Proposta de Resolução da Prova Final de Matemática

Prova 92 | 2ª Fase | 3º Ciclo do Ensino Básico | 2024

1.

1.1. Sabemos que a turma tem no total 28 alunos e que no grupo C existem apenas duas raparigas, por isso, selecionando, ao acaso, ao acaso, um aluno desta turma:

$$P(\text{"O aluno selecionado ser uma rapariga do Grupo C"}) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$$

Opção(D)

1.2. Vamos começar por construir uma tabela de dupla entrada:

		Grupo A				
		Rapariga 1	Rapariga 2	Rapaz 1	Rapaz 2	Rapaz 3
Grupo D	Rapariga 1					
	Rapariga 2					
	Rapaz 1					
	Rapaz 1					

Deste modo conseguimos perceber todas as hipóteses possíveis.

nº de casos favoráveis = nº de entradas da tabela que têm um par constituído por dois rapazes, sendo um rapaz do grupo A e outro do grupo D = 6

nº de casos possíveis = nº de entradas da tabela que têm um par constituído por dois alunos, um aluno do grupo A e outro do grupo D = 20

$P(\text{"Serem sorteados dois rapazes, um do Grupo A e outro do Grupo D"}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

2. Todas as frações (de números inteiros) representam dízimas finitas ou dízimas infinitas periódicas, por isso $-\frac{17}{31}$ e $\frac{9}{10}$ não podem representar uma dízima infinita não periódica.

Sabemos também que o número $0,(75)$ é uma dízima infinita periódica, logo concluímos que o número $-2\sqrt{2}$ é o único que pode ser representado por uma dízima infinita não periódica.

Opção(A)

3. Recorrendo à máquina de calcular sabemos que $4\pi \approx 12,566$.

   $4\pi > 12,56 \quad \text{e} \quad 4\pi < 12,57$

   Assim vem que $4\pi \in]12,56;12,57[$.

   Opção(C)

4. Cada termo da sequência dos círculos, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando 4 círculos ao termo anterior, logo a expressão geradora desta sequência é igual a $4n+?$.

   Quando $n=1$, o primeiro termo da sequência dos círculos é igual a 12, desta forma conseguimos determinar o "?":

$$4 \times 1 + ? = 12 \Leftrightarrow ? = 8$$

   A expressão geradora da sequência dos círculos é igual a $4n+8$.

   Vamos calcular a ordem do termo da sequência dos círculos que é igual a 644:

   $4n+8=644 \Leftrightarrow 4n = 644-8 \Leftrightarrow n = \frac{636}{4} \Leftrightarrow n = 159$

   O termo da sequência que tem 644 círculos é o termo de ordem 159.

   Cada termo da sequência dos quadrados, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando 2 quadrados ao termo anterior, logo a expressão geradora desta sequência é igual a $2n+?$.

   Quando $n=1$, o primeiro termo da sequência dos quadrados é igual a 5, desta forma conseguimos determinar o "?":

$$2 \times 1 + ? = 5 \Leftrightarrow ? = 3$$

   A expressão geradora da sequência dos quadrados é igual a $2n+3$.

Através da expressão geradora da sequência dos quadrados conseguimos calcular quantos quadrados tem o termo da sequência de ordem 159:

$$2 \times 159 + 3 = 321$$

O termo de ordem 149 tem da sequência tem 321 quadrados.

5. $-2\left(x - \frac{7}{2}\right) - \frac{x}{5} \leq -\frac{x}{10} + 4$ 1

   $-2x - \frac{x}{5} + \frac{x}{10} \leq 4 - 7$ 3

   $-\frac{21}{10}x \leq -3$ 4

   $-2x + 7 - \frac{x}{5} \leq -\frac{x}{10} + 4$ 2

   $x \geq \frac{10}{7}$ 6

   $x \geq \frac{30}{21}$ 5

   $S = \left[\frac{10}{7}, +\infty\right[$ 7

6. Resolvendo a equação:

   $x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+5) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \ \vee \ x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \ \vee \ x = -5$

   $S = \{-5, 5\}$

   Opção(A)

7. Em 1990 as emissões de gases com efeito de estufa, na União Europeia, eram 4900 milhões de toneladas equivalentes de dióxido de carbono, o que corresponde a 4 900 000 000 de toneladas.

