Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2024

1. Vamos determinar os primeiros três termos da sucessão:

   $u_1 = 3$
   $u_2 = 2u_1 + 2 = 2 \times 3 + 2 = 8$
   $u_3 = 2u_2 + 2 = 2 \times 8 + 2 = 18$

   Opção(C)

2.

   2.1. A linha desta construção que contém, exatamente, 19 cartões é a linha número 18.

   O quarto elemento da linha número 18 é igual a ${}^{18}C_3 = 816$.

   Opção(A)

   2.2. Seja a sucessão u_n cujo o primeiro termo é igual a 1 e o próximo termo é igual ao anterior somando 1 unidade. Ou seja, u_n é uma progressão aritmética de razão 1 e primeiro termo 1.

   $u_n : 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad ...$

   A expressão geral de u_n é:
   $u_n = n$

   Sabendo que a soma dos n termos da progressão aritmética u_n é igual a 3081, conseguimos determinar n:

   $S_n = \frac{u_1+u_n}{2} \times n \Leftrightarrow 3081 = \frac{1+n}{2} \times n \Leftrightarrow 6162 = (1+n) \times n \Leftrightarrow n^2 + n - 6162 = 0 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times1\times-6162}}{2\times1} \Leftrightarrow n = 78 \ \vee \ n = -79 \Leftrightarrow n = 78, \quad n > 0$

3.

3.1. Calculando o valor da função f no ponto $x = 0$:

$f(0) = \frac{4\cos 0}{\sin 0 - 2} = \frac{4}{-2} = -2$

Calculando o valor dos limites laterais da função f no ponto $x = 0$:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{4\cos x}{\sin x - 2} = \frac{4\cos 0}{\sin 0 - 2} = \frac{4}{-2} = -2$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-e^{6x}}{3x} = -2 \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{6x}-1}{2\times 3x} = \ (*_1)$

  Fazendo a mudança de variável: $y = 6x \ \ (y \to 0^- \ \text{ quando } \ x \to 0^-)$

  $(*_1) = -2 \lim\limits_{y\to 0^-} \frac{e^y - 1}{y} = -2 \times 1 = -2 \qquad$ (Limite notável)

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$ f(0), então a função f é contínua em $x = 0$.

3.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f no intervalo $]0, 2\pi]$:

$f'(x) = \left(\frac{4\cos x}{\sin x - 2}\right)' = 4 \times \frac{-\sin x(\sin x - 2) - \cos x \times \cos x}{(\sin x - 2)^2} = 4 \times \frac{-\sin^2 x + 2\sin x - \cos^2 x}{(\sin x - 2)^2} =$
$= 4 \times \frac{2\sin x - 1}{(\sin x - 2)^2} = \frac{8\sin x - 4}{(\sin x - 2)^2}$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8\sin x - 4}{(\sin x - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow 8\sin x - 4 = 0 \ \wedge \ (\sin x - 2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \ \wedge \ \sin x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \ \wedge \ \sin x \neq 2 \ _{(condio\ universal)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0, \ \ x = \frac{\pi}{6} \ \ \in]0, 2\pi] \ \ \vee \ \ x = \frac{5\pi}{6} \ \ \in]0, 2\pi]$

Para $k=-1$, $x=\frac{\pi}{6}-2\pi \quad \notin]0,2\pi] \ \vee \ x=\frac{5\pi}{6}-2\pi \quad \notin]0,2\pi]$

Para $k=1$, $x=\frac{\pi}{6}+2\pi \quad \notin]0,2\pi] \ \vee \ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi \quad \notin]0,2\pi]$

Logo, $f'(x)$ tem dois zeros em $]0,2\pi]$ em $x=\frac{\pi}{6}$ e em $x=\frac{5\pi}{6}$.

$f'(\frac{\pi}{7})=\frac{8\sin\frac{\pi}{7}-4}{(\sin\frac{\pi}{7}-2)^2}<0$ $\qquad f'(\frac{\pi}{2})=\frac{8\sin\frac{\pi}{2}-4}{(\sin\frac{\pi}{2}-2)^2}>0$

$f'(\pi)=\frac{8\sin\pi-4}{(\sin\pi-2)^2}<0$ $\qquad f'(2\pi)=\frac{8\sin(2\pi)-4}{(\sin(2\pi)-2)^2}=-1$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

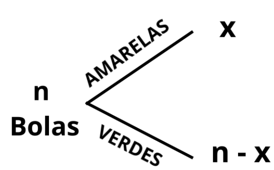
x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		2π
$f'(x)$	n.d.	-	0	+	0	-	-1
$f(x)$	n.d.	$\searrow$	Mínimo	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	Mínimo

O gráfico de f é decrescente no intervalo $\left]0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},2\pi\right]$ e é crescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$.

A função f tem extremos relativos em $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5\pi}{6}$ e $x=2\pi$.

