Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2021

1.

1.1. Sabendo que o plano α é perpendicular à reta BE então o vetor normal ao plano α tem de ser colinear com o vetor $\overrightarrow{BE}$.

O vetor normal ao plano da opção A, de coordenadas $(-1, 6, 2)$, é colinear com o vetor $\overrightarrow{BE}$. Da mesma forma o vetor normal ao plano da opção C, de coordenadas $(1, -6, -2)$ também é colinear com o vetor $\overrightarrow{BE}$.

Como os vetores normais aos planos da opções B e D não são colineares com o vetor $\overrightarrow{BE}$ excluímos estas duas opções.

Vamos verificar se o ponto de coordenadas $(1, 0, 1)$ pertence ao plano da opção A:

$$-x + 6y + 2z = 0 \Leftrightarrow -1 + 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \quad \text{(Não pertence)}$$

Só pode ser a opção C mas vamos confirmar que o ponto de coordenadas $(1, 0, 1)$ pertence ao plano da opção C:

$$x - 6y - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + 0 - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad \text{(Pertence)}$$

Opção(C)

1.2. Com as coordenadas do ponto E e do vetor $\overrightarrow{BE}$ conseguimos calcular as coordenadas do ponto B:

$$\overrightarrow{BE} = E - B \Leftrightarrow B = (-2, 6, 2) - (-1, 6, 2) \Leftrightarrow B = (-1, 0, 0)$$

Através da fórmula do volume da pirâmide vamos determinar a área da base quadrada da pirâmide:

$$V_{[ABCDE]} = \frac{A_b \times h}{3} \Leftrightarrow 20 = \frac{A_b \times 6}{3} \Leftrightarrow A_b = 10$$

Como $A_b = 10$ então aresta$_{base} = d(AB) = \sqrt{10}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo [OAB], vamos determinar a distância do ponto O ao ponto A:

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2 \Leftrightarrow (\sqrt{10})^2 = 1^2 + d^2(OA) \Leftrightarrow d^2(OA) = 9 \Leftrightarrow d(OA) = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d(OA) = 3$$

Ou seja o ponto A tem coordenadas (0,0,3).

Calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,0,0) - (0,0,3) = (-1,0,-3)$$

2. Vamos começar por considerar o ângulo $\alpha = P\hat{O}T$.

   Observando a figura sabemos que o ponto A tem coordenadas $A(r,0)$ e o ponto B tem coordenadas $B(0,r)$.

   Usando as razões trigonométricas no triângulo $[TOP]$ concluímos que o ponto P tem coordenadas $P(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$.

   $$\overline{BS} + \overline{AT} = y_B - y_P + x_A - x_P = r - r\sin\alpha + r - r\cos\alpha = 2r - r\sin\alpha - r\cos\alpha =$$

   $$= r(2 - \sin\alpha - r\cos\alpha)$$

   Usando uma regra de três simples e sabendo que o perímetro de uma circunferência igual a $2\pi r$, conseguimos escrever α em função de d e de r:

Perímetro		Ângulo
$2\pi r$	———	2π
d	———	α

   Logo vem que $\alpha = \frac{d}{r}$

   $$\overline{BS} + \overline{AT} = r(2 - \sin\alpha - r\cos\alpha) = r\left(2 - \sin\left(\frac{d}{r}\right) - r\cos\left(\frac{d}{r}\right)\right)$$

3. Existem ao todo $11 \times 11 = 121$ pontos que pertencem a esta região e cujas coordenadas são números inteiros.

   Substituindo, na equação da reta, o x (abcissa) por $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ podemos determinar quais deste 121 pontos pertencem à reta $y = x + 7$:

   Se $x = 0$, $y = 7$
   O ponto $(0, 7)$ pertence à reta

   Se $x = 1$, $y = 8$
   O ponto $(1, 8)$ pertence à reta

   Se $x = 2$, $y = 9$
   O ponto $(2, 9)$ pertence à reta

   Se $x = 3$, $y = 10$
   O ponto $(3, 10)$ pertence à reta

   Se $x = 4$, $y = 11$
   O ponto $(4, 11)$ não pertence à reta

   Concluímos que nesta região só existem 4 pontos pertencentes à reta de equação $y = x + 7$.

