Resolução - Equações e inequações (exponenciais e logarítmicas)

1. $\ln^2 x - \ln x - 2 < 0 \quad \wedge \quad x > 0$

   Fazendo a mudança de variável $y = \ln x$, ficamos com a inequação de 2ºgrau:
   $y^2 - y - 2 < 0$

   Vamos começar por resolver a equação $y^2 - y - 2 = 0$ aplicando a fórmula resolvente:

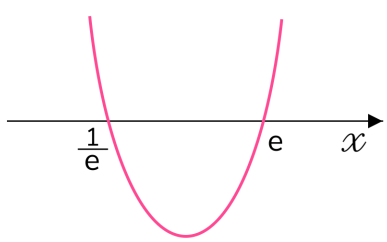
   $a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = -2$

   $y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times 1 \times (-2)}}{2\times 1} \Leftrightarrow y = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$
   $\Leftrightarrow y = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow y = \frac{1+3}{2} \vee y = \frac{1-3}{2} \Leftrightarrow y = 2 \vee y = -1$

   Passando para a variável original x, as soluções da equação são:

   $\ln x = 2 \ \vee \ \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^2 \ \vee \ x = e^{-1} \Leftrightarrow x = e^2 \ \vee \ x = \frac{1}{e}$

   Vamos agora desenhar a parábola para saber qual o intervalo que satisfaz a inequação $\ln^2 x - \ln x - 2 < 0$:

   Pela figura acima concluímos que $x \in \left]\frac{1}{e}, e^2\right[$.

   2024, 1ªfase

2. Pela observação da figura e como os pontos D e C pertencem a função f sabemos que:

- $\overline{BC} = f(a+4) = \log_{2a}(a+4)$
- $\overline{AD} = f(a) = \log_{2a} a$
- $\overline{AB} = a + 4 - a = 4$

Através da área do trapézio conseguimos determinar a constante a:

$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{2} \times \overline{AB} \Leftrightarrow 4 = \frac{\log_{2a}(a+4)+\log_{2a} a}{2} \times 4 \Leftrightarrow \log_{2a}(a+4) + \log_{2a} a = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{2a}[(a+4)a] = 2 \Leftrightarrow a^2 + 4a = (2a)^2 \Leftrightarrow a^2 + 4a = 4a^2 \Leftrightarrow -3a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(-3a+4) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee -3a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = \frac{4}{3}$

Como $a > 1$, concluímos que $a = \frac{4}{3}$.

2024, 2ªfase

3. $\frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 \sqrt{x+1} = -1 \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ x + 1 > 0 \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ \log_2 \sqrt{x} - \log_2 \sqrt{x+1} = -1 \ \wedge \ x > 0 \ \Leftrightarrow \ \log_2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = -1 \ \wedge \ x > 0 \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ \frac{1}{2}\log_2 \frac{x}{x+1} = -1 \wedge \ x > 0 \ \Leftrightarrow \ \log_2 \frac{x}{x+1} = -2 \wedge \ x > 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{x}{x+1} = 2^{-2} \wedge \ x > 0 \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} - \frac{1}{4} = 0 \ \wedge \ x > 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{4x-(x+1)}{4x+4} = 0 \ \wedge \ x > 0 \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ 3x - 1 = 0 \ \wedge \ 4x + 4 \neq 0 \ \wedge \ x > 0 \ \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \ \wedge \ x \neq -1 \ \wedge \ x > 0$

C.S.$= \left\{\frac{1}{3}\right\}$

2024, Época especial

4. $\log_3\big(g(x)\big) = x + \log_3 2 \,\wedge\, g(x) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3\big(7 \times 3^{x-1} - 3\big) = \log_3 3^x + \log_3 2 \,\wedge\, 7 \times 3^{x-1} - 3 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3\big(7 \times 3^{x-1} - 3\big) = \log_3(3^x \times 2) \,\wedge\, 3^{x-1} > \frac{3}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7 \times 3^x \times 3^{-1} - 3 = 2 \times 3^x \,\wedge\, x - 1 > \log_3 \frac{3}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{7}{3} \times 3^x - 3 - 2 \times 3^x = 0 \,\wedge\, x > \log_3 \frac{3}{7} + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x\big(\frac{7}{3} - 2\big) = 3 \,\wedge\, x > \log_3 \frac{3}{7} + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x\big(\frac{1}{3}\big) = 3 \,\wedge\, x > \log_3 \frac{3}{7} + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \,\wedge\, x > \log_3 \frac{3}{7} + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \wedge x > \log_3 \frac{3}{7} + 1$

$2 \in [1, +\infty[$ e $2 \in \big]\log_3 \frac{3}{7} + 1, +\infty\big[$ então 2 é solução da equação.

