1$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(2-e^{-x}) + x + 2 - x\right] =$

$= \ln(2 - e^{-\infty}) + 2 = \ln 2 + 2$

Concluímos que a reta definida por $y = x + \ln 2 + 2$ é assíntota oblíqua do gráfico de f quando $x \to +\infty$.

2023, 2ªfase

4. Como $D_f =]0, +\infty[$, a única possível assíntota vertical do gráfico da função f é a reta $x = 0$.

   $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x + 2x}{x} = \frac{\ln 0^+ + 0}{0^+} = \frac{-\infty + 0}{0^+} = -\infty$

   Concluímos que a reta $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f.

   A função f só está definida em $]0, +\infty[$, logo vamos averiguar a possível existência de uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x + 2x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{2x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} + 2 = 0 + 2 = 2$ (Limite notável)

   Concluímos que $f(x)$ tem uma assíntota horizontal de equação $y = 2$ quando $x \to +\infty$.

   2023, Época especial

5. Como $D_g =]1, +\infty[$, a única possível assíntota vertical do gráfico da função g, é a reta

$x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} [5x - 3\ln(x-1)] = 5 - 3\ln(0^+) = 5 - 3(-\infty) = +\infty$$

Concluímos que a reta definida $x = 1$ é assíntota vertical do gráfico de g.

A função g só está definida em $]1, +\infty[$, logo vamos averiguar a existência de uma única assíntota oblíqua quando $x \to +\infty$.

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{5x-3\ln(x-1)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left[5 - 3\frac{\ln(x-1)}{x}\right] = 5 - 3\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x} \quad (*_2)$$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1 \quad (y \to +\infty$ quando $x \to +\infty)$

$$(*_2) = 5 - 3\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(y)}{y+1} = 5 - 3\frac{1}{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{y+1}{\ln(y)}} = 5 - \frac{3}{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{y}{\ln(y)} + \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln y}} = 5 - \frac{3}{+\infty+0} = 5$$

(Limite notável)

$$b = \lim_{x\to +\infty} [g(x) - 5x] = \lim_{x\to +\infty} -3\ln(x-1) = -3 \times +\infty = -\infty$$

Concluímos a função g não tem assíntotas oblíquas.

2022, 1ªfase

6. Como $D_h =]0, +\infty[$, a única possível assíntota vertical do gráfico da função h, é a reta $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + \ln x}{e^x - 1} = \frac{1-\infty}{1^+-1} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Concluímos que a reta definida por $x=0$ é assíntota vertical do gráfico de h.

A função h só está definida em $]0,+\infty[$, logo vamos averiguar a possível existência de uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+\ln x}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1+\frac{\ln x}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}}{1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}}{1-0} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+0\times 0}{1} = 1$$

Concluímos que $h(x)$ tem uma assíntota horizontal de equação $y=1$ quando $x\to+\infty$.

2022, 2ªfase

7. Vamos começar por determinar a equação da assíntota oblíqua ao gráfico de g quando x tende para $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^x)-x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} - \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} - 1 = \frac{\ln(1+e^{-\infty})}{-\infty} - 1 = \frac{\ln(1+0^+)}{-\infty} - 1 = -1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \big(g(x)-mx\big) = \lim_{x\to-\infty} \big(\ln(1+e^x)-x+x\big) = \lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) =$$

$$= \ln(1+e^{-\infty}) = \ln(1+0^+) = \ln 1 = 0$$

Concluímos que a reta definida por $y=-x$ é assíntota oblíqua do gráfico de g quando

$x \to -\infty$.

Vamos calcular a assíntota horizontal ao gráfico de g, quando x tende para $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(1+e^x) - x\right) = \lim_{x\to+\infty} = \left(\ln(1+e^x) - \ln e^x\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{+\infty}}+1\right) = \ln 1 = 0$$

Concluímos que a reta definida por $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de g quando $x \to +\infty$.

2022, Época especial

8. A função h só está definida em $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$, logo vamos averiguar a existência de uma única assíntota oblíqua quando $x \to +\infty$.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{2x^2-\ln x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^3 - x\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3\left(2-\frac{\ln x}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2-\frac{\ln x}{x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}} = \frac{1}{2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \times \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = \frac{1}{2-0\times 0} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left[h(x) - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3}{2x^2-\ln x} - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-(2x^3-x\ln x)}{4x^2-2\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{4x^2-2\ln x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{2x^2-\ln x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{x^2\left(2-\frac{\ln x}{x^2}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}{2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}{2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{0}{2-0\times 0} = \frac{1}{2} \times \frac{0}{2} = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

Concluímos que $h(x)$ tem uma assíntota oblíqua de equação $y = \frac{1}{2}x$ quando $x \to +\infty$.