   A probabilidade do ponto pertencer à reta de equação $y = x + 7$ é igual a:

   $$\tfrac{4}{121} \approx 0,033$$

   Opção(B)

4. Consideremos um conjunto de doze objetos constituído por cinco livros e sete canetas.

   A Fernanda vai oferecer três livros e três canetas a um dos netos e os restantes objetos ao outro, ou seja, a ordem de escolha dos objetos não interessa e este conjunto pode ficar com um neto ou com o outro, o que equivale a:

   $$^5C_3 \times {}^7C_3 \times 2 = 700$$

   Ou então, a Fernanda vai dar quatro livros e duas canetas a um dos netos, mais uma vez a ordem de escolha dos objetos não interessa e este conjunto pode ficar com um neto ou com o outro, que equivale a:

$$^5C_4 \times {}^7C_2 \times 2 = 210$$

Logo a Fernanda tem $^5C_3 \times {}^7C_3 \times 2 + {}^5C_4 \times {}^7C_2 \times 2 = 910$ maneiras diferentes de repartir os doze objetos pelos seus dois netos.

5. Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{P(A)}{2}$

Aplicando as leis de morgan e sabendo que $P(B) = \frac{3P(A)}{2}$:

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$

$= 1 - \left[P(A) + \frac{3P(A)}{2} - \frac{P(A)}{2}\right] = 1 - [P(A) + P(A)] = 1 - 2P(A)$

Assim vem que:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) + 2P(A) = 1 - 2P(A) + 2P(A) = 1$$

6. Calculando o limite da sucessão:

$\lim u_n = \lim (2n^2 - n) = \lim\, n^2\left(2 - \frac{1}{n}\right) = +\infty$

$\lim f(\frac{1}{u_n}) = f(\frac{1}{\lim u_n}) = f(\frac{1}{+\infty}) = f(0^+) = +\infty$

O gráfico da função f que verifica a condição $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ é o gráfico da opção A.

Opção(A)

7. Consideremos a sucessão $u_n = 2n + 1$.

Calculando os primeiros termos de ordem ímpar da sucessão (u_n):

$u_1 = 3, \quad u_3 = 7, \quad u_5 = 11, \quad u_7 = 15, ...$

Conseguimos perceber que os termos de ordem ímpar da sucessão $u_n = 2n + 1$ são os termos de uma progressão aritmética em que o primeiro termo é igual 3 e razão 4.

Vamos escrever o termo geral da progressão aritmética (r_n) em que o primeiro termo é igual 3 e razão 4:

$$r_n = 3 + (n-1) \times 4 = 4n - 1$$

Assim vem que, $r_{200} = 4 \times 200 - 1 = 799$

Calculando o valor da soma dos duzentos primeiros termos da progressão aritmética (r_n):

A soma dos primeiros duzentos termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) é igual à soma dos primeiros duzentos termos da progressão aritmética (r_n):

$$S_{200} = \frac{u_1+u_{200}}{2} \times 200 = \frac{3+799}{2} \times 200 = 80200$$

8. Vamos escrever os números complexos z_1 e z_2 na forma algébrica:

$z_1 = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$z_2 = 2e^{i(\theta+\pi)} = 2(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)) = 2(-\cos\theta - i\sin\theta) = -2\cos\theta - 2i\sin\theta$

$z_1 + z_2 = \cos\theta + i\sin\theta - 2\cos\theta - 2i\sin\theta = -\cos\theta - i\sin\theta$

Logo o afixo do número complexo $z_1 + z_2$ tem coordenadas $(-\cos\theta, -\sin\theta)$.

Como θ pertence ao primeiro quadrante então $\cos\theta > 0$ e $\sin\theta > 0$, ou seja, $-\cos\theta < 0$ e $-\sin\theta < 0$. Concluímos que o afixo do número complexo $z_1 + z_2$ pertence ao terceiro quadrante.

Opção(C)

9. $(z_1)^2 = (\frac{1}{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}})^2 = \frac{1}{4}\, e^{i\frac{\pi}{2}}$

$(\overline{z_2})^3 = (\overline{z_2})^2 \times \overline{z_2} = (-2i)^2 \times (-2i) = 4i^2 \times (-2i) = 8i = 8\, e^{i\frac{\pi}{2}}$

Resolvendo a equação:

$iz^2 + z_1^2 \times (\overline{z_2})^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow iz^2 + \frac{1}{4}\, e^{i\frac{\pi}{2}} \times 8\, e^{i\frac{\pi}{2}} - 2 = 0 \Leftrightarrow iz^2 + 2\, e^{i\pi} - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow iz^2 - 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow iz^2 = 4 \Leftrightarrow z^2 = \frac{4}{i} \Leftrightarrow z^2 = \frac{4}{i} \times \frac{i}{i} \Leftrightarrow z^2 = -4i \Leftrightarrow z^2 = 4\, e^{i\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{4}\, e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)}, \quad k \in \{0, 1\}$

Os números complexos z_0 e z_1 , escritos na forma trigonométrica, que são solução da equação:

Para $k = 0$, , $z_0 = 2 \quad e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Para $k = 1$, , $z_1 = 2 \quad e^{i\frac{7\pi}{4}}$

10.

