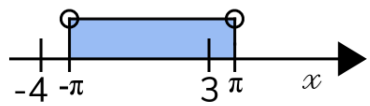
Proposta de Resolução da Prova Final de Matemática

Prova 92 | 2ª Fase | 3º Ciclo do Ensino Básico | 2023

1. Vamos representar o intervalo na reta real:



Opção(C)

2. Valor das exportações de bens desportivos no ano de 2020 $= 428,4$ milhões $= 428400000$

Vamos determinar o valor das exportações de bens desportivos estimado para o ano de 2021 face a 2020, ou seja, 25 % de 428400000:

$$0,25 \times 428400000 = 107100000$$

O valor das exportações de bens desportivos, em euros, estimado para o ano de 2021 é igual a:

$$428400000 + 107100000 = 535500000$$

Agora basta escrever em notação científica:

$535500000 = 5,355 \times 10^8$

3. As frações $\frac{17}{23}$ e $\frac{21}{17}$ são frações de números inteiros por isso são dízimas finitas ou dízimas infinitas periódicas.

$\sqrt{121} = 11$ logo é um número inteiro.

Opção(D)

4. Usando a Regra de Laplace e sabendo que se vai selecionar, ao acaso, um aluno do agrupamento de escolas, a probabilidade de esse aluno estar inscrito no Desporto Escolar é:

P("o aluno escolhido está inscrito no Desporto Escolar")$= \frac{n\ de\ casos\ favoráveis}{n\ de\ casos\ \ possíveis} = \frac{615}{1350} =$

$= \frac{123}{270} = \frac{41}{90}$

Opção(B)

5. O número de sócios que praticam apenas basquetebol é igual a:

$$145 - 40 - 85 = 20$$

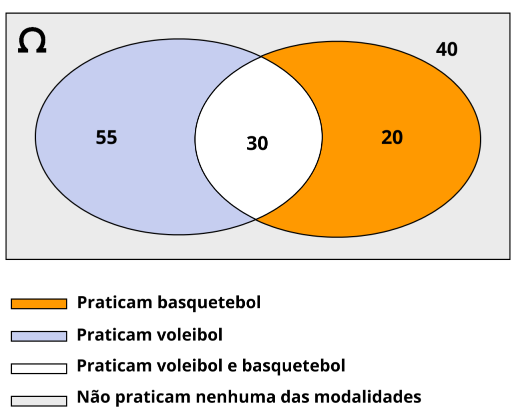
O número de sócios que praticam apenas voleibol é igual a:

$$145 - 40 - 50 = 55$$

O número de sócios que praticam as duas modalidades é igual a:

$$145 - 40 - 20 - 55 = 30$$

Vamos organizar os dados num diagrama de Venn:



Usando a Regra de Laplace, a probabilidade de o sócio selecionado praticar basquetebol e voleibol é:

P("o sócio selecionado praticar basquetebol e voleibol")$= \frac{nr\ de\ casos\ favoráveis}{nr\ de\ casos\ \ possíveis} = \frac{30}{145} =$

$= \frac{6}{29}$

6. Pelo critério AA os triângulos $[HIE]$ e $[ABC]$ são semelhantes:

   - $B\hat{A}C = I\hat{H}E$, porque AB//CG e AC//HE;
   - $A\hat{B}C = H\hat{I}E$, pois AB//CG e BD//IE.

   A área do triângulo $[ABC]$ é igual a:

   $$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC}\times\overline{AB}}{2} = \frac{16\times 12}{2} = 96$$

   Como os triângulos $[ABC]$ e $[HIE]$ são semelhantes sabemos que:

   $\frac{A_{[ABC]}}{A_{[HIE]}} = r^2$, sendo r a razão de semelhança entre os triângulos $[HIE]$ e $[ABC]$.

