Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2ª Fase | Ensino Secundário | 2024

1.

1.1. Os vetores $(1, -5, 0)$ e $(-1, 5, 0)$ não são vetores colineares com o vetor diretor da reta FC, por isso nem a opção (A) nem a opção (B) definem uma reta paralela à reta FC.

Como $(5, 1, -7) = -1 \times (-5, -1, 7)$, então estes vetores são colineares por isso ambas as retas definidas na opções (C) e (D) são paralelas à reta FC.

O ponto A pertence ao semieixo positivo Oy e $\overline{OA} = 4$ logo tem coordenadas $(0, 4, 0)$.

Vamos verificar se o ponto A pertence à reta definida na opção (C):

$$\begin{cases} 0 = -10 + 5k \\ 4 = 2 + k \\ 0 = 14 - 7k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

Concluímos que o ponto A pertence à reta definida na opção (C).

Opção(C)

1.2. O ponto C pertence ao plano $x = 0$ por isso tem coordendas $(0, y, z)$ e pertence à reta FC. Substituindo o ponto C na equação vetorial da reta FC conseguimos determinar as suas coordenadas:

$$\begin{cases} 0 = -5 - 5k \\ y = 2 - k \\ z = 14 + 7k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = 2 - (-1) \\ z = 14 + 7 \times -1 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ y = 3 \\ z = 7 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

O ponto C tem coordenadas $(0, 3, 7)$.

O ponto F pertence ao plano xOy por isso tem coordendas $(x, y, 0)$ e pertence à reta FC. Substituindo o ponto F na equação vetorial da reta FC conseguimos determinar as suas coordenadas:

$$\begin{cases} x = -5 - 5k \\ y = 2 - k \\ 0 = 14 + 7k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 - 5 \times -2 \\ y = 2 - (-2) \\ k = -2 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \\ \_\_\_\_ \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

O ponto F tem coordenadas $(5, 4, 0)$.

A superfície esférica que contém todos os vértices do cubo $[ABCDEFGH]$ tem diâmetro $[FC]$, centro no ponto médio do segmento de reta $[FC]$ e raio igual a $\frac{\overline{FC}}{2}$.

Vamos determinar as coordenadas do ponto médio:

$M_{[FC]}\left(\frac{5+0}{2}, \frac{4+3}{2}, \frac{0+7}{2}\right)$

$M_{[FC]}\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$

Usando a fórmula da distância entre dois pontos conseguimos calcular o diâmetro da superfície esférica:

$$d(FC) = \sqrt{(5-0)^2 + (4-3))^2 + (0-7)^2} = \sqrt{75}$$

Assim o raio da superfície esférica é igual a $\frac{\sqrt{75}}{2}$.

A superfície esférica que contém todos os vértices do cubo $[ABCDEFGH]$ tem equação:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{75}{4}$$

2. Consideremos u_n uma progressão aritmética de razão r.

   A soma do primeiro com o quinto termo é igual a 26 equivale à equação $u_1 + u_5 = 26$.

   Resolvendo o sistema abaixo conseguimos determinar o primeiro termo e a razão desta progressão:

$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 26 \\ u_9 = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 4r = 26 \\ u_1 + 8r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 4r = 26 \\ u_1 = 31 - 8r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(31 - 8r) + 4r = 26 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 62 - 16r + 4r = 26 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 3 \\ u_1 = 31 - 8 \times 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 3 \\ u_1 = 7 \end{cases}$$

O termo geral desta progressão é igual a:

$$u_n = 7 + 3(n-1) = 3n + 4$$

Vamos averiguar se 835 é termo da progressão (u_n):

$835 = 3n + 4 \Leftrightarrow 3n = 831 \Leftrightarrow n = 277$

Concluímos que 835 é termo da progressão (u_n) de ordem 277.

3. Pela observação da figura e como os pontos D e C pertencem a função f sabemos que:

- $\overline{BC} = f(a+4) = \log_{2a}(a+4)$
- $\overline{AD} = f(a) = \log_{2a} a$
- $\overline{AB} = a + 4 - a = 4$

Através da área do trapézio conseguimos determinar a constante a:

$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{2} \times \overline{AB} \Leftrightarrow 4 = \frac{\log_{2a}(a+4)+\log_{2a} a}{2} \times 4 \Leftrightarrow \log_{2a}(a+4) + \log_{2a} a = 2 \Leftrightarrow$

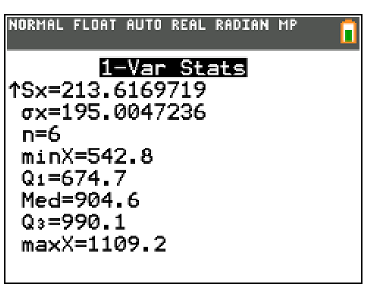
$\Leftrightarrow \log_{2a}[(a+4)a] = 2 \Leftrightarrow a^2 + 4a = (2a)^2 \Leftrightarrow a^2 + 4a = 4a^2 \Leftrightarrow -3a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow$

