Proposta de Resolução da Prova Final de Matemática

Prova 92 | 1ª Fase | 3º Ciclo do Ensino Básico | 2016

Caderno 1

---

1. A função representada graficamente é uma função de proporcionalidade inversa e P é um ponto pertencente a essa função. Então conseguimos determinar a constante de proporcionalidade inversa multiplicando as coordenas do ponto P:

   $k = 5 \times 21 = 105$

   Multiplicando as coordenadas de qualquer ponto pertencente a esta função de proporcionalidade inversa, tem de ser igual a k.

   Opção(D)

2. Verba necessária = 1700 milhões euros

   Vamos determinar o valor, em milhões de euros, de 45 % da verba total necessária:

   $$\frac{1700}{x} = \frac{100\%}{45\%} \Leftrightarrow x = \frac{1700 \times 45\%}{100\%} \Leftrightarrow x = 765 \text{ milhões de euros}$$

   Agora basta escrever em notação científica:

   $$765 \text{ milhões de euros} = 765\ 000\ 000 \text{ euros} = 7,65 \times 10^8 \text{ euros}$$

3. Observando a figura sabemos que $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = 4,5 + 8 = 12,5$ cm

   Os triângulos [ABO] e [CDO] são semelhantes visto que têm um ângulo comum (em O) e os lados opostos a este ângulo ($\overline{AB}$ e $\overline{CD}$) são paralelos.

   Como os lados são proporcionais temos que:

   $$\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \Leftrightarrow \frac{9{,}6}{\overline{OD}} = \frac{8}{12{,}5} \Leftrightarrow \overline{OD} = \frac{9{,}6 \times 12{,}5}{8} \Leftrightarrow \overline{OD} = 15 \text{ cm}$$

   De acordo com a figura, $\overline{OD} = \overline{OB} + \overline{BD} \Leftrightarrow 15 = 9,6 + \overline{BD} \Leftrightarrow \overline{BD} = 15 - 9,6 = 5,4$ cm

4.

   4.1. Uma reta perpendicular ao plano que contém a base [ABCD], é, por exemplo, a reta CH.

   4.2. A diferença dos volumes do prisma e do cilindro é representada pela fórmula: $V_{Prisma} - V_{Cilindro} = A_{Quadrado} \times h - \frac{1}{3} \times A_{Círculo} \times h$

   Como a diferença dos volumes é de 3000 cm^3, vem que:

   $A_{Quadrado} \times h - \frac{1}{3} \times A_{Círculo} \times h = 3000 \Leftrightarrow 20^2 \times h - \frac{1}{3} \times 10^2 \pi \times h = 3000 \Leftrightarrow h(400 - \frac{1}{3} \times 100\pi) = 3000 \Leftrightarrow h = \frac{3000}{400 - \frac{1}{3} \times 100\pi} \Leftrightarrow h \approx 35$ cm

5. Vamos seguir a sugestão e começar por determinar $\overline{TC}$:

   O triângulo [CMT] é retângulo em C. Relativamente a $C\hat{M}T$, $\overline{TC}$ e $\overline{MC}$ são os catetos adjacente e oposto, respetivamente.

   Usando a razão trignométrica da tangente vem que:

   $\tan(60^o) = \frac{\overline{TC}}{\overline{MC}} \Leftrightarrow \tan(60^o) = \frac{\overline{TC}}{25{,}6} \Leftrightarrow \overline{TC} = \tan(60^o)\times 25,6 \Leftrightarrow \overline{TC} \approx 1,73\times 25,6 \Leftrightarrow \overline{TC} \approx 44,29$ m

   Com o valor de $\overline{TC}$ podemos determinar $\overline{CR}$:

   O triângulo [TCR] é retângulo em C. Relativamente a $C\hat{R}T$, $\overline{TC}$ e $\overline{CR}$ são os catetos oposto e adjacente, respetivamente.

   Mais uma vez, usando a razão trignométrica da tangente vem que:

   $\tan(45^o) = \frac{\overline{TC}}{\overline{CR}} \Leftrightarrow \tan(45^o) \approx \frac{44{,}29}{\overline{CR}} \Leftrightarrow \overline{CR} \approx \frac{44{,}29}{\tan(45^o)} \Leftrightarrow \overline{CR} \approx \frac{44{,}29}{1} \Leftrightarrow \overline{CR} \approx 44,29$ m

   $$\overline{MR} = \overline{MC} + \overline{CR} \approx 25,6 + 44,29 \approx 70 \text{ m}$$

6. O intervalo $A = [1, \sqrt{n}[$ tem 27 números naturais quando $n = 28^2 = 784$, porque $\sqrt{28^2} = 28$ e o intervalo é aberto em $\sqrt{n}$.

   Para que o intervalo $A = [1, \sqrt{n}[$ tenha 28 números naturais, $n = 28^2 + 1 = 785$ para que $\sqrt{n} > 28$.

   Logo, $n = 785$.

Caderno 2

---

7. A escola tem 40 alunos (2 + 7 + 20 + 11), por isso 25% da amostra ordenada corresponde a 10 alunos.

   Assim, o 1º quartil desta amostra é a média das idades correspondentes às posições 10 e 11 da amostra ordenada:

   $Q_1 = \frac{14+14}{2} = 14$

   Opção (C)

8.