2021, 1ªfase

9. Vamos verificar a existência de assíntotas horizontais do gráfico da função f:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} - \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 1 - \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} \quad (*_1)$$

Fazendo a mudança de variável: $y = -x \ \ (y \to +\infty \ \text{ quando } \ x \to -\infty)$

$(*_1) = 1 - \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{-y} = 1 + \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} \quad = +\infty$ (Limite notável)

Não existe assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x+1)^2}} - 3 = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{(x+1)^2}} - 3 =$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2}} - 3 = \sqrt{1} - 3 = -2$$

Concluímos que a reta $y = -2$ é assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to +\infty$.

2021, 2ªfase

10. Vamos verificar a existência de assíntotas horizontais do gráfico da função f:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{e^{x-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-2}} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-2}} = e^2 \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}} - \frac{1}{+\infty} = 0$$

$y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to +\infty$.

2021, Época especial

11. A função f só está definida em $]-\infty, 2]$, logo vamos averiguar a existência de uma única assíntota oblíqua quando $x \to -\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\ln(e^x+1)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(e^x+1)}{x} =$$

$$= 1 + \frac{\ln(e^{-\infty}+1)}{-\infty} = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} x + \ln(e^x+1) - x = \lim_{x\to-\infty} \ln(e^x+1) = \ln(e^{-\infty}+1) =$$

$$= \ln 1 = 0$$

Concluímos que $f(x)$ tem uma assíntota oblíqua de equação $y = x$ quando $x \to -\infty$.

2020, 1ª fase

12. Vamos verificar a existência de assíntotas horizontais do gráfico da função h:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}(1+xe^{x-1}) = 1+\lim_{x\to-\infty} xe^{x-1} = (*_2)$$

Fazendo a mudança de variável: $y=-x$ $\;(y\to+\infty\;$ quando $\;\to-\infty)$

$$(*_2) = 1+\lim_{y\to+\infty} -ye^{-y-1} = 1-\lim_{y\to+\infty} ye^{-y}.e^{-1} = 1-e^{-1}\lim_{y\to+\infty} ye^{-y} =$$

$$= 1-\frac{1}{e}\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y} = 1-\frac{1}{e}\frac{1}{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}} = 1-\frac{1}{e}\times\frac{1}{+\infty} = 1 \qquad \text{(Limite notável)}$$

Concluímos que a reta $y=1$ é assíntota horizontal do gráfico de h quando $x\to-\infty$.

2020, 2ª fase

13. Como $D_f = \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, a função f não tem assíntotas horizontais nem oblíquas. As únicas possíveis assíntotas verticais do gráfico da função f, são as retas $x=0$ e $x=\frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{e^{2x}-1}{\tan x} = \lim_{x\to0^+}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{\tan x} = (*_1)$$

Fazendo a mudança de variável: $y=2x \Leftrightarrow x=\frac{y}{2}$ $\;(y\to0^+\;$ quando $\;x\to0^+)$

$$(*_1) = \lim_{y\to0^+}\frac{e^y-1}{y}\times\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = 1\times\lim_{x\to0^+}\frac{2x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sin x}\times\lim_{x\to0^+} 2\cos x =$$

$= \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x}} \times 2 = \frac{1}{1} \times 2 = 2 \quad$ (Limite notável)

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{e^{2x}-1}{\tan x} = \frac{e^{\frac{2\pi}{2}}-1}{\tan \frac{\pi}{2}^-} = \frac{e^{\pi}-1}{+\infty} = 0$

Concluímos que o gráfico da função f não tem assíntotas verticais.

2020, Época especial

14. Atendendo ao domínio da função $h(x)$, sabemos que tem assíntotas oblíquoas apenas quando $x \to +\infty$.

Calculando o declive da assíntota, temos que:

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^{-x}}{x}+2x-\frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x^2} + 2 - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) =$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} + 2 - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{e^{-\infty}}{(+\infty)^2} + 2 - \frac{1}{\sqrt{(+\infty)^3}} = 0 + 2 - 0 = 2$

Opção(B)

2019, 1ª fase, caderno 2

15. Como $D_h = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, a única possível assíntota vertical do gráfico da função h, é a retas $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^+} = +\infty$

Concluímos que a reta $x = 1$ é assíntota vertical do gráfico de h.

