**Proposta de Resolução da Prova Final de Matemática**

**Prova 92 | 1ª Fase | 3º Ciclo do Ensino Básico | 2018**

**Caderno 1**

1. Organizando os dados numa lista ordenada temos:

$$18 \quad 85 \quad 166 \quad 189 \quad 203 \quad 654$$

A mediana deste conjunto de dados é a média do número de veículos totalmente elétricos vendidos em Portugal da terceira e quarta posição:

$$\tilde{x} = \frac{166+189}{2} = 177,5$$

**Opção(A)**

2. Vamos calcular o módulo da diferença entre $\sqrt{7}$ e 3 arredondada às centésimas:

$$|\sqrt{7} - 3| \approx 0,35 = r$$

Logo, $0,3 < r < 0,4$

**Opção(C)**

3. Número de veículos novos vendidos em 2016 = 87 milhões

Vamos determinar o número veículos novos vendidos em 2016 não eléctricos,ou seja, 99 % de 87 milhões:

$$\frac{87}{x} = \frac{100\%}{99\%} \Leftrightarrow x = \frac{87 \times 99\%}{100\%} \Leftrightarrow x = 86,13 \text{ milhões}$$

Agora basta escrever em notação científica:

$86,13$ milhões $= 86\ 130\ 000 = 8,613 \times 10^7$ veículos novos vendidos em 2016 não eléctricos

4. Vamos seguir a sugestão e começar por determinar $\overline{AE}$.

O triângulo [ADE] é retângulo em E, usando a definição de cosseno vem que:

$\cos(D\hat{A}E) = \frac{c.adjacente}{hipotenusa} \Leftrightarrow \cos(32) = \frac{\overline{AE}}{0{,}90} \Leftrightarrow \overline{AE} = \cos(32) \times 0,90 \Leftrightarrow \overline{AE} \approx 0,848 \times 0,90 \Leftrightarrow \overline{AE} \approx 0,763$ m

De acordo com a figura temos:

$$\overline{FE} = \overline{FA} - \overline{AE} \approx 1,05 - 0,763 \approx 0,29 \text{ m}$$

5.

5.1. A intersecção dos planos $[SXWV]$ e $[SXYT]$ é a reta SX.

5.2. Como o triângulo $[UVS]$ é retângulo em V podemos aplicar o Teorema de Pitágoras:

$(\overline{US})^2 = (\overline{SV})^2 + (\overline{VU})^2 \Leftrightarrow (\overline{US})^2 = (15)^2 + (7)^2 \Leftrightarrow (\overline{US})^2 = 274 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overline{US} = \sqrt{274} \Leftrightarrow \overline{US} \approx 16,6$ cm $\quad (\overline{US} > 0)$

5.3. $V_{Prisma} = A_{base} \times altura \Leftrightarrow V_{[STUVWXYZ]} = A_{[UTSV]} \times \overline{SX} \Leftrightarrow 1250 = A_{[UTSV]} \times 15 \Leftrightarrow A_{[UTSV]} = \frac{1250}{15} \Leftrightarrow A_{[UTSV]} = \frac{1250}{15}$

Como a base [UVST] do prisma é um trapézio temos que:

$A_{[UTSV]} = \frac{1250}{15} \Leftrightarrow \frac{\overline{VS}+\overline{UT}}{2} \times \overline{UV} = \frac{1250}{15} \Leftrightarrow \frac{15+\overline{UT}}{2} \times 7 = \frac{1250}{15} \Leftrightarrow 15+\overline{UT} = \frac{1250\times2}{15\times7}$
$\Leftrightarrow \overline{UT} = \frac{1250\times2}{15\times7} - 15 \Leftrightarrow \overline{UT} \approx 8,8$ cm

6. De modo que $]-\infty,\sqrt{n}[\, \cup \,]41,+\infty[= \mathbb{R}$, temos que ter $\sqrt{n} > 41$.

Vamos determinar quando é que se tem $\sqrt{n} = 41$:

$$\sqrt{n} = 41 \Rightarrow \sqrt{41^2} = 41 \Rightarrow n = 41^2 \Rightarrow n = 1681$$

Então $\sqrt{n} > 41$ quando $n > 1681$, isto é, n=1682.

**Caderno 2**

7.

7.1. Usando a Regra de Laplace e sabendo que dos 6 grupos o Daniel está em apenas um deles, a probabilidade do grupo do Daniel ser selecionado é:

$$P(\text{"Grupo do Daniel ser selecionado"}) = \frac{n^{o}\ de\ casos\ favoráveis}{n^{o}\ de\ casos\ \ possíveis} = \frac{1}{6}$$

7.2. Vamos começar por construir uma tabela de dupla entrada:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | 1 e 2 | 1 e 3 | 1 e 4 | 1 e 5 |
| 2 | 2 e 1 | - | 2 e 3 | 2 e 4 | 2 e 5 |
| 3 | 3 e 1 | 3 e 2 | - | 3 e 4 | 3 e 5 |
| 4 | 4 e 1 | 4 e 2 | 4 e 3 | - | 4 e 5 |
| 5 | 5 e 1 | 5 e 2 | 5 e 3 | 5 e 4 | - |