4.

4.1. Consideremos um saco que contém apenas bolas amarelas e bolas verdes.



$P(A\cap B)=\frac{2}{3}P(A)\Leftrightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow P(B|A)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{x-1}{n-1}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x-3=2n-2\Leftrightarrow x=\frac{2n+1}{3}$

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ o valor de x, que corresponde ao número de bolas amarelas que existia inicialmente no saco, é sempre igual a um número ímpar.

4.2. Das duzentas bolas sabe-se que 49% são verdes, ou seja, 98 bolas são verdes e 102 são amarelas.

O número de casos possíveis corresponde a todas as possibilidades de selecionar, ao acaso, quatro das duzentas bolas que estão no saco, ou seja, ${}^{200}C_4$.

Temos de considerar o número de possibilidades de selecionar três bolas verdes e uma bola amarela ou selecionar quatro bolas verdes num total de duzentas bolas. Logo o número de casos favoráveis é igual a ${}^{98}C_3 \times {}^{102}C_1 + {}^{98}C_4$.

Usando a regra de Laplace, a probabilidade de o conjunto formado por essas quatro bolas conter, pelo menos, três bolas verdes é igual a:

$$\frac{{}^{98}C_3 \times {}^{102}C_1 + {}^{98}C_4}{{}^{200}C_4} \approx 0,3$$

5.

5.1. O vetor $(1, -3, 5)$ é um vetor normal ao plano que contém a base do cone. Por isso este vetor também é perpendicular a todos os planos paralelos a este.

Logo a equação do plano paralelo ao plano que contém a base do cone é da forma:

$$x + 2y + d = 0$$

Como o ponto $(1, -3, 5)$ pertence ao plano, substituindo as coordenadas deste ponto na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$x + 2y + d = 0 \ \Leftrightarrow \ 1 + 2 \times (-3) + d = 0 \ \Leftrightarrow \ d = 5$$

Uma equação do plano paralelo ao plano que contém a base do cone é:
$x + 2y + 5 = 0$.

Opção(C)

5.2. O ponto A pertence ao eixo Ox por isso tem coordendas $(x, 0, 0)$ e pertence ao plano que contém a base do cone. Substituindo o ponto A na equação do plano da base do cone conseguimos determinar x:

$x + 2 \times 0 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 8$

O ponto A tem coordenadas $(8, 0, 0)$.

O ponto B pertence ao eixo Oy por isso tem coordendas $(0, y, 0)$ e pertence ao plano que contém a base do cone. Substituindo o ponto B na equação do plano da base do cone conseguimos determinar y:

$0 + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = 4$

O ponto B tem coordenadas $(0, 4, 0)$.

Vamos determinar as coordenadas do ponto médio de $[AB]$:

$M\left(\frac{8+0}{2}, \frac{4+0}{0}, 0\right)$

$M(4, 2, 0)$

Vamos escrever a equação vetorial da reta VM:

$$VM\colon\ (x, y, z) = (4, 2, 0) + k(1, 2, 0)\ , \quad k \in \mathbb{R}$$

Como o ponto V pertence à reta VM então sabemos que as suas coordenadas são da forma $(4 + k, 2 + 2k, 0)$.

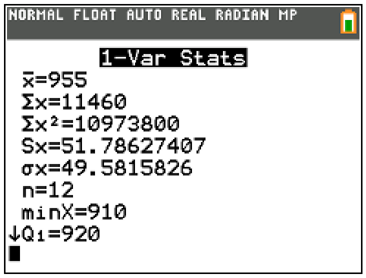
Sabendo que a abcissa do ponto V tem menos uma unidade do que a sua ordenada temos que:

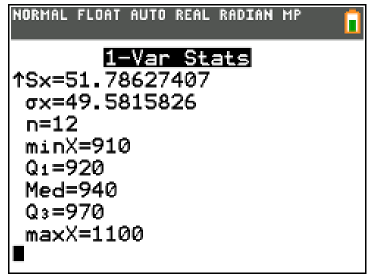
$$4 + k - 1 = 2 + 2k \Leftrightarrow k = 3$$

As coordenadas do ponto V são $(7, 8, 0)$.

6. I - b)

Introduzindo os dados desta tabela na máquina de calcular conseguimos ter os valores da mediana, média e do desvio padrão:





A mediana dos vencimentos dos funcionários da área comercial é igual a $\tilde{x} = 940$.

II - a)

O vencimento médio dos funcionários da área comercial é igual a $\overline{x} = 955$.

III - c)

A dispersão relativamente à média da distribuição dos vencimentos dos funcionários da área de produção é igual a 62,71. Este valor é superior à dispersão relativamente à média da distribuição dos vencimentos dos funcionários da área comercial que é igual a 49,58.

