Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2ª Fase | Ensino Secundário | 2023

1. A sucessão $(-1)^n$ é igual a -1 quando n é ímpar e é igual a 1 quando n é par, logo podemos representar a sucessão $\frac{(-1)^n}{n}$ da seguinte forma:

$$\frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$\lim -\frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n} = \lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$

Opção(D)

2. Seja p_n a sucessão dos perímetros da sequência dos n triângulos.

Para $n = 1$, $\quad p_1 = 3\overline{AB} = 3$

Para $n = 2$, $\quad p_2 = 3\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{3}{2}$

Para $n = 3$, $\quad p_3 = 3\frac{\overline{AB}}{4} = \frac{3}{4}$

...

A sucessão p_n é uma progressão geométrica de razão igual a $\frac{1}{2}$.

Usando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica:

$$S_n = p_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 6\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Sabendo que $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ é uma sucessão decrescente apenas de valores positivos e que o seu maior valor é igual a $\frac{1}{2}$, vem que:

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -\frac{1}{2} \leq -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 - \frac{1}{2} \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 6 \times \frac{1}{2} \leq 6\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] < 6$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3 \leq 6\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] < 6$

Assim concluímos que a soma dos perímetros dos n triângulos da sequência é menor do que 6 unidades, qualquer que seja o valor de n.

3. Vamos considerar todos os números naturais de seis algarismos que é possível formar com os algarismos de 1 a 9.

   Das seis posições possíveis vamos escolher duas para pôr os dois cincos, como os números são iguais a ordem de escolha não interessa, ou seja, temos ${}^6C_2$ hipóteses.

   Depois de selecionar os dois cincos restam-nos quatro posições onde pode ficar qualquer outro dos oito algarismos que sobram. Como os algarismos se podem repetir temos 8^4 combinações possíveis.

   Assim existem ${}^6C_2 \times 8^4 = 61440$ números naturais de seis algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9 com exatamente dois cincos.

   Opção(B)

4. A e B são acontecimentos equiprováveis por isso $P(A) = P(B)$.

   $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,6 = 0,4 = P(B)$

   $P(A \cup \overline{B}) = 1 - P(B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,7 = 1 - 0,4 + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,1$

   Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

   $P((A \cup \overline{B})|B) = \frac{P((A \cup \overline{B}) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup (\overline{B} \cap B))}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$

5. Ao todo existem $6n + 1$ pontos no conjunto formado pelo ponto V e pelos vértices de todos os hexágonos da composição.

   nº de casos favoráveis $= {}^6C_2 \times n$

   nº de casos possíveis $= {}^{6n+1}C_2$

Selecionando, ao acaso, dois pontos desse conjunto, a probabilidade de estes serem vértices do mesmo hexágono é igual a:

P("Os dois pontos selecionados são vértices do mesmo hexágono")= $\frac{{}^{6}C_2 \times n}{{}^{6n+1}C_2}$ $(*_1)$

Aplicando a fórmula de cálculo das combinações vem que:

$${}^{6n+1}C_2 = \frac{(6n+1)!}{2!(6n+1-2)!} = \frac{(6n+1)!}{2(6n-1)!} = \frac{(6n+1)(6n)(6n-1)!}{2(6n-1)!} = \frac{6n(6n+1)}{2} = \frac{36n^2+6n}{2} = 18n^2+3n$$

$$(*_1) = \frac{15n}{18n^2+3n}$$

Sabendo que esta probabilidade é igual a $\frac{5}{49}$ conseguimos calcular n através da equação:

$$\frac{15n}{18n^2+3n} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow 49 \times 15n = 5(18n^2+3n) \Leftrightarrow 735n = 90n^2 + 15n \Leftrightarrow 90n^2 - 720n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(90n-720) = 0 \Leftrightarrow n = 0 \ \vee \ 90n - 720 = 0 \Leftrightarrow n = 0 \ \vee \ n = 8$$

Como $n > 3$, concluímos que $n = 8$, isto é, esta composição geométrica é formada por 8 hexágonos.