10.1. Como a função f é continua em $x = 1$ então temos que ter:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1).$$

Calculando os valores do limites laterais da função f no ponto $x = 1$:

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left[\frac{\sin(x-1)}{1-x^2} + k\right] = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sin(x-1)}{(1-x)(1+x)} + k = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sin(x-1)}{(1-x)(1+x)} + k =$
  $= \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sin(x-1)}{(1-x)} \times \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{1+x} + k = -\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)} \times \frac{1}{2} + k = (*_1)$

  Fazendo a mudança de variável: $y = x - 1 \quad (y \to 0^+ \text{ quando } x \to 1^+)$

  $(*_1) = -\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} \times \frac{1}{2} + k = -\frac{1}{2} + k$ (Limite notável)

- $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} [x - 2 + \ln(3 - 2x)] = -1$

Calculando o valor de k:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + k = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

10.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f no intervalo $]-\infty, 1[$:

$f'(x) = [x - 2 + \ln(3 - 2x)]' = 1 - \frac{2}{3-2x}$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{3-2x} = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{3-2x} \Leftrightarrow 3 - 2x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Logo, $f'(x)$ tem um zero em $x = \frac{1}{2}$.

$f'(0) = 1 - \frac{2}{3-2\times 0} = \frac{1}{3} > 0$

$f'(0,8) = 1 - \frac{2}{3-2\times 0,8} < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n.d.
$f(x)$	$\nearrow$	máximo	$\searrow$	n.d.

O gráfico de f é crescente no intervalo $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ e é decrescente no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

$f(0) = \frac{1}{2} - 2 + \ln\left(3 - 2 \times \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \ln 2$

A função f tem um máximo relativo em $x = \frac{1}{2}$ igual a $-\frac{3}{2} + \ln 2$.

11. $g(x) = \log_2(1 - \cos x) + \log_2(1 + \cos x) + 2\log_2(2\cos x) =$

$= \log_2[(1 - \cos x)(1 + \cos x)] + 2\log_2(2\cos x) = \log_2(1 - \cos^2 x) + 2\log_2(2\cos x) =$

$= \log_2(\sin^2 x) + 2\log_2(2\cos x) = 2\log_2(\sin x) + 2\log_2(2\cos x) =$

$= 2[\log_2(\sin x) + \log_2(2\cos x)] = 2\log_2(2\sin x\cos x) = 2\log_2(\sin(2x))$

12.

12.1. Com o decorrer do tempo, o número de bactérias vivas existentes no tubo tende para:

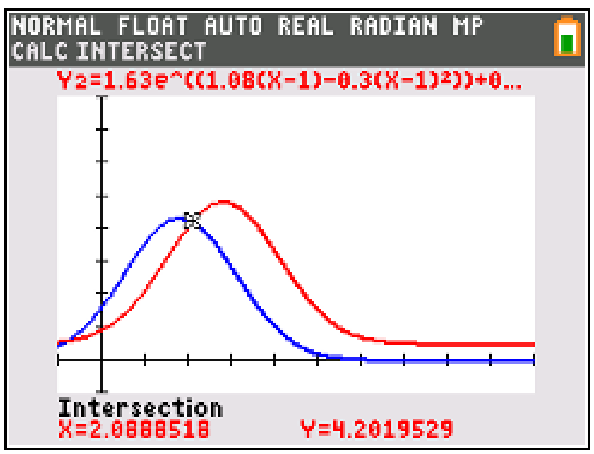
$$\lim_{t\to+\infty} N_0\, e^{1{,}08t-0{,}3t^2} = \lim_{t\to+\infty} N_0\, e^{t^2\left(\frac{1{,}08}{t}-0{,}3\right)} = N_0\, e^{-\infty} = 0$$

Opção(D)

12.2. Num certo instante, t_1 , havia, no tubo de ensaio, mais meio milhar de bactérias vivas do que uma hora antes desse instante, o que corresponde à equação:

$$N(t_1) = N(t_1-1) + 0,5 \Leftrightarrow 1,63\, e^{1{,}08t_1-0{,}3{t_1}^2} = 1,63\, e^{1{,}08(t_1-1)-0{,}3(t_1-1)^2} + 0,5$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Considerando I o ponto de interseção visualizado na máquina, as suas coordenadas arredondadas às milésimas são: $I(2,089; 4,202)$

O instante t_1, em minutos, com três casas decimais é igual a $2,089$, o que corresponde a 2 horas e 5 minutos.