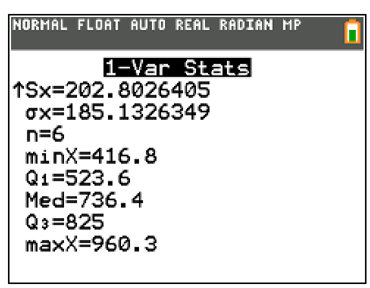
$\Leftrightarrow a(-3a+4) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee -3a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = \frac{4}{3}$

Como $a > 1$, concluímos que $a = \frac{4}{3}$.

4. I - c)

Introduzindo os dados da remuneração base média mensal dos homens na coluna L1 e os dados da remuneração base média mensal das mulheres na coluna L2 na máquina de calcular obtemos:





A mediana da remuneração base média mensal dos homens é igual a $904,6$.

II - a)

A amplitude interquartil da remuneração base média mensal dos homens é igual a:

$$Q_3 - Q_1 = 990,1 - 674,7 = 315,4$$

III - b)

De 2015 para 2020, a remuneração base média mensal das mulheres teve um aumento de $960,3 - 825,0 = 135,3$ euros, o que corresponde a um aumento percentual de:

$$\frac{135{,}3 \times 100}{825} = 16,4\%$$

IV - c)

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a regressão linear entre as variáveis x e y obtemos:

O coeficiente de correlação linear das variáveis x e y, arredondado às milésimas, é 0,998.

5. Através da equação da circunferência sabemos que o seu raio é igual a 3.
   Como $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência então $\overline{PQ} = 6$.

   $P\hat{R}Q$ é o ângulo inscrito relativo ao arco PQ, por isso vem que:

$$P\hat{R}Q = \frac{\overset{\frown}{PQ}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a π, assim conseguimos escrever o ângulo $R\hat{Q}P$ em função de α:

$$R\hat{Q}P + P\hat{R}Q + \alpha = \pi \Leftrightarrow R\hat{Q}P = \pi - \tfrac{\pi}{2} - \alpha \Leftrightarrow R\hat{Q}P = \tfrac{\pi}{2} - \alpha$$

O triângulo $[PQR]$ é retângulo em R, usando a definição de cosseno vem que:

$$\cos\left(R\hat{Q}P\right) = \tfrac{c.adjacente}{hipotenusa} \Leftrightarrow \cos\left(R\hat{Q}P\right) = \tfrac{\overline{QR}}{\overline{PQ}} \Leftrightarrow \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tfrac{\overline{QR}}{6} \Leftrightarrow \overline{QR} = 6\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{QR} = 6\sin\alpha$$

Usando a fórmula do produto escalar temos que:

$$\overrightarrow{QR} \,.\, \overrightarrow{QP} = ||\overrightarrow{QR}|| \times ||\overrightarrow{QP}|| \times \cos\left(R\hat{Q}P\right) \Leftrightarrow 27 = ||\overrightarrow{QR}|| \times 6 \times \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 27 = 6\sin\alpha \times 6 \times \sin\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \tfrac{27}{36} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \tfrac{27}{36} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \sin\alpha = \pm\tfrac{3\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{porque } \alpha \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[$$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e através da tabela trigonométrica temos que $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

6.

6.1. Sabendo que a reta de equação $y = 3x - 5$ é assíntota ao gráfico da função g, quando $x \to +\infty$ temos que:

- $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 3$
- $b = \lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - mx] \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - 3x] = -5 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - 3x + 5] = 0$

Opção(D)

6.2. $g(0) = f(0) = 2$

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \tfrac{e^{-k}(e^x - 1)}{x(-x+2)} = \lim_{x \to 0^-} \tfrac{e^{-k}}{(-x+2)} \times \lim_{x \to 0^-} \tfrac{e^x - 1}{x} = \tfrac{e^{-k}}{2} \times 1 = \tfrac{e^{-k}}{2}$$

Como a função g é continua em $x = 0$ então temos que ter:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = g(0) \Leftrightarrow \frac{e^{-k}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^{-k} = 4 \Leftrightarrow -k = \ln 4 \Leftrightarrow k = -\ln 4$$

7.

7.1. Num lançamento, a probabilidade de se obter, na face voltada para cima, um múltiplo de 3 é igual a $\frac{2}{6}$.

Sabe-se também que, num lançamento, a probabilidade de se obter, na face voltada para cima, um número que não é múltiplo de 3 é igual a $1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$.