6. Substituindo os pontos de coordenadas (1, 5) e (2, 7) na expressão algébrica da função f obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 5 = a + e^b \\ 7 = a - e^{2b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - e^b \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ 7 = 5 - e^b - e^{2b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ (e^b)^2 + e^b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Fazendo a mudança de variável $y = e^b$ e usando a fórmula resolvente:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ y^2 + y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ y = -1 \ \vee \ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ e^b = -1 \ \vee \ e^b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ b = \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - e^{\ln 2} \\ b = \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - 2 \\ b = \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \ln 2 \end{cases}$$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = 2 \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = (*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y = 2x \quad (y \to 0 \ \text{ quando } \ x \to 0)$

$(*_1) = 2\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 2 \times 1 = 2 \qquad$ (Limite notável)

Opção(D)

8.

8.1. A superfície esférica de diâmetro [AG] tem centro no ponto médio do segmento de reta [AG] e raio igual a $\frac{\overline{AG}}{2}$.

Vamos determinar as coordenadas do ponto médio:

$M_{[AG]}\left(\frac{4+12}{2}, \frac{0+\frac{13}{2}}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$

$M_{[AG]}\left(8, \frac{13}{4}, 1\right)$

Usando a formula da distância entre dois pontos conseguimos calcular o raio da superfície esférica:

$$d(AG) = \sqrt{(4-12)^2 + \left[0 - \left(\frac{13}{2}\right)\right]^2 + (0-2)^2} = \sqrt{\frac{441}{4}} = \frac{21}{2}$$

O raio da superfície esférica de diâmetro [AG] é igual a $\frac{\frac{21}{2}}{2} = \frac{21}{4}$.

A superfície esférica de diâmetro [AG] tem equação:

$$\left(x-8\right)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(z-1\right)^2 = \frac{441}{16}$$

Opção(A)

8.2. Sabendo as coordenadas do ponto G e um vetor diretor da reta FG, uma equação vetorial desta reta é:

$$\text{GF: } (x,y,z) = \left(12, \frac{13}{2}, 2\right) + k(3,4,0), \quad k \in \mathbb{R}$$

O vetor diretor da reta EL tem coordenadas $(3,4,0)$ e é também um vetor normal ao plano AFE.

A equação do plano AFE é da forma:

$$3x + 4y + d = 0$$

Como o ponto A pertence ao plano AFE, substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$3x + 4y + d = 0 \Leftrightarrow 3 \times 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$$

Uma equação do plano AFE é: $3x + 4y - 12 = 0$.

As coordenadas genéricas de um ponto P pertencente à reta GF são:

$$\mathrm{P}\Big(12 + 3k, \tfrac{13}{2} + 4k, 2\Big)$$

.

Como o ponto F pertence ao plano AFE (ponto de interseção do plano AFE com a reta GF), substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano AFE conseguimos calcular a constante k:

$3(12 + 3k) + 4\big(\tfrac{13}{2} + 4k\big) - 12 = 0 \Leftrightarrow 36 + 9k + 26 + 16k - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 25k = -50 \Leftrightarrow k = -\tfrac{50}{25} \Leftrightarrow k = -2$

Substituindo $k = -2$ nas coordenadas genéricas do ponto conseguimos saber as coordenadas do ponto F:

$$F\Big(6, -\tfrac{3}{2}, 2\Big)$$

9. Pela observação da figura sabemos que:

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}).(\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CE}) =$

$= \overrightarrow{DO}.\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{DO}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{CE} = (*_2)$

Os vetores $\overrightarrow{DO}$ e $\overrightarrow{OC}$ são perpendiculares, bem como os vetores $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{CE}$ então o seu produto escalar é igual a zero.

$(*_2) = \overrightarrow{DO}.\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OC} = (*_3)$

Aplicando a fórmula do produto escalar entre dois vetores vem que:

$\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{DO} = ||\overrightarrow{DO}||^2 \times \cos 0 = \left(\frac{\overline{OA}}{3}\right)^2 = \frac{\overline{OA}^2}{9}$

$\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CE} = ||\overrightarrow{DO}|| \times ||\overrightarrow{CE}|| \times \cos\pi = \frac{\overline{OA}}{3} \times \left(\overline{OA} - \frac{\overline{OA}}{3}\right) \times -1 = -\frac{\overline{OA}}{3} \times \frac{2\overline{OA}}{3} = -\frac{2\overline{OA}^2}{9}$