Deste modo conseguimos perceber todas as hipóteses possíveis.

nº de casos favoráveis = nº de entradas da tabela que consta o grupo com o número 1 = 8

nº de casos possíveis = nº total de entradas da tabela menos as entradas da diagonal = 25 - 5=20

$P(\text{"Grupo com o número 1 ser um dos grupos selecionados"}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

8. Observando a sequência sabemos que:

- O número total de segmentos de reta do termo de ordem 1 da sucessão é 11
- O número total de segmentos de reta do termo de ordem 2 da sucessão é 17

**Opção(D)**

9. Como os pontos $(-4, 6)$ e $(2, 3)$ pertencem à reta $r$, conseguimos determinar o seu declive, ou seja, a constante $a$:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow a = \frac{6-3}{-4-2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{-6} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Agora vamos calcular a ordenada na origem da reta $r$, a constante $b$:

$$y = -\frac{1}{2}x + b \Leftrightarrow 3 = -\frac{1}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow 3 = -1 + b \Leftrightarrow b = 4$$

Assim, uma equação da reta $r$ é:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

10. Desenvolvendo o caso notável temos:

$$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

**Opção(A)**

11. $15x^2 - 2x - 1 = 0$

$a = 15 \qquad b = -2 \qquad c = -1$

Usando a fórmula resolvente temos:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 15 \times (-1)}}{2 \times 15} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{30} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{30} \Leftrightarrow$
$x = \frac{2+8}{30} \vee x = \frac{2-8}{30} \Leftrightarrow x = \frac{10}{30} \vee x = \frac{-6}{30} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = -\frac{1}{5}$

C.S.$= \{-\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\}$

12. $\frac{2(1-x)}{3} < \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow \frac{2-2x}{3} < \frac{x}{2} + 2 \Leftrightarrow 4 - 4x < 3x + 12 \Leftrightarrow -4x - 3x < 12 - 4 \Leftrightarrow$
$-7x < 8 \Leftrightarrow x > -\frac{8}{7}$

C.S.$= ]-\frac{8}{7}, +\infty[$

13. Vamos começar por determinar a ordenada do ponto $P$:

$$f(3) = \frac{4}{3} \times 3^2 = \frac{4}{3} \times 9 = \frac{36}{3} = 12$$

O ponto $P$ tem coordenadas (3,12).

Como o ponto $P$ pertence à função $g$, substituindo na sua expressão algébrica obtemos constante a:

$$g(x) = \frac{a}{x} \Leftrightarrow 12 = \frac{a}{3} \Leftrightarrow a = 12 \times 3 \Leftrightarrow a = 36$$

14. Recorrendo às regras operatórias de potências temos:

$$\frac{(4^5)^2}{4^{15}} \times 2^{-5} = \frac{4^{5\times 2}}{4^{15}} \times 2^{-5} = \frac{4^{10}}{4^{15}} \times 2^{-5} = 4^{10-15} \times 2^{-5} = 4^{-5} \times 2^{-5} = (4 \times 2)^{-5} = 8^{-5} = (\frac{1}{8})^5$$

15. Seja $x$ o número de alunos do 2º ciclo e $y$ número de alunos do 3º ciclo que participaram na visita de estudo.

O número de alunos do 2º ciclo foi o triplo do número de alunos do 3º ciclo, o que corresponde à equação:

$$x = 3y$$

Cada aluno do 2º ciclo pagou um bilhete de 9 euros, e cada aluno do 3º ciclo pagou um bilhete de 12 euros, tendo os bilhetes custado 507 euros no total o que equivale à equação:

$$9x + 12y = 507$$

Assim, um sistema de equações que permita determinar o número de alunos do 2º ciclo e o número de alunos do 3º ciclo que participaram na visita de estudo pode ser:

$$\begin{cases} x = 3y \\ 9x + 12y = 507 \end{cases}$$

16. De acordo com a figura, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

**Opção(D)**

17. O ângulo $B\hat{E}C$ é um ângulo com vértice no interior da semicircunferência, ou seja, a sua amplitude é igual a metade da soma das amplitudes dos seus arcos correspondentes:

$$B\hat{E}C = \frac{(\widehat{AD}+\widehat{BC})+\widehat{BC}}{2} \Leftrightarrow 72 = \frac{56+2\widehat{BC}}{2} \Leftrightarrow 2\widehat{BC} = 2 \times 72 - 56 \Leftrightarrow 2\widehat{BC} = 88$$
$$\Leftrightarrow \widehat{BC} = \frac{88}{2} \Leftrightarrow \widehat{BC} = 44^o$$

O ângulo $B\hat{O}E$ é o ângulo ao centro relativo a $\overset{\frown}{BC}$, logo vem que:

$$B\hat{O}E = \overset{\frown}{BC} = 44^o$$

18. Os triângulos [ABI] e [CDI] são semelhantes porque têm um ângulo igual $B\hat{I}A = C\hat{I}D$ (ângulos opostos) e os lados opostos a cada um dos dois ângulos ( $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$) são paralelos.

    Logo os seus lados são proporcionais:

    $$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IC}}$$

    **Opção(C)**