   Vamos calcular 55 % de 4 900 000 000:

   $$0,55 \times 4\,900\,000\,000 = 2\,695\,000\,000$$

   O valor máximo das emissões de gases com efeito de estufa, em toneladas equivalentes de dióxido de carbono, que os Estados-Membros da União Europeia pretendem alcançar até 2030 é igual a:

$$4\,900\,000\,000 - 2\,695\,000\,000 = 2\,205\,000\,000 \text{ toneladas}$$

Escrevendo em notação científica:

$2\,205\ 000\ 000 = 2,2205 \times 10^9$ toneladas

8. Vamos começar por calcular o volume do cone reto de vértice V e diâmetro da base $[AB]$:

$$V_{[cone\ grande]} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{\pi \times (0,4)^2 \times 2,4}{3} = 0,402 \text{ m}^3$$

Agora vamos determinar o volume do cone reto de vértice V e diâmetro da base $[CD]$ com $2,4 - 0,9 = 1,5$ metros de altura:

$$V_{[cone\ pequeno]} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{\pi \times (0,25)^2 \times 1,5}{3} = 0,098 \text{ m}^3$$

O volume do tronco de cone, representado a cinzento-escuro, em metros cúbicos, é igual a:

$V_{[tronco\ de\ cone]} = V_{[cone\ grande]} - V_{[cone\ pequeno]} = 0,402 - 0,098 = 0,304 \approx 0,3 \text{ m}^3$

9. Sabendo que $9 < k < 18$, vamos organizar os dados por ordem crescente:

$$\underbrace{7 \quad 8 \quad 9 \quad 9}_{50\%} \overset{Q_2}{\mid} \underbrace{k \quad k \quad 18 \quad 18}_{50\%}$$

Observando a figura acima concluímos que a mediana (2^{o} quartil) é igual à média aritmética entre os números 9 e k:

$$\frac{9+k}{2} = 11 \Leftrightarrow 9 + k = 2 \times 11 \Leftrightarrow k = 22 - 9 \Leftrightarrow k = 13$$

Opção(D)

10. Através das coordenadas dos pontos $A(0,7)$ e $B(4,9)$ conseguimos calcular o declive da função afim f:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-7}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Pela observação da reta sabemos que a ordenada na origem é igual a 7.

A expressão algébrica da função f é:

$$f(x) = ax + b = \frac{1}{2}x + 7$$

O ponto C tem coordenadas $(2, y)$.

Como o ponto C pertence à função f, podemos substituir as coordenadas do ponto C na expressão algébrica da função f, de forma a determinar a ordenada do ponto C:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 7 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \times 2 + 7 \Leftrightarrow y = 8$$

Logo o ponto C tem coordenadas $(2, 8)$.

O ponto C também pertence à função de proporcionalidade inversa g, substituindo as coordenadas deste ponto na expressão algébrica da função g conseguimos calcular a constante de proporcionalidade inversa a:

$$g(x) = \frac{a}{x} \Leftrightarrow 8 = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 8 \times 2 \Leftrightarrow a = 16$$

A expressão algébrica da função g é:

$$g(x) = \frac{16}{x}$$

Opção(C)

11. O ponto P_1 pertence à mediatriz do segmento de reta $[CH]$, logo está a igual distância da câmara municipal e do hospital mas não pertence à circunferência de centro no ponto J , de raio igual a 500 metros. Este ponto está no interior do círculo de centro no ponto J , de raio igual a 500 metros logo ele está a uma distância inferior a 500 metros do jardim, assim sendo não cumpre uma das condições definidas pela câmara municipal.

    O ponto P_2 apesar de estar a 500 metros do jardim porque pertence à circunferência de centro no ponto J , de raio igual a 500 metros, não está à mesma distância da câmara municipal e do hospital. Pela observação da figura o ponto P_2 está mais perto da câmara municipal do que do hospital, por isso não cumpre uma das condições definidas pela câmara municipal.