IV - b)

De acordo com a tabela apresentada nenhum funcionário da área comercial tem um vencimento inferior a 900 euros.

A mediana da distribuição dos vencimentos, em euros, dos funcionários da área de produção é igual a 900. Sabendo que nenhum dos funcionários da empresa tem vencimento igual a 900 euros então metade dos funcionários da área de produção tem um vencimento menor do que 900 euros.

Existem 38 funcionários da área de produção logo 19 destes funcionários têm um vencimento menor do que 900 euros, o que corresponde a $\frac{19\times100}{50} = 38\%$ de funcionários da empresa.

7. Aplicando a razão trigonométrica do seno no triângulo retângulo $[AOB]$ conseguimos determinar uma expressão de $[AB]$:

$\sin(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\overline{AB}}{4} \Leftrightarrow \overline{AB} = 4\sin\alpha$

Aplicando a razão trigonométrica do cosseno no triângulo retângulo $[AOB]$ conseguimos determinar uma expressão de $[BO]$:

$\cos(\pi - \alpha) = \frac{\overline{BO}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow -\cos\alpha = \frac{\overline{BO}}{4} \Leftrightarrow \overline{BO} = -4\cos\alpha$

Pela observação da figura sabemos que $\overline{BD} = 2\overline{BO} = 2 \times -4\cos\alpha = -8\cos\alpha$

A área do quadrilátero $[ABCD]$ é dada por:

$A_{[ABCD]} = 2 \times A_{[ABD]} = 2 \times \frac{\overline{BD}\times\overline{AB}}{2} = 2 \times \frac{-8\cos\alpha\times 4\sin\alpha}{2} = -16 \times 2\cos\alpha\sin\alpha =$
$= -16\sin(2\alpha)$

8. $f(x) = ax^3 + x - 2$.

   Sabemos que f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ pois é uma função polinomial. Logo é contínua em $[0,1]$.

   - $f(0) = -2 < 0$
   - $f(1) = a + 1 - 2 = a - 1 > 0 \quad \text{porque} \quad a > 1$

   Como $f(0) < 0 < f(1)$, pelo Teorema de Bolzano existe $c \in]0,1[$ tal que $f(c) = 0$. Logo a equação $f(x) = 0$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]0,1[$.

9. $\frac{1}{2}\log_2 x - \log_2\sqrt{x+1} = -1 \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ x + 1 > 0 \ \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \ \log_2\sqrt{x} - \log_2\sqrt{x+1} = -1 \ \wedge \ x > 0 \ \Leftrightarrow \ \log_2\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = -1 \ \wedge \ x > 0 \ \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \ \frac{1}{2}\log_2\frac{x}{x+1} = -1 \wedge \ x > 0 \ \Leftrightarrow \ \log_2\frac{x}{x+1} = -2 \wedge \ x > 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{x}{x+1} = 2^{-2} \wedge \ x > 0 \ \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} - \frac{1}{4} = 0 \ \wedge \ x > 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{4x-(x+1)}{4x+4} = 0 \ \wedge \ x > 0 \ \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \ 3x - 1 = 0 \ \wedge \ 4x + 4 \neq 0 \ \wedge \ x > 0 \ \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \ \wedge \ x \neq -1 \ \wedge \ x > 0$

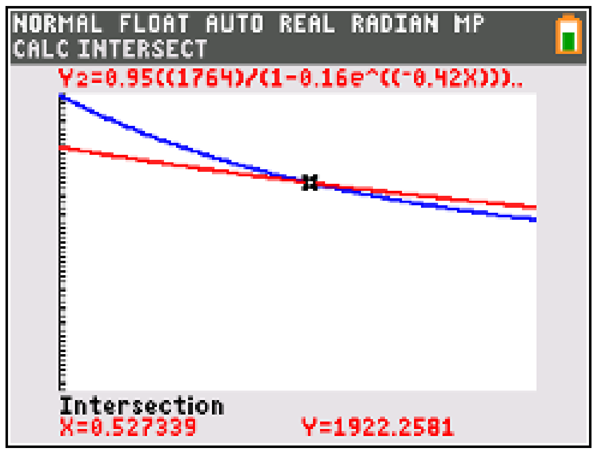
   C.S.$= \left\{\frac{1}{3}\right\}$

10. Seja a um instante no intervalo $[0,1]$.

    No primeiro minuto da reação, existe um instante a para o qual se verifica que, no intervalo de tempo $[a, 3a]$, a massa dessa substância diminui 5%, o que corresponde à equação:

$$m(3a) = m(a) - 0,05m(a) \Leftrightarrow m(3a) = 0,95m(a) \Leftrightarrow \frac{1764}{1-0{,}16e^{-0{,}42\times 3a}} = 0,95 \times \frac{1764}{1-0{,}16e^{-0{,}42a}}$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Considerando I o ponto de interseção visualizado na máquina, as suas coordenadas arredondadas às centésimas são: $I(0,527; 1922,258)$.