C.S.$= \{2\}$

2023, 1ªfase

5. Substituindo os pontos de coordenadas (1, 5) e (2, 7) na expressão algébrica da função f obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 5 = a + e^b \\ 7 = a - e^{2b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - e^b \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ 7 = 5 - e^b - e^{2b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ (e^b)^2 + e^b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Fazendo a mudança de variável $y = e^b$ e usando a fórmula resolvente:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ y^2+y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ y=-1 \ \vee \ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ e^b=-1 \ \vee \ e^b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ b=\ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=5-e^{\ln 2} \\ b=\ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-2 \\ b=\ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=\ln 2 \end{cases}$$

2023, 2ª fase

6. Vamos determinar o domínio em que é válida esta equação:

$e^x+e^{-x}\neq 0 \Leftrightarrow e^x+\frac{1}{e^x}\neq 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x)^2+1}{e^x}\neq 0 \Leftrightarrow (e^x)^2+1\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e^x)^2\neq -1$ condição universal

Logo a equação é válida em $\mathbb{R}$.

Resolvendo a equação:

$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3e^x-3e^{-x}=e^x+e^{-x} \Leftrightarrow 2e^x-4e^{-x}=0 \Leftrightarrow 2e^x-\frac{4}{e^x}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2(e^x)^2-4}{e^x}=0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2-4=0 \wedge e^x\neq 0 \Leftrightarrow (e^x)^2=2 \wedge e^x\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x=-\sqrt{2}_{\,cond.impossível} \vee e^x=\sqrt{2} \wedge e^x\neq 0_{\,cond.universal} \Leftrightarrow x=\ln(\sqrt{2}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\ln 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=\frac{\ln 2}{2}$

C.S=$\left\{\frac{\ln 2}{2}\right\}$

2023, Época especial

7. $(e^x-1)\ln(5-2x)+e^x\ln(3-x)=\ln(3-x) \ \wedge \ 5-2x>0 \ \wedge \ 3-x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x\ln(5-2x)-\ln(5-2x)+e^x\ln(3-x)=\ln(3-x) \ \wedge \ -2x>-5 \ \wedge \ -x>-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x[\ln(5-2x)+\ln(3-x)]=\ln(3-x)+\ln(5-2x) \ \wedge \ x<\frac{5}{2} \ \wedge \ x<3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x[\ln\big((5-2x)(3-x)\big)]=\ln\big((3-x)(5-2x)\big) \ \wedge \ x<\frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x[\ln\big((5-2x)(3-x)\big)]-\ln\big((3-x)(5-2x)\big)=0 \ \wedge \ x<\frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \big(\ln(2x^2-11x+15)\big)(e^x-1)=0 \ \wedge \ x<\frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(2x^2-11x+15)=0 \ \vee \ e^x-1=0 \ \wedge \ x<\frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-11x+15=e^0 \ \vee \ e^x=1 \ \wedge \ x<\frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-11x+14=0 \ \vee \ x=\ln 1 \ \wedge \ x<\frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2 \ \vee \ x=\frac{7}{2} \ \vee \ x=0 \ \wedge \ x<\frac{5}{2}$

C.S.$=\{0,2\}$

2022, 1ªfase

8. $\frac{1}{2}\log_2(9x+1)=\log_2(6x) \ \wedge \ 9x+1>0 \ \wedge \ 6x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2\sqrt{9x+1}=\log_2(6x) \ \wedge \ x>-\frac{1}{9} \ \wedge \ x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sqrt{9x+1})^2=(6x)^2 \ \wedge \ x>0 \Leftrightarrow 9x+1=36x^2 \ \wedge \ x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -36x^2+9x+1=0 \ \wedge \ x>0$