12. Pelo critério AA os triângulos $[EDC]$ e $[ABC]$ são semelhantes:
   - $C\hat{D}E = C\hat{A}B$, porque as retas AB e DE são paralelas;
   - $E\hat{C}D = A\hat{C}B$, pois são o mesmo ângulo.

   Como os triângulos $[EDC]$ e $[ABC]$ são semelhantes sabemos que os seus lados correspondentes são diretamente proporcionais:

   $$\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{3}{8} = \frac{a}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{8a}{3} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{8}{3}a$$

   Opção(B)

13. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, usando a definição de tangente vem que:

   $\tan(B\hat{A}C) = \frac{c.oposto}{hipotenusa} \Leftrightarrow \tan(B\hat{A}C) = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} \Leftrightarrow \tan(39^o) = \frac{\overline{BC}}{100} \Leftrightarrow 0,81 = \frac{\overline{BC}}{100} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \overline{BC} = 0,81 \times 100 \Leftrightarrow \overline{BC} \approx 81$ m

14.

   14.1. Como as cordas [AB] e [CD] são paralelas e iguais então sabemos que:

   $$\widehat{BA} = \widehat{CD} = 120^o$$

   $B\hat{C}A$ é o ângulo inscrito relativo ao arco BA, por isso vem que:

   $$B\hat{C}A = \frac{\widehat{BA}}{2} = \frac{120}{2} = 60^o$$

   A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o, assim conseguimos determinar $C\hat{A}B$:

   $$C\hat{A}B + B\hat{C}A + A\hat{B}C = 180 \Leftrightarrow C\hat{A}B + 60 + 90 = 180 \Leftrightarrow C\hat{A}B = 30^o$$

   14.2. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, usando o teorema de pitágoras vem que:

   $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow 20^2 = \overline{AB}^2 + 10^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 400 - 100 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \overline{AB} = \pm\sqrt{300} \Leftrightarrow \overline{AB} \approx 17,32 \quad (\overline{AB} > 0)$

15. $A_{sombreada} = A_{[ABCD]} - A_{[EFGH]} = (x-2)^2 - 10^2 = x^2 - 4x + 4 - 100 = x^2 - 4x - 96$

Opção(A)

16. **(A)** O dobro das emissões de gases com efeito de estufa emitidas pela Eslováquia, é igual a:

$$2 \times 39921 = 79842 \text{ quilotoneladas}$$

De acordo com o gráfico, 79842 corresponde ao valor das emissões de gases com efeito de estufa emitidas pela Áustria. Afirmação verdadeira.

(B) Vamos calcular o valor que corresponde a 30% das emissões de gases com efeito de estufa emitidas pela Polónia:

$$0,30 \times 390745 = 117223,5 \text{ quilotoneladas}$$

Como 117223,5 não é igual ao valor das emissões de gases com efeito de estufa emitidas pela Áustria, concluímos que a afirmação é falsa.

(C) Vamos calcular o valor que corresponde a 20% das emissões de gases com efeito de estufa total emitidos na União Europeia:

$$0,20 \times 4065462 = 813092,4 \text{ quilotoneladas}$$

Como o valor das emissões de gases com efeito de estufa emitidas pela Alemanha (809 799 quilotoneladas) é inferior ao valor que corresponde a 20% de gases com efeito de estufa, relativamente ao total dos emitidos na União Europeia, então a afirmação é verdadeira.

(D) Somando as emissões de gases com efeito de estufa emitidos pela Polónia, Eslováquia, Espanha e Portugal:

$$390745 + 39921 + 314529 + 63470 = 808665 \text{ quilotoneladas}$$

Como 808665 quilotoneladas é inferior ao valor das emissões de gases com efeito de estufa emitidas pela Alemanha (809 799 quilotoneladas), então a afirmação é verdadeira

(E) Calculando 15 vezes o valor das emissões de gases com efeito de estufa emitidos por Portugal:

$$15 \times 63470 = 952050 \text{ quilotoneladas}$$

A afirmação é falsa.

As três afirmações verdadeiras são **(A)**, **(C)** e **(D)**.