   Daqui conseguimos determinar a constante r:

   $\frac{96}{24} = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 4 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow r = 2, \quad r > 0$

   Sabendo a razão de semelhança r, podemos determinar $\overline{IE}$:

   $\overline{IE} = \frac{\overline{BC}}{r} = \frac{16}{2} = 8$

   Pela observação da figura temos que:

   $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{IE} = 16 + 8 = 24$

7. Pela observação da figura sabemos que $A\hat{O}B$ é o ângulo ao centro relativo ao arco AB, logo $\overset{\frown}{AB} = A\hat{O}B = 50^o$

   Como os arcos BC e CA são iguais então $\overset{\frown}{AB} = \frac{50}{2} = 25^o$

   $D\hat{C}E$ é o ângulo inscrito relativo ao arco DE, por isso vem que:

   $$D\hat{C}E = \frac{\overset{\frown}{DE}}{2} \Leftrightarrow 70 = \frac{\overset{\frown}{DE}}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{DE} = 140^o$$

Sabendo que $\overline{CD} = \overline{CE}$ vem que $C\hat{D}E = C\hat{E}D = \frac{180-70}{2} = 55^o$

$C\hat{D}E$ é o ângulo inscrito relativo ao arco EC, por isso vem que:

$$C\hat{D}E = \frac{\overset{\frown}{EC}}{2} \Leftrightarrow 55 = \frac{\overset{\frown}{EC}}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{EC} = 110^o$$

A amplitude, em graus, do arco BD é igual a:

$$\overset{\frown}{BD} = 360 - \overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{EC} - \overset{\frown}{CB} = 360 - 140 - 110 - 25 = 85^o$$

8. Usando a fórmula da área do triângulo conseguimos calcular a ordenada do ponto A:

$$A_{[OAB]} = \frac{base \times altura}{2} \Leftrightarrow 96 = \frac{\overline{AB} \times y_A}{2} \Leftrightarrow 96 = \frac{8 \times y_A}{2} \Leftrightarrow y_A = \frac{2 \times 96}{8} \Leftrightarrow y_A = 24$$

O ponto A tem coordenadas $(-4, 24)$.

Como o ponto A pertence à função f, sustituindo as coordenadas do ponto A na expressão algébrica da função f podemos determinar a constante a:

$$f(x) = ax^2 \Leftrightarrow 24 = a \times (-4)^2 \Leftrightarrow a = \frac{24}{16} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Opção(B)

9. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, usando o teorema de pitágoras vem que:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \;\Leftrightarrow\; \overline{AC}^2 = 7,5^2 + 6^2 \;\Leftrightarrow\; \overline{AC}^2 = 92,25 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \overline{AC} = \pm\sqrt{92,25} \;\Leftrightarrow\; \overline{AC} \approx 9,6$ cm $\quad (\overline{AC} > 0)$

10. Desenvolvendo o caso notável temos:

$$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

Opção(B)

11. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, usando a definição de tangente vem que:

$\tan(B\hat{A}C) = \frac{c.oposto}{c.adjacente} \Leftrightarrow \tan(B\hat{A}C) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \tan(B\hat{A}C) = \frac{432}{565} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B\hat{A}C = \tan^{-1}\left(\frac{432}{565}\right) \Leftrightarrow B\hat{A}C \approx 37\ ^o$

12. Vamos calcular o volume de água que se encontra no recipiente parcialmente cheio:

$$V = A_b \times h = \pi \times raio^2 \times altura = 3,14159 \times \left(\frac{2,5}{2}\right)^2 \times 3 \approx 14,726 \text{ dm}^3$$

O recipiente tem, aproximadamente, 14,726 litros de água.

O número máximo de copos, iguais aos disponibilizados no dispensador, que é possível encher totalmente com a água que se encontra, nesse instante, no recipiente é igual a:

$$\frac{14{,}726}{0{,}2} \approx 73 \text{ copos}$$

13. A expressão geradora da sequência dos quadrados brancos é igual a:

$$n^2 - n$$

Vamos calcular a ordem do termo desta sequência que tem exatamente 552 quadrados brancos:

$n^2 - n = 552 \Leftrightarrow n^2 - n - 552 = 0$

$a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = -552$

Usando a fórmula resolvente temos:

$n = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-552)}}{2\times1} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm\sqrt{1+2208}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm\sqrt{2209}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \frac{1+47}{2} \vee n = \frac{1-47}{2} \Leftrightarrow n = \frac{48}{2} \vee n = -\frac{46}{2} \Leftrightarrow n = 24 \vee n = -23$

Como $n \in \mathbb{N}$, $\quad n = 24$.