$a=-36 \qquad b=9 \qquad c=1$

Usando a fórmula resolvente temos:

$x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm\sqrt{9^2-4\times(-36)\times 1}}{2\times(-36)} \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm\sqrt{81+144}}{-72} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{-9+15}{-72} \vee x = \frac{-9-15}{-72} \Leftrightarrow x = -\frac{6}{72} \vee x = \frac{24}{72} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{12} \vee x = \frac{1}{3}$

Como $x > 0 \quad C.S. = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

2022, Época especial

9. Vamos determinar o domínio da equação:

$(1-x)e^{x-1} > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0$ (porque $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x-1} > 0$) $\Leftrightarrow x < 1$

Ou seja, esta equação está definida em $]-\infty, 1[$.

Resolvendo a equação:

$\ln\left[(1-x)e^{x-1}\right] = x \Leftrightarrow e^{\ln\left[(1-x)e^{x-1}\right]} = e^x \Leftrightarrow (1-x)e^{x-1} = e^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-x = \frac{e^x}{e^{x-1}} \Leftrightarrow 1-x = e^{x-(x-1)} \Leftrightarrow 1-x = e \Leftrightarrow x = 1-e$

$x = 1-e \in]-\infty, 1[$, logo este é o único número real que é solução da equação.

2021, 1ªfase

10. Resolvendo a equação:

$x \ln(1-x) - \ln(1-x) = (1-x)\ln(3-2x) \ \wedge \ 1-x > 0 \ \wedge \ 3-2x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(1-x)(x-1) = (1-x)\ln(3-2x) \ \wedge \ x < 1 \ \wedge \ x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\ln(1-x)(1-x) = (1-x)\ln(3-2x) \ \wedge \ x < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(1-x)^{-1} = \ln(3-2x) \ \wedge \ 1-x \neq 0 \ \wedge \ x < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1-x} = 3-2x \ \wedge \ x < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-x)(3-2x) = 1 \ \wedge \ x < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \ \wedge \ x < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ \vee \ x = 2 \ \wedge \ x < 1$

C.S.$= \left\{\frac{1}{2}\right\}$

2021, 2ªfase

11. $e^{-x}(4+3^{2x}) \geq 5 \Leftrightarrow 4e^{-x} + e^x \geq 5 \Leftrightarrow \frac{4}{e^x} + e^x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 4 \geq 0 \wedge e^x \neq 0$

Fazendo a mudança de variável $y = e^x$, ficamos com a inequação $y^2 - 5y + 4 \geq 0$.

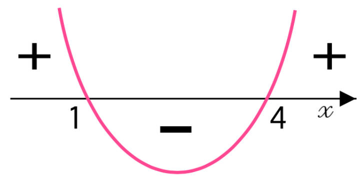
Consideremos a equação $y^2 - 5y + 4 = 0$

$a = 1 \qquad b = -5 \qquad c = 4$

Usando a fórmula resolvente temos:

$y = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{5 \pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times4}}{2\times1} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{5 \pm\sqrt{9}}{2} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{5+3}{2} \vee y = \frac{5-3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; y = 1 \vee y = 4$



Calculando na variável original x vem que:

$$1 = e^x \vee 4 = e^x \;\Leftrightarrow\; x = 0 \vee x = \ln 4$$

Como $-2 \leq x \leq 2$ então C.S.$=]-\infty, 0] \cup [\ln 4, +\infty[\; \cap\; [-2, 2] = [-2, 0] \cup [\ln 4, 2]$

2021, Época especial

12. $f(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow x + \ln(e^x + 1) = 2x + 1 \Leftrightarrow \ln(e^x + 1) = x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x + 1 = e^{x+1} \Leftrightarrow e^x + 1 = e^x e \Leftrightarrow e^x - e^x e = -1 \Leftrightarrow e^x(1-e) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x = -\frac{1}{1-e} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e-1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{e-1}\right) \Leftrightarrow x = \ln(e-1)^{-1} \Leftrightarrow x = -\ln(e-1)$

2020, 1ªfase