   8.1. A Beatriz vence a jogada se o seu dado tiver um número maior que o número do dado do António. O António lançou o dado e obteve o número 5 por isso a Beatriz só vence a jogada se sair o número 6 do dado.

Usando a Regra de Laplace e sabendo que podem sair seis números, o valor da probabilidade da Beatriz vencer esta jogada é:

$$P(\text{"A Beatriz vencer esta jogada"}) = \frac{n^{o}\ de\ casos\ favorveis}{n^{o}\ de\ casos\ \ possíveis} = \frac{1}{6}$$

8.2. Vamos começar por construir uma tabela de dupla entrada:

		ANTÓNIO					
		1	2	3	4	5	6
B	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
E	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
A	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
T	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
R	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
I Z	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Deste modo conseguimos perceber todas as hipóteses possíveis no lançamento dos 2 dados.

nº de casos favoráveis = nº de entradas da tabela em que o número do António é superior ao número da Beatriz= 15

nº de casos possíveis = nº total de entradas da tabela = 36

$P(\text{"António vencer a jogada"}) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

9. Como $q < r$ então $-2 \times q > -2 \times r$

   Opção(B)

10. Observando as somas apresentadas, podemos verificar que a soma dos primeiros n números ímpares é n^2.

    Portanto, a soma dos primeiros 80 números ímpares é igual a $80^2 = 6400$.

11. A função f é uma função afim logo a sua expressão algébrica é da forma $f(x) = mx + b$

    onde, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-1)}{5-0} = \frac{2}{5}$ e $b = -1$

    Então, a expressão algébrica da função f é : $f(x) = \frac{2}{5}x - 1$.

12. Recorrendo às regras operatórias de potências temos:

    $\frac{8^{30}}{2^{30}} \times (-1)^{40} = (\frac{8}{2})^{30} \times 1 = 4^{30} = (2^2)^{30} = 2^{60}$

13. Seja h o número de homens e m o número de mulheres.

    o número de homens é igual a um quarto do número de mulheres corresponde à equação:

    $$h = \frac{1}{4}m$$

    Se a empresa contratar mais 2 homens $(h+2)$ e mais 3 mulheres (m+3), o número de homens passará a ser igual a um terço do número de mulheres, que pode ser traduzido pela equação:

    $$h+2 = \frac{1}{3}(m+3) \;\Leftrightarrow\; h+2 = \frac{m+3}{3}$$

    Assim, um sistema de equações que permita determinar o número de homens e o número de mulheres, pode ser:

    $$\begin{cases} h = \frac{1}{4}m \\ h+2 = \frac{m+3}{3} \end{cases}$$

14. $x^2 + 3(x-2) = x-3 \;\Leftrightarrow\; x^2+3x-6 = x-3 \;\Leftrightarrow\; x^2+3x-x-6+3=0 \;\Leftrightarrow\; x^2+2x-3=0$

    $a = 1 \qquad b = 2 \qquad c = -3$

    Usando a fórmula resolvente temos:

    $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\times1\times(-3)}}{2\times1} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{-2+4}{2} \vee x = \frac{-2-4}{2} \;\Leftrightarrow\; x = 1 \vee x = -3$

    C.S.= $\{-3, 1\}$

15. $\frac{x-1}{6} \leq \frac{5x-1}{3} \;\Leftrightarrow\; \frac{x-1}{6} \leq \frac{10x-2}{6} \;\Leftrightarrow\; x-1 \leq 10x-2 \;\Leftrightarrow\; x-10x \leq -2+1 \;\Leftrightarrow\; -9x \leq -1 \;\Leftrightarrow\; x \geq \frac{1}{9}$

    C.S.= $[\frac{1}{9}, +\infty[$

16. Observando a figura temos que $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = a+b$

    Assim, $A_{[Quadrado\ de\ lado\ \overline{OB}]} = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

    Opção(A)

17.

    17.1. O ângulo $M\hat{O}P$ é o ângulo ao centro relativo a $\widehat{QP}$, ou seja, $\widehat{QP} = M\hat{O}P$.

    O triângulo [OPM] é retângulo em P, porque $\overline{MN}$ é tangente à circunferência no ponto P logo é perpendicular a $\overline{OP}$ (raio da circunferência).

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o temos que:

$$180 = M\hat{O}P + O\hat{P}M + O\hat{M}P \Leftrightarrow 180 = M\hat{O}P + 90 + 15 \Leftrightarrow M\hat{O}P = 180 - 90 - 15 \Leftrightarrow M\hat{O}P = 75^o$$

$\widehat{QP} = M\hat{O}P = 75^o$

Opção(B)

17.2. O triângulo $[OPN]$ é retângulo em P ($\overline{OP}$ é perpendicular à reta tangente em P, que contém o lado $\overline{PN}$ do triângulo) por isso podemos usar o teorema de pitágoras para determinar $\overline{ON}$:

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2 \Leftrightarrow h^2 = (\sqrt{3})^2 + 3^2 \Leftrightarrow h^2 = 12 \Leftrightarrow h = \pm\sqrt{12} \Leftrightarrow h = 2\sqrt{3}\ , \text{ porque } h > 0$$

17.3. O ponto O é a interseção das duas bissetrizes dos ângulos $L\hat{N}M$ e $L\hat{M}P$, logo o ponto O designa-se o Incentro do triângulo [LMN].

Opção(C)