Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2023

1. A sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ é monótona decrescente.

   Opção(D)

2. Seja p_n a sucessão dos perímetros, em cm, da sequência das 25 semicircunferências.

   Para $n = 1$, $p_1 = \pi$

   Para $n = 2$, $p_2 = 2\pi$

   Para $n = 3$, $p_3 = 4\pi$
   ...

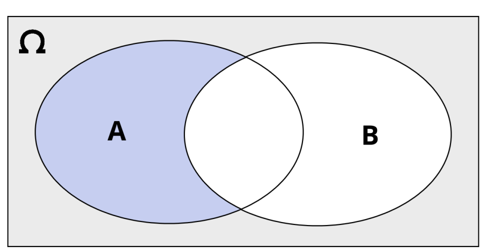
   A sucessão p_n é uma progressão geométrica de razão igual a 2.

   Usando a fórmula da soma dos 25 primeiros termos de uma progressão geométrica vem que:

   $S_{25} = p_1 \times \frac{1-r^{25}}{1-r} = \pi \times \frac{1-2^{25}}{1-2} = 105414353,9 \text{ cm} = 1054,143539 \text{ km}$

   O comprimento total da linha obtida com esta composição geométrica em quilómetros, arredondado às unidades, é igual a 1054 km.

3. Através do diagrama de Venn sabemos que:



   $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,5 = P(A) - P(A \cap B)$

Aplicando a fórmula do teorema da probabilidade:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,8 = 0,5 + P(B) \Leftrightarrow P(B) = 0,3$

Opção(B)

4.

4.1. Para calcularmos o número de casos favoráveis vamos assumir que uma das linhas já está preenchida com 3 bombons de amêndoa, temos 3 possibilidades para isto acontecer visto que existem 3 linhas nesta caixa de bombons.

Depois de preenchida uma das linhas da caixa restam-nos 6 bombons (1 de amêndoa, 2 de avelã e 3 de noz) para colocar nos restantes 6 compartimentos da caixa.

Temos 6 hipóteses para colocar os 2 bombons de avelã (${}^6C_2$), em seguida ficamos com 4 hipóteses para colocar os 3 bombons de noz (${}^4C_3$) e resta-nos um compartimento para colocarmos o último bombon de amendoa (${}^1C_1$).

nº de casos favoráveis $= 3 \times {}^6C_2 \times {}^4C_3 \times {}^1C_1 = 180$

Temos 9 compartimentos para colocar os 4 bombons de amêndoa (${}^9C_4$), em seguida ficamos com 5 compartimentos para colocar os 2 bombons de avelã (${}^5C_2$) e resta-nos 3 compartimento para colocarmos os últimos 3 bombons de noz (${}^3C_3$).

nº de casos possíveis $= {}^9C_4 \times {}^5C_2 \times {}^3C_3 = 1260$

A probabilidade de uma das três linhas ficar preenchida com três bombons de amêndoa é igual a:

$$\text{P} = \frac{180}{1260} = \frac{1}{7}$$

4.2. Consideremos os acontecimentos:

A: «o primeiro bombom tem recheio de frutos secos»
B: «o segundo bombom tem recheio de frutos secos»
C: «o terceiro bombom tem recheio de caramelo»

No contexto da situação descrita, $P(C|A \cap \overline{B})$ é a probabilidade do terceiro bombom selecionado ter recheio de caramelo sabendo que já se selecionaram previamente dois bombons, sendo o primeiro com recheio de frutos secos e o segundo com recheio de caramelo.

O número de casos possíveis é igual ao número de bombons que sobram depois de retirados os dois primeiros bombons (sem reposição), portanto 31-2=29.

O número de casos favoráveis é igual ao número de bombons com recheio de caramelo sabendo que foram selecionados dois bombons, um de frutos secos e um com recheio de caramelo, ou seja, o número de bombons com recheio de caramelo é igual a 22-1=21.

Assim vem que:

$$P(C|A \cap \overline{B}) = \frac{21}{29}$$

5.

5.1. O plano perpendicular ao eixo Ox é da forma $x =$ constante.

Sabendo que o plano passa no ponto A de coordenadas ($2\sqrt{3}$,6,0), então tem equação igual a $x = 2\sqrt{3}$.