O termo desta sequência que tem 552 quadrados brancos tem ordem 24.

A expressão geradora da sequência dos quadrados cinzentos é igual a n.

Concluímos que o termo que tem exatamente 552 quadrados brancos (termos de ordem 24) tem 24 quadrados cinzentos.

14. $2(3-x) < \frac{3x+4}{3} \Leftrightarrow 6-2x < \frac{3x+4}{3} \Leftrightarrow 18-6x < 3x+4 \Leftrightarrow -6x-3x < 4-18 \Leftrightarrow$

    $\Leftrightarrow -9x < -14 \Leftrightarrow x > \frac{14}{9}$

    C.S.$= \left]\frac{14}{9}, +\infty\right[$

15. Resolvendo as equações:

    $x^2-4=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=2 \ \vee \ x=-2$

    $x^2+4=0 \Leftrightarrow x^2=-4 \quad$ (Equação impossível)

    $(x+4)^2=0 \Leftrightarrow x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$

		(A) $\{\}$	(B) $\{2\}$	(C) $\{-2,2\}$	(D) $\{-4\}$	(E) $\{-4,4\}$
(1)	$x^2-4=0$			X		
(2)	$x^2+4=0$	X				
(3)	$(x+4)^2=0$				X	

16. O ponto A tem coordenadas $(4, y_a)$, substituindo estas coordenadas na expressão algébrica da função g conseguimos determinar a ordenada do ponto A:

    $$y_a = \frac{16}{4} \Leftrightarrow y_a = 4$$

    Como os pontos $(4,4)$ e $(-2,0)$ pertencem ao gráfico da função f, que é uma reta, conseguimos determinar o seu declive, ou seja, a constante a:

    $$a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \ \Leftrightarrow \ a = \frac{4-0}{4-(-2)} \ \Leftrightarrow \ a = \frac{4}{6} \ \Leftrightarrow \ a = \frac{2}{3}$$

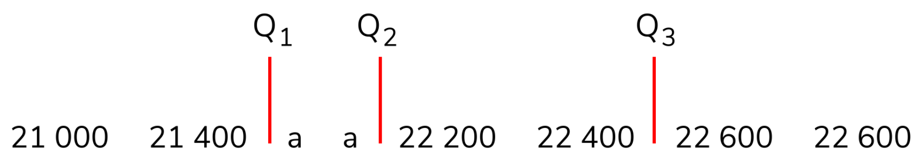
Agora vamos calcular a ordenada na origem do gráfico da função f, a constante b:

$$y = \frac{2}{3}x + b \;\Leftrightarrow\; 0 = \frac{2}{3} \times (-2) + b \;\Leftrightarrow\; 0 = -\frac{4}{3} + b \;\Leftrightarrow\; b = \frac{4}{3}$$

Assim, uma expressão algébrica que defina a função f é:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

17. Vamos começar por ordenar os dados por ordem crescente:



Observando a figura acima concluímos que a mediana (2º quartil) é igual à média aritmética entre os números a e 22 200:

$$Q_2 = \frac{a+22200}{2} \Leftrightarrow 22000 = \frac{a+22200}{2} \Leftrightarrow 44000 = a + 22200 \Leftrightarrow a = 21800$$

18. Segundo os dados da tabela o valor das exportações, em milhares de euros, do calçado de desporto é superior ao do vestuário de desporto. O contrário se verifica no gráfico A logo o gráfico A não representa os dados da tabela.

O valor das exportações total é igual a $84602 + 308051 + 35596 + 34341 = 462590$ sendo este valor 100% dos valores das exportações de alguns bens desportivos, em milhares de euros, em 2021, em Portugal..

Usando os dados da tabela vamos calcular, em percentagem, o valor das exportações de barcos e equipamentos de desportos aquáticos:

$$\frac{84602 \times 100}{462590} \approx 18,3\%$$

Segundo o gráfico B o valor, em percentagem, correspondente ao valor das exportações de barcos e equipamentos de desportos aquáticos está entre 30% e 40%, por isso, o gráfico B também não representa os dados da tabela.