O valor de a arredondado às centésimas, é igual a 0,527.
Logo o intervalo é $[0,527; 3 \times 0,527] = [0,527; 1,581]$.

A amplitude do intervalo é igual a $1,581 - 0,527 = 1,054$ minutos, o que corresponde a 1 minuto e 3 segundos.

11. Pela observação da figura sabemos que o declive da reta r é negativo.

Sabemos também que o declive da reta r tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 0 é igual ao valor da derivada nesse ponto, logo vem que:

$$m_r = f'(0) < 0$$

Concluímos que a proposição I é falsa.

Como a reta s é assíntota ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$ temos que:

$$m_s = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Se as retas r e s fossem perpendiculares então $m_r = -\frac{1}{m_s}$ ou seja $m_r \times m_s = -1$.

Sabemos que:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \times \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-0}{x-0} \times \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = f'(0) \times \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m_r \times m_s = -\frac{8}{9} \neq -1$

Concluímos que as retas r e s não são perpendiculares.

A proposição II é falsa.

12. Escrevendo os números complexos z_1 e z_3 na forma algébrica:

$z_1 = \overline{OA} \quad \text{e} \quad z_3 = -\overline{OA}$

Conseguimos calcular $\overline{OA}$ através da equação:

$$|z_1 - z_3| = 6 \Leftrightarrow |\overline{OA} - (-\overline{OA})| = 6 \Leftrightarrow |2\overline{OA}| = 6 \Leftrightarrow 2|\overline{OA}| = 6 \Leftrightarrow |\overline{OA}| = 3$$

Usando o teorema de Pitágoras vamos determinar $\overline{OB}$:

$(\overline{AB})^2 = (\overline{OA})^2 + (\overline{OB})^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + (\overline{OB})^2 \Leftrightarrow (\overline{OB})^2 = 16 \Leftrightarrow \overline{OB} = \pm 4 \Leftrightarrow \overline{OB} = 4$

Escrevendo os números complexos z_2 e z_4 na forma trigonométrica:

$z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{e} \quad z_4 = 4e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$z_2 \times z_4 = 4e^{i\frac{\pi}{2}} \times 4e^{i\frac{3\pi}{2}} = 16e^{i\frac{4\pi}{2}} = 16e^{i2\pi} = 16e^{i0} = 16$

Opção(B)

13. $z = 2e^{i\theta} \quad \text{e} \quad \overline{z} = 2e^{-i\theta}$

Resolvendo a equação:

$z^2 + 2z\overline{z} - 6 = 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow (2e^{i\theta})^2 + 2(2e^{i\theta})(2e^{-i\theta}) - 6 = 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} + 2(4e^{i0}) - 6 = 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} + 8 - 6 = 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} = -2 + 2\sqrt{3}i \quad (*_2)$$

Vamos escrever o número complexo $-2+2\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica:

$\begin{cases} tg\ \alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{2} \\ \alpha \in 2\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \alpha = -\sqrt{3} \\ \alpha \in 2\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$ e $|-2+2\sqrt{3}i| = \sqrt{16} = 4$

$-2+2\sqrt{3}i = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$(*_2) \Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow e^{i(2\theta)} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Para $k=0$, $\quad \theta = \frac{\pi}{3} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

14. f é uma função contínua, de domínio $[0,+\infty[$, cujo gráfico admite uma assíntota horizontal logo sabemos que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = b, \quad \text{com } b\in\mathbb{R}$$

A função g só está definida em $[0,+\infty[$, logo vamos determinar uma equação da assíntota não vertical quando $x\to+\infty$.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(f(x))^2+4x^2+5x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{(f(x))^2+4x^2+5x}{x^2}} =$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(f(x))^2}{x^2} + \frac{4x}{x} + \frac{5x}{x^2}\right]} = \sqrt{\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\right)^2 + 4 + 0} = \sqrt{0+4+0} = 2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[g(x) - 2x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(f(x))^2+4x^2+5x} - 2x\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{(f(x))^2+4x^2+5x}-2x\right)\left(\sqrt{(f(x))^2+4x^2+5x}+2x\right)}{\sqrt{(f(x))^2+4x^2+5x}+2x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(f(x))^2+5x}{\sqrt{(f(x))^2+4x^2+5x}+2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(f(x))^2+5x}{x}}{\frac{\sqrt{(f(x))^2+4x^2+5x+2x}}{x}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\frac{(f(x))^2}{x}+5}{\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{(f(x))^2+4x^2+5x}{x^2}}+2} = \frac{0+5}{\sqrt{0+4+0}+2} = \frac{5}{4}$$

Concluímos que a reta definida por $y = 2x + \frac{5}{4}$ é assíntota oblíqua do gráfico de g quando $x \to +\infty$.