A probabilidade de, em exatamente dois desses lançamentos, se obter, na face voltada para cima, um múltiplo de 3 é igual a:

$$\frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times 3 = \frac{2}{9}$$

Opção(D)

7.2. Vamos considerar todos os números naturais com seis algarismos diferentes que é possível formar usando os algarismos 1 , 2 , 3 , 4 , 5 e 6 em que o número formado é par, inferior a trezentos mil, e com os algarismos 2 e 4 um ao lado do outro.

Como o número formado tem de ser inferior a trezentos mil então na primeira posição pode estar o algarismo 1 ou 2. Por outro lado, para o número ser par também sabemos que o algarismo das unidades só pode ser o 2,4 ou 6.

1ª hipótese: Na primeira posição colocamos o algarismo 1 e na última posição colocamos o algarismo 4, ou seja, o 2 tem de estar na penúltima posição de modo a estar ao lado do 4. Nas restantes posições pode ficar qualquer outro dos três algarismos que sobram de forma a não serem repetidos (3!).

$\underline{1}$ __ __ __ $\underline{2}$ $\underline{4}$

$1 \times 3! \times 1 \times 1 = 6$

2ª hipótese: Na primeira posição colocamos o algarismo 1 e na última posição colocamos o algarismo 2, ou seja, o 4 tem de estar na penúltima posição de modo a estar ao lado do 2. Nas restantes posições pode ficar qualquer outro dos três algarismos que sobram de forma a não serem repetidos (3!).

$\underline{1}$ __ __ __ $\underline{4}$ $\underline{2}$

$1 \times 3! \times 1 \times 1 = 6$

3ª hipótese: Na primeira posição colocamos o algarismo 1 e na última posição colocamos o algarismo 6. Depois temos $3 \times 2!$ maneiras de colocarmos os algarismos 2 e 4 juntos e 2 hipóteses de preencher as duas restantes posições com os dois algarismos que sobram de forma a não serem repetidos.

$\underline{1}$ _ _ _ _ $\underline{6}$
$1 \times 3 \times 2! \times 2! \times 1 = 12$

4ª hipótese: Na primeira posição colocamos o algarismo 2, ou seja, o 4 tem de estar na segunda posição de modo a estar ao lado do 2. Na última posição colocamos o algarismo 6, que é o único algarismo par que nos sobra. Depois temos 3! maneiras de colocarmos os restantes três algarismos que sobram de forma a não serem repetidos.

$\underline{2}$ $\underline{4}$ _ _ _ $\underline{6}$
$1 \times 1 \times 3! \times 1 = 6$

Usando os algarismos 1 , 2 , 3 , 4 , 5 e 6 podemos formar $6 + 6 + 12 + 6 = 30$ números pares, inferiores a trezentos mil, e com os algarismos 2 e 4 um ao lado do outro.

8. Aplicando as leis de Morgan vem que:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 9P(A \cap B)$$

Aplicando a fórmula do teorema da probabilidade:

$$1 - P(A \cup B) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)] = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow P(\overline{A}) - P(B) = 8P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

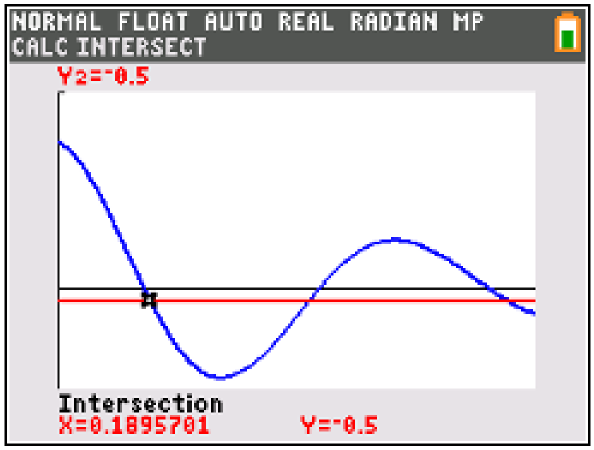
$$\Leftrightarrow 3P(B) - P(B) = 8P(A \cap B) \Leftrightarrow 2P(B) = 8P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{8} \Leftrightarrow P(A|B) = \frac{1}{4}$$

9. A posição de equilíbrio é quando $y = 0$, ou seja, nesta posição a mola não se desloca verticalmente para cima nem para baixo.

Existem três instantes em que a extremidade livre da mola está meio centímetro ($-0,5$ cm) abaixo da posição de equilíbrio o que corresponde à equação:

$$7,5e^{-1,5t}\sin(8,6t+1,6)=-0,5$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, conseguimos determinar t_1, o primeiro desses três instantes:



Considerando que $t_1 \in [0,1]$, o valor de t_1, arredondado às centésimas de segundo, é igual a $0,19$ s.

10. Afirmação I

Sabendo que a função f é duas vezes diferenciável e que f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$ então concluímos que $f''(x)$ não pode ser negativa em $\mathbb{R}^+$. Isto quer dizer que o gráfico da função f não pode ter concavidade voltada para baixo neste intervalo.
A afirmação I é falsa.

