Exercícios de exames - Assíntotas e limites notáveis

1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

   Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\{0\}$, definida por

   $$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^4}$$

   Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais ao seu gráfico e, caso existam, escreva as respetivas equações.

   2024, 1ª fase

2. Seja f uma função contínua, de domínio $[0, +\infty[$, com $f(0) = 2$, e seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida, para um certo valor de k real, por

   $$g(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad x \geq 0 \\ \frac{e^{-k}(e^x-1)}{-x^2+2x} & se \quad x < 0 \end{cases}$$

   A reta de equação $y = 3x - 5$ é assíntota ao gráfico da função g, quando $x \to +\infty$.

   Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

   (A) $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x) + 3x) = -5$ **(B)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x) + 3x) = 5$

   (C) $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x) - 3x - 5) = 0$ **(D)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x) - 3x + 5) = 0$

   2024, 2ª fase

3. Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

   $$f(x) = \frac{\ln x + 2x}{x}$$

O gráfico da função f admite uma assíntota vertical e uma assíntota horizontal.

Determine uma equação de cada uma dessas assíntotas.

2023, 2ª fase

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\{0\}$, definida, para um certo $a \in \mathbb{R}^+$, por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} & se \quad x < 0 \\ \ln(2 - e^{-x}) + x + 2 & se \quad x > 0 \end{cases}$$

O gráfico de f admite uma assíntota oblíqua quando x tende para $+\infty$.

Determine uma equação dessa assíntota.

2023, Época especial

5. Seja g a função, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $g(x) = 5x - 3\ln(x-1)$.

Estude a função g quanto à existência de assíntotas verticais e de assíntotas oblíquas ao seu gráfico e, caso existam, escreva as respetivas equações.

2022, 1ª fase

6. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja h a função, de domínio $]0, +\infty[$, definida por $h(x) = \frac{e^x + \ln x}{e^x - 1}$.

Estude a função h quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

2022, 2ª fase

7. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \ln(1+e^x) - x$.

   O gráfico de g tem uma assíntota oblíqua, quando x tende para $-\infty$, e tem uma assíntota horizontal, quando x tende para $+\infty$.

   Determine uma equação de cada uma dessas assíntotas.

   2022, Época especial

8. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \frac{x^3}{2x^2 - \ln x}$

   Estude a função h quanto à existência de assíntota oblíqua ao seu gráfico e, caso esta exista, escreva a sua equação reduzida.

   2021, 1ª fase

9. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - e^{-x}}{x} & se \quad x < 0 \\ \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 & se \quad x \geq 0 \end{cases}$$

   Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

   2021, 2ª fase

10. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} & se \quad x \leq 1 \\ \frac{x-1}{e^{x-2}} & se \quad x > 1 \end{cases}$$

Estude, sem recorrer à calculadora, a função f quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico e, caso existam, escreva as suas equações.

2021, Época especial

11. Seja f a função definida em $]-\infty, 2]$ por $f(x) = x + \ln(e^x + 1)$

O gráfico de f tem uma assíntota oblíqua.
Determine uma equação dessa assíntota.

2020, 1ª fase

12. Seja h a função, de domínio $]-\infty, 4[$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 + xe^{x-1} & x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x}-1}{\sin(x-1)} & 1 < x < 4 \end{cases}$$

Mostre que o gráfico da função h tem uma assíntota horizontal e apresente uma equação dessa assíntota.

2020, 2ª fase

13. Seja f a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{\tan x}$

Mostre que o gráfico da função f não tem assíntotas.

2020, Época especial

14. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

    Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = g(x) + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

    Sabe-se que o gráfico da função h tem uma assíntota oblíqua.
    Qual é o declive dessa assíntota?

    (A) 1 **(B)** 2 **(C)** e **(D)** e^2

    2019, 1ª fase, caderno 2

15. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por $h(x) = \frac{e^x}{x-1}$

    Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

    2019, 2ª fase, caderno 2

16. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} x \ln(1-x) & se \quad x \leq 0 \\ \frac{1-3x}{1-e^{-x}} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

    O gráfico da função g tem uma assíntota oblíqua, quando $x \to +\infty$
    Determine a equação reduzida dessa assíntota.

    2019, Época especial, caderno 2

17. Considere a função f definida em $]0, \pi[$ por $f(x) = \frac{x}{\sin x}$
    Qual das equações seguintes define uma assíntota do gráfico da função f?

(A) $x = 0$ **(B)** $x = \pi$ **(C)** $x = 1$ **(D)** $x = \frac{\pi}{2}$

2018, 1ª fase, caderno 2

18. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \frac{e^x}{1-x} & se \quad x < 1 \\ \frac{\ln(x^2)+2}{x} & se \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

2018, 2ª fase, caderno 2

19. Seja h a função, de domínio $[-\frac{\pi}{3}, +\infty[$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)} & se \quad -\frac{\pi}{3} \leq x < 0 \\ \frac{e^x}{x+1} & se \ x \geq 0 \end{cases}$$

Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

2018, Época especial, caderno 2

20. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}^+$

Sabe-se que a reta de equação $y = -x$ é assíntota oblíqua do gráfico de f e do gráfico de g

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) \times g(x)}{x}$?

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** $-\infty$

2017, 1ª fase, grupo I

21. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

    Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados

    2017, 2ª fase, grupo II

22. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^-$

    Sabe-se que:

    - $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)+e^x-x}{x} = 1$
    - o gráfico de f tem uma assíntota oblíqua.

    Qual é o declive dessa assíntota?

    (A) -2 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

    2016, 1ª fase, grupo I

23. Considere a função f , de domínio $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
    Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

    2016, 1ª fase, grupo II

24. Seja f a função, de domínio $]-\frac{\pi}{2},+\infty[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2+\sin x}{\cos x} & se\ \ -\frac{\pi}{2}<x\leq 0\\ \\ x-\ln x & se\ \ x>0\end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntota oblíqua do seu gráfico.

2016, 2ª fase, grupo II

25. Seja f a função, de domínio $]-\frac{3\pi}{2},+\infty[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2+\cos x & se\ \ -\frac{3\pi}{2}<x<0\\ \\ \ln\left(e^x+x\right) & se\ \ x\geq 0\end{cases}$$

Determine $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$

Interprete o valor obtido em termos de assíntotas do gráfico de f

2016, Época especial, grupo II

26. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1} & se\ \ x<\frac{1}{2}\\ \\ (x+1)\ln x & se\ \ x\geq \frac{1}{2}\end{cases}$$

Averigue da existência de assíntotas verticais do gráfico da função f

2015, 1ªfase, grupo II

27. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}1+xe^x & se\ \ x\leq 3\\ \\ \ln\left(x-3\right)-\ln x & se\ \ x>3\end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico

2015, 2ªfase, grupo II

28. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por $f(x) = x^2e^{1-x}$

    Estude a função f quanto à existência de assíntota horizontal.

    2015, Época especial, grupo II