Opção(C)

5.2. Para sabermos a medida da base do triângulo $[OBA]$ vamos calcular $\overline{OA}$:

$$\overline{OA} = \sqrt{(2\sqrt{3}-0)^2 + (6-0)^2 + (0-0)^2} = 4\sqrt{3}$$

Vamos determinar a equação do plano mediador de $[OA]$:

$d(BO) = d(BA) \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-2\sqrt{3})^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x^2 - 4\sqrt{3}x + 12 + y^2 - 12y + 36 + z^2 \Leftrightarrow 4\sqrt{3}x + 12y - 48 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}x + 3y - 12 = 0$

As coordenadas genéricas de um ponto P pertencente à reta AB são:

$$\mathrm{P}(\sqrt{3}k, 16-5k, 0)$$

.
Como o ponto B pertence ao plano mediador de $[OA]$ (ponto de interseção do plano mediador de $[OA]$ com a reta AB), substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano mediador de $[OA]$ conseguimos calcular a constante k:

$\sqrt{3} \times \sqrt{3}k + 3(16-5k) - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 4 \times 3k + 48 - 15k - 12 = 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; -12k + 36 = 0 \;\Leftrightarrow\; k = \frac{36}{12} \;\Leftrightarrow\; k = 3$

Substituindo $k = 3$ nas coordenadas genéricas do ponto conseguimos saber as coordenadas do ponto B:

$$B(3\sqrt{3}, 1, 0)$$

O ponto médio do segmento de reta OA tem coordenadas $\left(\frac{2\sqrt{3}+0}{2}, \frac{6+0}{2}, 0\right)$, ou seja, $\mathrm{M}_{[OA]}\,(\sqrt{3}, 3, 0)$.

Para sabermos a medida da altura do triângulo $[OBA]$ vamos calcular $\overline{BM}$:

$$\overline{BM} = \sqrt{(3\sqrt{3}-\sqrt{3})^2 + (1-3)^2 + (0-0)^2} = 4$$

O volume do prisma é igual a:

$V_{[OABCDE]} = A_{[OAB]} \times altura = \frac{\overline{OA} \times \overline{BM}}{2} \times \overline{OD} = \frac{4\sqrt{3} \times 4}{2} \times 5 = 40\sqrt{3}$

6. Sabendo o valor de $\cos\alpha$, conseguimos determinar o valor de $\tan\alpha$ através da seguinte fórmula:

$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \Leftrightarrow \tan^2\alpha = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - 1 \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 8 \Leftrightarrow \tan\alpha = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \tan\alpha = \sqrt{8}, \quad \alpha \in 1^{\underline{o}}\mathrm{Q}$

Base do triângulo [ABC] $= \overline{AB} = \tan\alpha = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Seja C' o pé da perpendicular do ponto C sobre a reta AB.

Altura do triângulo [ABC] $= \overline{CC'} = \overline{OA} - \cos\alpha = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

A área do triângulo [ABC] é igual a:

$$A_{[ABC]} = \frac{base \times altura}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times \frac{2}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

7.

7.1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[\ln(2-e^{-x}) + x + 2)\right] = \ln 1 + 2 = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin(ax)}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin(ax)}{ax} \times \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{ax}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin(ax)}{ax} \times a \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{e^x-1} = (*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y = ax$ ($y \to 0^-$ quando $x \to 0^-$)

$(*_1) = \lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\sin(y)}{y} \times a \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x}} = a$ (Limite notável)

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe se e só se $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, concluímos que $a = 2$.

7.2. $m = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(2-e^{-x})+x+2}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(2-e^{-x})}{x} + \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x} + \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x} =$

$= \frac{\ln(2-e^{-\infty})}{+\infty} + 1 + 0 = 1$

$b = \lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[\ln(2-e^{-x}) + x + 2 - x\right] =$

$= \ln(2-e^{-\infty}) + 2 = \ln 2 + 2$

Concluímos que a reta definida por $y = x + \ln 2 + 2$ é assíntota oblíqua do gráfico de f quando $x \to +\infty$.

8. Usando as propriedades dos logarítmos:

$\log_a\left(\frac{b}{a}\right) = 2 \Leftrightarrow \log_a b - \log_a a = 2 \Leftrightarrow \log_a b - 1 = 2 \Leftrightarrow \log_a b = 3$

Calculando o valor pedido:

$\log_a(\sqrt{a^3}\times b^2) = \log_a \sqrt{a^3} + \log_a b^2 = \log_a a^{\frac{3}{2}} + 2\log_a b = \frac{3}{2}\log_a a + 2\log_a b = \frac{3}{2} + 2\times 3 =$

$= \frac{15}{2}$

Opção(B)

9.