$\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OC} = ||\overrightarrow{OC}||^2 \times \cos 0 = \left(\frac{\overline{OA}}{4}\right)^2 = \frac{\overline{OA}^2}{16}$

$(*_3) = \frac{\overline{OA}^2}{9} - \frac{2\overline{OA}^2}{9} + \frac{\overline{OA}^2}{16} = -\frac{\overline{OA}^2}{9} + \frac{\overline{OA}^2}{16} = \frac{-16\overline{OA}^2+9\overline{OA}^2}{144} = \frac{-7\overline{OA}^2}{144}$

Sabendo que $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DE} = -7$ conseguimos calcular $\overline{OA}$ através da equação:

$\frac{-7\overline{OA}^2}{144} = -7 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 144 \Leftrightarrow \overline{OA} = \pm\sqrt{144} \Leftrightarrow \overline{OA} = 12 \quad \overline{OA} > 0$

10. Sabendo que g é uma função par $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = +\infty$. O referencial III não representa a função g em $]-\infty, 0[\backslash\{-1\}$ pois $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = -\infty$.

    Sendo a função g diferenciável no seu domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ e como $0 \in D_g$ então g é contínua em $x = 0$, ou seja, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = g(0)$.

    Se $g(0) < 0$, concluímos que $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) < 0$. O referencial I não representa a função g em $]-\infty, 0[\backslash\{-1\}$.

    Como $g'(x) < 0 \quad \forall x \in]-\infty, -1[$ então a função g é decrescente no intervalo $]-\infty, -1[$ por isso o referencial II não representa a função g em $]-\infty, 0[\backslash\{-1\}$.

11. Sabemos que o ponto A pertence ao semieixo imaginário positivo e é o afixo de um número complexo z_1.

    Escrevendo o número complexo z_1 na forma trigonométrica, $z_1 = |z_1|e^{i\frac{\pi}{2}}$.

    Como o triângulo [ABC] é equilátero, então $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{3}$.

    O ponto B é o afixo de um número complexo z_2, pela observação da figura sabemos que $Arg(z_2) = Arg(z_1) + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$.

    Escrevendo o número complexo z_2 na forma trigonométrica, $z_2 = |z_2|e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Vamos calcular ${z_1}^2 \times z_2$:

$${z_1}^2\times z_2 = \left(|z_1|e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 \times |z_2|e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{i} = |z_1|^2 e^{i\pi} \times |z_2|e^{i\frac{7\pi}{6}} = |z_1|^2|z_2|e^{i\left(\pi+\frac{7\pi}{6}\right)} = |z_1|^2|z_2|e^{i\left(\frac{13\pi}{6}\right)}$$

Concluímos que $Arg({z_1}^2 \times z_2) = \frac{13\pi}{6}$.

$\frac{13\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{6} \in 1^{\text{o}}$ quadrante.

O afixo do número complexo ${z_1}^2 \times z_2$ pertence ao 1º quadrante.

Opção(A)

12. Escrevendo $-1-\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica:

$$\begin{cases} tg\ \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} \\ \theta \in 3\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = \sqrt{3} \\ \theta \in 3\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow\ \theta = \frac{4\pi}{3}\ \text{ e }\ |-1-\sqrt{3}i| = 2$$

Logo $-1-\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Vamos simplificar o número complexo z:

$$z = \frac{2i^{11}e^{i\alpha}}{-1-\sqrt{3}i} = \frac{2i^3e^{i\alpha}}{2e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \frac{-2ie^{i\alpha}}{2e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \frac{2e^{i\frac{3\pi}{2}}e^{i\alpha}}{2e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \frac{e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}}{e^{i\frac{4\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha-\frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}$$

Sabendo que $Re(z) = -Im(z)$ então o número complexo z pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

Por outro lado também sabemos que o afixo de z pertence ao 4º quadrante, ou seja, $arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

Assim temos que:

$\frac{\pi}{6} + \alpha = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$k = 0,\ \alpha = \frac{19\pi}{12}\ \in [0, 2\pi[$.