13. Vamos verificar a existência de assíntotas horizontais do gráfico da função f:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to -\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{e^{x-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-2}} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-2}} = e^2 \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}} - \frac{1}{+\infty} = 0$

$y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to +\infty$.

14. $e^{-x}(4+3^{2x}) \geq 5 \Leftrightarrow 4e^{-x} + e^x \geq 5 \Leftrightarrow \frac{4}{e^x} + e^x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 4 \geq 0 \wedge e^x \neq 0$

Fazendo a mudança de variável $y = e^x$, ficamos com a inequação $y^2 - 5y + 4 \geq 0$.

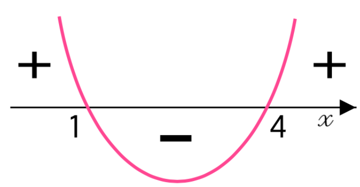
Consideremos a equação $y^2 - 5y + 4 = 0$

$a = 1 \qquad b = -5 \qquad c = 4$

Usando a fórmula resolvente temos:

$y = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow y = \frac{5 \pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times4}}{2\times1} \Leftrightarrow y = \frac{5\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{5+3}{2} \vee y = \frac{5-3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 1 \vee y = 4$



Calculando na variável original x vem que:

$$1 = e^x \vee 4 = e^x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \ln 4$$

Como $-2 \leq x \leq 2$ então C.S.$=]-\infty, 0] \cup [\ln 4, +\infty[\, \cap \, [-2, 2] = [-2, 0] \cup [\ln 4, 2]$

15. Seja t a reta não horizontal de equação $y = mx + b$ que é tangente, simultaneamente, ao gráfico de f e ao gráfico de g.

Como o ponto A pertence ao gráfico de f tem coordenadas $(x_A, 2{x_A}^2)$, da mesma forma, o ponto B pertence ao gráfico de g logo tem coordenadas $(x_B, -(x_B-1)^2)$.

A reta t passa nos pontos A e B então o seu declive é igual a:

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2{x_A}^2 - (-(x_B-1)^2)}{x_A - x_B} = \frac{2{x_A}^2 + (x_B-1)^2}{x_A - x_B}$$

Sabendo que A é o ponto de tangência da reta t com o gráfico de f e B é o ponto de tangência dessa mesma reta com o gráfico de g vem que:

$$m = f'(x_A) \;\text{ e }\; m = g'(x_B)$$

Calculando a expressão da primeira derivada das funções f e g:

$f'(x) = 4x$

$g'(x) = -2(x-1) = -2x+2$

Portanto $f'(x_A) = g'(x_B) \Leftrightarrow 4x_A = -2x_B + 2 \Leftrightarrow x_B = -2x_A + 1$

O declive da reta t em função de x_A é:

$$m = \frac{2{x_A}^2 + (x_B-1)^2}{x_A - x_B} = \frac{2{x_A}^2 + (-2x_A+1-1)^2}{x_A - (-2x_A+1)} = \frac{6{x_A}^2}{3x_A - 1}$$

Resolvendo a equação $m = f'(x_A)$ conseguimos determinar x_A:

$m = f'(x_A) \Leftrightarrow \frac{6{x_A}^2}{3x_A-1} = 4x_A \Leftrightarrow \frac{6{x_A}^2}{3x_A-1} - 4x_A = 0 \;\wedge\; 3x_A - 1 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-6{x_A}^2+4x_A}{3x_A-1} \;\wedge\; x_A \neq \frac{1}{3} \Leftrightarrow -6{x_A}^2 + 4x_A = 0 \;\wedge\; x_A \neq \frac{1}{3} \Leftrightarrow x_A = 0 \;\vee\; x_A = \frac{2}{3} \;\wedge\; x_A \neq \frac{1}{3}$

Observando o gráfico sabemos que $x_A > 0$, assim temos que $x_A = \frac{2}{3}$.

Com o valor de x_A, vamos calcular o valor de x_B:

$$x_B = -2x_A + 1 = -2 \times \frac{2}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$$