9.1. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g:

$$g'(x) = (e^x \cos x)' = e^x \cos x + (-\sin x)e^x = e^x(\cos x - \sin x)$$

Os extremos de g correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0_{\ cond.impossível} \vee \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0, \ x = \frac{\pi}{4} \ \in [0, \pi[$

Para $k = -1, \ x = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} \notin [0, \pi[$

Para $k = 1, \ x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \ \notin [0, \pi[$

Logo, $g'(x)$ tem um zero em $x = \frac{\pi}{4}$.

$g'(0) = e^0(\cos 0 - \sin 0) = 1 > 0$

$g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função g vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π
$g'(x)$	1	$+$	0	-	n.d.
$g(x)$	Mínimo	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	n.d.

O gráfico de g é crescente no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right[$.

$g(0) = e^0 \cos 0 = 1$

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \cos \frac{\pi}{4} = e^{\frac{\pi}{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}$

A função g tem um máximo relativo igual a $\frac{e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}$ e um mínimo relativo igual a 1.

9.2. Se existe pelo menos um ponto do gráfico de g cuja ordenada é igual à abcissa, no intervalo, temos que:

$$\exists\, c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ tal que } g(c) = c$$

Seja $h(x) = g(x) - x = e^x \cos x - x$

Sabemos que h é uma função contínua em $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ pois resulta da diferença do produto de uma função exponencial com uma trigonométrica com uma função polinomial.

- $h(\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{\pi}{3}} \cos \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{e^{\frac{\pi}{3}}}{2} - \frac{\pi}{3} > 0$

- $h(\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0$

Como $h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 < h\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, pelo Teorema de Bolzano $\exists\, c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $h(c) = 0$.

Logo a equação $g(x) = x$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Assim, existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g cuja ordenada é igual à abcissa no intervalo $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$.

10. Vamos determinar o domínio em que é válida esta equação:

$e^x + e^{-x} \neq 0 \Leftrightarrow e^x + \frac{1}{e^x} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x)^2+1}{e^x} \neq 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 \neq -1$ condição universal

Logo a equação é válida em $\mathbb{R}$.

Resolvendo a equação:

$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3e^x - 3e^{-x} = e^x + e^{-x} \Leftrightarrow 2e^x - 4e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 2e^x - \frac{4}{e^x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2(e^x)^2-4}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2 - 4 = 0 \wedge e^x \neq 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 = 2 \wedge e^x \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x = -\sqrt{2}_{\,cond.impossível} \vee e^x = \sqrt{2} \wedge e^x \neq 0_{\,cond.universal} \Leftrightarrow x = \ln(\sqrt{2}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \ln 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{2}$

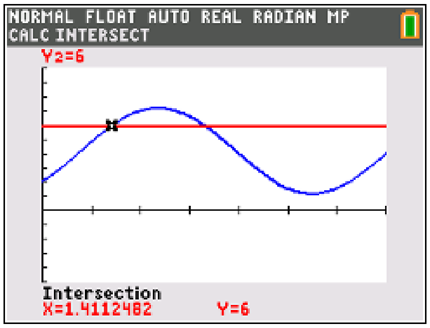
C.S$=\left\{\frac{\ln 2}{2}\right\}$

11. Observando a figura conseguimos perceber que o diâmetro da circunferência é igual à diferença das distâncias máxima e mínima do ponto P à reta r. O diâmetro da circunferência é igual a $3\sqrt{2} + 3 - (3\sqrt{2} - 3) = 6$.

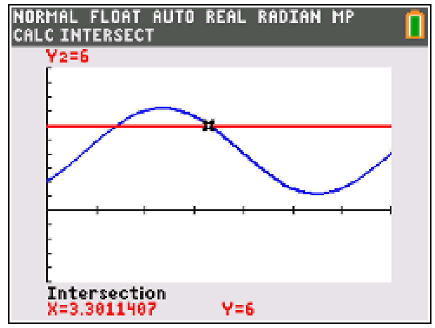
Durante o percurso, existem dois instantes t_1 e t_2, em que a distância do ponto P à reta r é igual ao diâmetro da circunferência, o que corresponde à equação:

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}(2 + \sin t - \cos t) = 6, \text{ com } t \in [0, 7]$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, conseguimos determinar os valores de t_1 e t_2:



$t_1 \approx 1,4$



$t_2 \approx 3,3$

Considerando que $t_1, t_2 \in [0, 7]$, os dois instantes em que a distância do ponto P à reta r é igual ao diâmetro da circunferência, arredondados às décimas, são $t_1 = 1,4$ segundos e $t_2 = 3,3$ segundos.