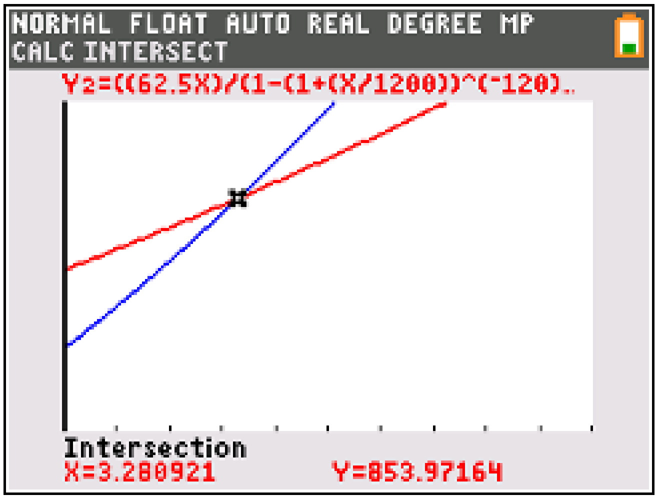
13. $p(j)$ é o valor da prestação mensal a pagar, em euros, dado em função da taxa de juro anual inicial aplicada, j , em percentagem.

$p(2j)$ é o valor da prestação mensal a pagar, em euros, no caso de a taxa de juro anual inicial duplicar.

No caso de a taxa de juro anual inicial duplicar, a prestação mensal aumentará 120 euros, o que corresponde à equação:

$$p(2j) = p(j) + 120 \Leftrightarrow \frac{125j}{1-\left(1+\frac{2j}{1200}\right)^{-120}} = \frac{62{,}5j}{1-\left(1+\frac{j}{1200}\right)^{-120}} + 120$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



O valor a taxa de juro anual inicial, arredondado às milésimas é igual a $3,281\%$.

14.

14.1. Como $D_f =]0, +\infty[$, a única possível assíntota vertical do gráfico da função f é a reta $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x + 2x}{x} = \frac{\ln 0^+ + 0}{0^+} = \frac{-\infty + 0}{0^+} = -\infty$$

Concluímos que a reta $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f.

A função f só está definida em $]0, +\infty[$, logo vamos averiguar a possível existência de uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x + 2x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{2x}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} + 2 = 0 + 2 = 2$$

(Limite notável)

Concluímos que $f(x)$ tem uma assíntota horizontal de equação $y = 2$ quando $x \to +\infty$.

14.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x + 2x}{x}\right)' = \frac{(\frac{1}{x}+2)x - (\ln x + 2x)}{x^2} = \frac{1+2x-\ln x - 2x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Os extremos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \ \wedge \ x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \ \wedge \ x \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = e \ \wedge \ x \neq 0$

Logo, $f'(x)$ tem um zero em $x = e$.

$f'(1) = \frac{1-\ln 1}{1^2} = 1 > 0$

$f'(3) = \frac{1-\ln 3}{3^2} = \frac{1-\ln 3}{9} < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	0		e	$+\infty$
$f'(x)$	n.d.	+	0	-
$f(x)$	n.d.	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$

O gráfico de f é crescente no intervalo $]0, e]$ e é decrescente no intervalo $[e, +\infty[$.

$f(e) = \frac{\ln e + 2e}{e} = \frac{1+2e}{e} = \frac{1}{e} + 2$

A função f tem um máximo relativo igual a $\frac{1}{e} + 2$.

15. Vamos aplicar a razão trigonométrica do cosseno ao triângulo retângulo [OTA] de forma a determinarmos $\overline{OA}$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OT}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{2}{\cos\alpha}$$

Para calcularmos $\overline{OB}$ vamos aplicar a razão trigonométrica do cosseno ao triângulo retângulo [OTB]:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\overline{OT}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{2}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \overline{OB}=\frac{2}{\sin\alpha}$$

A área do triângulo [ABC] é igual a:

$$A_{[ABC]}=\frac{base\times altura}{2}=\frac{2\overline{OA}\times\overline{OB}}{2}=\frac{2\times\frac{2}{\cos\alpha}\times\frac{2}{\sin\alpha}}{2}=\frac{8}{2\times\cos\alpha\times\sin\alpha}=\frac{8}{\sin 2\alpha}$$

16. A função f está definida, em $\mathbb{R}^+$, por $f(x)=\frac{k}{x}$, ou seja, é uma função de proporcionalidade inversa e o seu gráfico é uma hiperbole.