Vamos verificar a existência de assíntotas horizontais do gráfico da função h:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0$

Concluímos que a reta $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de h quando $x\to-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{e^x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} - \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Concluímos que o gráfico da função h não tem assíntota horizontal quando $x\to+\infty$.

2019, 2ª fase, caderno 2

16. Vamos determinar a assíntota oblíqua da função g quando $x\to+\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1-3x}{1-e^{-x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x}{x(1-e^{-x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-e^{-x}} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x}{x} = \frac{1}{1-e^{-\infty}} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{x} =$$
$$= 1 \times -3 = -3$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x}{1-e^{-x}} + 3x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x+3x(1-e^{-x})}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x+3x-3xe^{-x})}{1-e^{-x}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3\frac{x}{e^x}}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{3}{\frac{e^x}{x}}}{1-e^{-x}} = \frac{1-\frac{3}{+\infty}}{1-e^{-\infty}} = 1$$

A função g tem uma assíntota oblíqua de equação $y=-3x+1$ quado $x\to+\infty$.

2019, Época especial, caderno 2

17. Como $D_f =]0,\pi[$, as únicas possíveis assímptotas verticais do gráfico da função f, são as retas $x=0$ e $x=\pi$.

► $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$ (Limite notável)

Concluímos que a reta definida $x = 0$ não é assíntota vertical do gráfico de f.

► $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi^-} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi^-}{\sin \pi^-} = \frac{\pi^-}{0^+} = +\infty$

Concluímos que a reta definida $x = \pi$ é assíntota vertical do gráfico de f.

Opção(B)

2018, 1ª fase, caderno 2

18. Vamos verificar se existem assíntotas horizontais:

► $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3 + \frac{e^x}{1-x}) = 3 + \frac{e^{-\infty}}{1-(-\infty)} = 3 + \frac{0^+}{+\infty} = 3 + 0 = 3$

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$, então a reta $y = 3$ é assíntota horizontal da função f quando $x \to -\infty$.

► $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2)+2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{+\infty} =$
$= 2 \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} + 0 = 2 \times 0 + 0 = 0$ (Limite notável)

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, então a reta $y = 0$ é assíntota horizontal da função f quando $x \to +\infty$.

2018, 2ª fase, caderno 2

19.
- A função h é contínua em $[-\frac{\pi}{3}, 0[$ pois resulta do quociente entre funções trigonométricas que são contínuas.
- Da alínea anterior resolta que a função h é contínua em $x = 0$.

- A função h é contínua em $[-\frac{\pi}{3}, +\infty[$ pois resulta do quociente entre uma função exponencial e uma polinomial que são contínuas.

Assim a função h é uma função contínua no seu domínio ($D_h = [-\frac{\pi}{3}, +\infty[$).

Vamos verificar se existem assíntotas não verticais:

A função h só está definida em $[-\frac{\pi}{3}, +\infty[$, logo só temos de averiguar a existência de uma única assíntota não vertical quando $x \to +\infty$.

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \times \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = +\infty \times \frac{1}{1+\frac{1}{+\infty}} = +\infty \times 1 = +\infty$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$ concluímos que $h(x)$ não tem assíntotas não verticais.

2018, Época especial, caderno 2

20. A reta de equação $y = -x$ é assímptota oblíqua da função f de domínio $\mathbb{R}^+$ por isso vem que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

A reta de equação $y = -x$ também é assímptota oblíqua da função g de domínio $\mathbb{R}^+$ por isso vem que:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

Assim temos que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)\times g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x\to+\infty} g(x) = -1 \times -\infty = +\infty$$

Opção(A)

2017, 1ª fase, grupo I

21. As assíntotas paralelas aos eixos coordenados, se existirem, são assíntotas verticais ou horizontais.

Vamos verificar se existem assíntotas verticais:

$D_f = \mathbb{R}^+$, por isso a única possível assíntota vertical da função f é a reta de equação $x = 0$. A função f é contínua no seu domínio pois resulta de operações entre funções contínuas neste domínio.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 0^+}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ concluímos que $x = 0$ é assíntota vertical da função f.

Vamos verificar se existem assíntotas horizontais:

A função f só está definida em $\mathbb{R}^+$, logo só temos de averiguar a existência de uma única assíntota horizontal quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{(Limite notável)}$$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ concluímos que $y = 0$ é assíntota horizontal da função f.