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	n.d.	$+$
$f'(x)$	n.d.	$\nearrow$

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	n.d.	$+$
$f(x)$	n.d.	$\smile$

Afirmação II

Para que a função f tenha, pelo menos, um extremo em $]1,5[$, então a função f' tem de ter, pelo menos, um zero neste intervalo. Tendo em conta que a função f é duas vezes diferenciável e sabendo que f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$ bem como $f'(1) > 0$ concluímos que $f'(x) \neq 0$ em $]1,5[\subset \mathbb{R}^+$.
A afirmação II é falsa.

11.

11.1. Como o declive da reta r tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 0 é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$m_r = g'(0) = \cos(0) + 2\sin 0 = 1$

Sabendo que as retas r e s são paralelas então $m_r = m_s = 1$.

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 0 é da forma:

$$y = -\tfrac{1}{2}x + b$$

A reta s intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 4, ou seja, o ponto de coordenadas $(4,0)$ pertence à reta s. Substituindo as coordenadas do ponto $(4,0)$ na equação da reta s, conseguimos determinar a constante b:

$y = x + b \;\Leftrightarrow\; 0 = 4 + b \;\Leftrightarrow\; \Leftrightarrow b = -4$

Assim, a equação reduzida da reta s é:

$$y = x - 4$$

11.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função g:

$g''(x) = (\cos(2x) + 2\sin x)' = -2\sin(2x) + 2\cos x = -4\sin x\cos x + 2\cos x$

Os pontos de inflexão de g correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -4\sin x \cos x + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(-4\sin x + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0,\ x = \frac{\pi}{2} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\vee x = \frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\vee x = \frac{5\pi}{6} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Para $k = 1,\ x = \frac{3\pi}{2} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\vee x = \frac{13\pi}{6} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\vee x = \frac{17\pi}{6} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Para $k = -1,\ x = -\frac{\pi}{2} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\vee x = -\frac{11\pi}{6} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\vee x = -\frac{7\pi}{6} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Logo, $g''(x)$ tem um zero em $x = \frac{\pi}{6}$ no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$g''(0) = -4\sin 0 \cos 0 + 2\cos 0 = 2 > 0$

$g''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + 2\cos\frac{\pi}{4} = -2 + \sqrt{2} < 0$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$g''(x)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$g(x)$	n.d.	$\smile$	P.I.	$\frown$	n.d.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$.

A abcissa do ponto de inflexão do gráfico de g é igual a $\frac{\pi}{6}$.

12. Escrevendo z na forma trigonométrica:

$$z = -2i = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Sendo o ponto A o afixo no plano complexo do número z, o transformado deste ponto por uma rotação de centro na origem e de ângulo orientado de amplitude $\frac{\pi}{3}$ radianos é igual a:

$$z \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

Escrevendo o número complexo $2e^{i\frac{11\pi}{6}}$ na forma algébrica:

$2e^{i\frac{11\pi}{6}} = 2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = 2\left[\cos\left(\frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)\right] =$

$= 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$

Opção(A)

13. Vamos começar por escrever o número complexo $-1-\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica:

$\begin{cases} tg\ \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} \\ \theta \in 3\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = \sqrt{3} \\ \theta \in 3\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$ e $|-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{4} = 2$

$-1-\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Calculando w na forma trigonométrica:

$w = \frac{-1-\sqrt{3}i}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{2e^{i\frac{4\pi}{3}}}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{25\pi}{12}} = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$

Sabendo que o número complexo w é uma das raízes sextas do número complexo z:

$$z = w^6 \Leftrightarrow z = \left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^6 \Leftrightarrow z = 2^6 e^{i\frac{6\pi}{12}} \Leftrightarrow z = 64e^{i\frac{\pi}{2}} = 64i$$

Logo, $iz = i \times 64i = 64i^2 = -64$

14. Como a função f é par, então sabemos que $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = f(-x)$.

Usando a definição de derivada de uma função num ponto:

- $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

- $f'(-a) = \lim\limits_{x\to -a} \frac{f(x)-f(-a)}{x+a} = \lim\limits_{x\to -a} \frac{f(x)-f(a)}{x+a} = (*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y = -x$ ($y \to a$ quando $x \to -a$)

$$(*_1) = \lim_{y \to a} \frac{f(-y)-f(a)}{-y+a} = \lim_{y \to a} \frac{f(y)-f(a)}{-(y-a)} = -\lim_{y \to a} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = -f'(a)$$

Concluímos que $f'(-a) = -f'(a)$.

Sabendo que $f'(-a) = -f'(a)$ e que $f'(a) = f(a)$ vem que:

$$f'(-a) \times f'(a) = -f'(a) \times f'(a) = -f(a) \times f(a) = -[f(a)]^2$$