Sejam P e Q dois pontos com a mesma abcissa pertencentes ao gráfico de f e g, respetivamente.

As coordenadas destes dois pontos são da forma:

$$P\left(a,\frac{k}{a}\right) \quad \text{e} \quad Q\left(a,-\frac{k}{a}\right)$$

Vamos determinar a equação da reta s.

A expressão da primeira derivada da função f é $f'(x)=\left(\frac{k}{x}\right)'=-\frac{k}{x^2}$.

Calculando o valor da derivada de f no ponto de abcissa a obtemos o declive da reta s:

$$f'(a)=-\frac{k}{a^2}$$

A equação da reta s, tangente à função f, no ponto de abcissa a é da forma:

$$\text{s: } y=-\frac{k}{a^2}x+b$$

Como o ponto P pertence à reta s, basta substituir as coordenadas deste ponto na equação da reta para calcularmos a constante b:

$$y=-\frac{k}{a^2}x+b \Leftrightarrow \frac{k}{a}=-\frac{k}{a^2}\times a+b \Leftrightarrow b=\frac{2k}{a}$$

Logo s: $y = -\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a}$

Agora vamos determinar a equação da reta t.

A expressão da primeira derivada da função g é $g'(x) = \left(\frac{k}{x}\right)' = \frac{k}{x^2}$

Calculando o valor da derivada de g no ponto de abcissa a obtemos o declive da reta t:

$$g'(a) = \frac{k}{a^2}$$

A equação da reta t, tangente à função g, no ponto de abcissa a é da forma:

$$\text{t: } y = \frac{k}{a^2}x + b$$

Como o ponto Q pertence à reta t, basta substituir as coordenadas deste ponto na equação da reta para calcularmos a constante b:

$$y = \frac{k}{a^2}x + b \Leftrightarrow -\frac{k}{a} = \frac{k}{a^2} \times a + b \Leftrightarrow b = -\frac{2k}{a}$$

Logo t: $y = \frac{k}{a^2}x - \frac{2k}{a}$

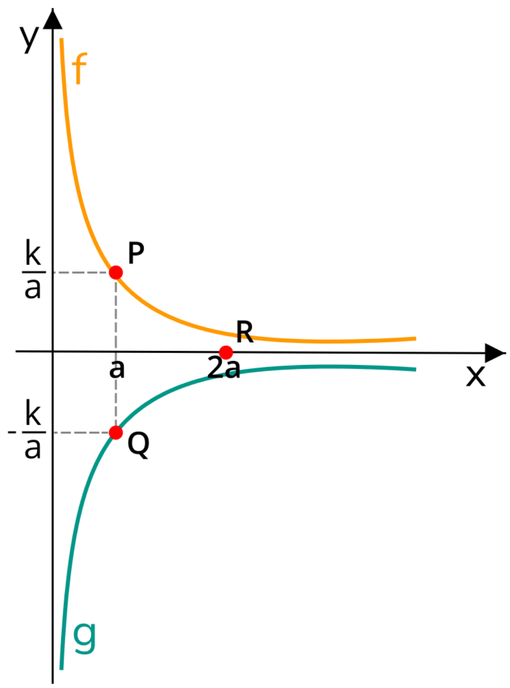
Como o ponto R é o ponto de intersecção das retas s e t, vamos igualar as duas retas para determinar a abcissa de R:

$$-\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a} = \frac{k}{a^2}x - \frac{2k}{a} \Leftrightarrow \frac{2k}{a^2}x = \frac{4k}{a} \Leftrightarrow x = 2a$$

A ordenada do ponto R é igual a $y_R = -\frac{k}{a^2} \times 2a + \frac{2k}{a} = 0$

As coordenadas do ponto R são da forma $R(2a, 0)$.

Representando graficamente as funções f e g e os pontos P, Q e R:



Calculando a área do triângulo [PQR]:

$$A_{[PQR]} = \frac{base \times altura}{2} = \frac{\overline{PQ} \times (x_R - x_P)}{2} = \frac{\frac{2k}{a} \times a}{2} = \frac{2k}{2} = k$$