12. Escrevendo os números complexos z e $2i$ na forma trigonométrica:

$z = |z|e^{i\frac{\pi}{7}}$

$2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$2iz = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \times |z|e^{i\frac{\pi}{7}} = 2|z|e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)} = 2|z|e^{i\left(\frac{9\pi}{14}\right)}$

Concluímos que $arg(2iz) = \frac{9\pi}{14}$

Opção(B)

13. Vamos começar por escrever o número complexo z_2 na forma trigonométrica:

$$\begin{cases} tg\ \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} \\ \theta \in 3\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = \sqrt{3} \\ \theta \in 3\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow\ \theta = \frac{4\pi}{3}\ \text{ e }\ |-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{4} = 2$$

$z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Simplificando o número complexo w:

$$w = \frac{-5i+i^{23}}{(2e^{i\frac{4\pi}{3}})^n} = \frac{-5i-i}{2^n e^{i\frac{4\pi n}{3}}} = \frac{-6i}{2^n e^{i\frac{4\pi n}{3}}} = \frac{6e^{i\frac{3\pi}{2}}}{2^n e^{i\frac{4\pi n}{3}}} = \frac{6}{2^n}e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{4\pi n}{3}\right)}$$

Como w é um imaginário puro vem que:

$\frac{3\pi}{2} - \frac{4\pi n}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4\pi n}{3} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4\pi n}{3} = \pi - k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0,\ n = \frac{3}{4} \notin \mathbb{N}$

Para $k = -1,\ n = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$

Para $k = -2,\ n = \frac{9}{4} \notin \mathbb{N}$

Para $k = -3,\ n = \frac{12}{4} = 3 \in \mathbb{N}$

O menor número natural n para o qual o número complexo w é um imaginário puro é $n = 3$.

14. Consideremos os pontos A e B pertencentes à função h, que têm coordenadas:

$$\text{A } \left(x_A, ax_A^2\right) \qquad \text{B } \left(x_B, ax_B^2\right)$$

Calculando as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AB]$:

$$\text{M}_{[AB]}\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{ax_A^2+ax_B^2}{2}\right)$$

A expressão algébrica da primeira derivada da função h é igual a $h'(x) = 2ax$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função h no ponto de abcissa x_A é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$m_{t_A} = h'(x_A) = 2ax_A$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função h no ponto A é da forma:

$$t_A\colon\ y = 2ax_Ax + b_A$$

Substituindo as coordenadas do ponto A (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante b_A:

$y = 2ax_Ax + b_A \;\Leftrightarrow\; ax_A^2 = 2ax_A \times x_A \times b_A \;\Leftrightarrow\; b_A = ax_A^2 - 2ax_A^2 \;\Leftrightarrow b = -ax_A^2$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico da função h no ponto de abcissa x_A é:

$$t_A\colon\; y = 2ax_Ax - ax_A^2$$

Da mesma forma conseguimos determinar a equação da reta tangente ao gráfico da função h no ponto de abcissa x_B.

$m_{t_B} = h'(x_B) = 2ax_B$

A equação da reta tangente ao gráfico da função h no ponto B é da forma:

$$t_B\colon\; y = 2ax_Bx + b_B$$

Substituindo as coordenadas do ponto B (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante b_B:

$y = 2ax_Bx + b_B \;\Leftrightarrow\; ax_B^2 = 2ax_B \times x_B \times b_B \;\Leftrightarrow\; b_B = ax_B^2 - 2ax_B^2 \;\Leftrightarrow b = -ax_B^2$

$$t_B\colon\; y = 2ax_Bx - ax_B^2$$

Vamos determinar o ponto de intersecção das retas tangentes ao gráfico de h nos pontos A e B:

$2ax_Ax - ax_A^2 = 2ax_Bx - ax_B^2 \Leftrightarrow 2ax_Ax - 2ax_Bx = ax_A^2 - ax_B^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(2ax_A - 2ax_B) = a(x_A^2 - x_B^2) \Leftrightarrow x = \frac{a(x_A-x_B)(x_A+x_B)}{2a(x_A-x_B)} \Leftrightarrow x = \frac{x_A+x_B}{2}$

Concluímos que as retas tangentes ao gráfico de h nos pontos A e B intersetam-se na abcissa do ponto médio do segmento de reta $[AB]$, ou seja, este ponto pertence à reta vertical que contém o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.