2017, 2ª fase, grupo II

22. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)+e^x-x}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} + \frac{0}{-\infty} = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

Opção(D)

2016, 1ª fase, grupo I

23. $D_f =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ e f é contínua no seu domínio pois resulta de operações entre funções contínuas neste domínio, por isso as duas únicas possíveis assíntotas verticais da função f são as retas de equação $x=-1$ e $x=1$.

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \ln(\frac{x-1}{x+1}) = \ln(\frac{-1^- -1}{-1^- +1}) = \ln(\frac{-2}{0^-}) = \ln(+\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \ln(\frac{x-1}{x+1}) \ln(\frac{1^+ -1}{1^+ +1}) = \ln(\frac{0^+}{2}) = \ln 0^+ = -\infty$

Como $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$ concluímos que $x=-1$ e $x=1$ são assíntotas verticais da função f.

2016, 1ª fase, grupo II

24. $D_f =]-\frac{\pi}{2},+\infty[$, logo só poderá existir uma assíntota oblíqua de equação $y=mx+b$ quando $x\to+\infty$.

► $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 1-0 = 1$
(Limite notável)

► $b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} x - \ln x - x = \lim_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty$

Como o valor de b não é finito então não existe assíntota oblíqua quando $\to +\infty$.

2016, 2ª fase, grupo II

25. Calculando o valor do limite:

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \ln(e^x + x) - x = \lim_{x\to+\infty} \ln(e^x + x) - \ln(e^x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(\frac{e^x+x}{e^x}) = \lim_{x\to+\infty} \ln(\frac{e^x}{e^x} \times \frac{1+\frac{x}{e^x}}{1}) = \lim_{x\to+\infty} \ln(1 + \frac{x}{e^x}) = \ln(1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}) = \ln(1 + \frac{1}{+\infty}) = \ln(1) = 0$
(Limite notável)

A reta de equacão $y = x$ é assíntota oblíqua do gráfico da função f quando $x \to +\infty$.

2016, Época especial, grupo II

26. Vamos verificar se existem assíntotas verticais:

Como $x = \frac{1}{2}$ é um possível ponto de descontinuidade da função f, então $x = \frac{1}{2}$ é a única possível assíntota vertical da função f.

A função f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$ pois os dois ramos da função resultam de operações entre funções contínuas neste domínio.

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{\sqrt{e}}{2} \times \frac{\sqrt{e}(\frac{e^x}{\sqrt{e}}-1)}{2(x-\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{e}}{2} \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{e^{x-\frac{1}{2}}-1}{x-\frac{1}{2}} = (*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - \frac{1}{2}$ $(y \to 0^-$ quando $x \to \frac{1}{2}^-)$

$(*_1) = \frac{\sqrt{e}}{2} \lim\limits_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y} = \frac{\sqrt{e}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{e}}{2}$ (Limite notável)

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} (x+1)\ln x = (\frac{1}{2}+1)\ln\frac{1}{2} = \frac{3\ln(2^{-1})}{2} = -\frac{3\ln 2}{2}$

Como $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) \neq \pm\infty$ e $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) \neq \pm\infty$ concluímos que $x = \frac{1}{2}$ não é assíntota vertical da função f.

2015, 1ªfase, grupo II

27. Vamos verificar se existem assíntotas horizontais:

► $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x-3) - \ln(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(\frac{x-3}{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 - \frac{3}{x}) =$
$= \ln(1 - \frac{3}{+\infty}) = \ln(1 - 0^+) = \ln 1 = 0$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, então a reta $y = 0$ é assíntota horizontal da função f quando $x \to +\infty$.

► $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 + xe^x = (*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y = -x$ $(y \to +\infty$ quando $x \to -\infty)$

$(*_1) = \lim\limits_{y \to +\infty} 1 - ye^{-y} = 1 - \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1$ (Limite notável)

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, então a reta $y = 1$ é assíntota horizontal da função f quando $x \to -\infty$.

2015, 2ªfase, grupo II

28. $D_f = \mathbb{R}_0^+$, logo vamos verificar se existe assíntota horizontal quando $x \to +\infty$:

► $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \times e^1 \times e^{-x} = e \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = e \times \frac{1}{+\infty} = 0$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, então a reta $y = 0$ é assíntota horizontal da função f quando $x \to +\infty$.

2015, Época especial, grupo II