REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2023

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Qual das expressões seguintes é termo geral de uma sucessão monótona?

(A) $(n-5)^2$ **(B)** $\dfrac{(-1)^n}{n+3}$ **(C)** $(-2)^n$ **(D)** $\dfrac{1}{n}$

2. Uma composição geométrica é constituída por uma sequência de 25 semicircunferências em que, à exceção da primeira, o raio de cada semicircunferência é o dobro do raio da semicircunferência anterior.

A Figura 1 representa parte dessa composição, em que c_1 , c_2 e c_3 são as três primeiras semicircunferências, com 1 cm , 2 cm e 4 cm de raio, respetivamente.

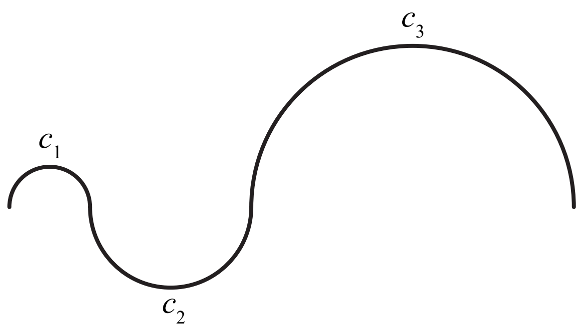

Figura 1

Determine o comprimento total da linha obtida com esta composição geométrica.

Apresente o resultado em quilómetros, arredondado às unidades.

3. Seja Ω o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A \cup B) = 0{,}8$;
- $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}5$.

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $0{,}2$ **(B)** $0{,}3$ **(C)** $0{,}5$ **(D)** $0{,}6$

4. O Rui tem nove bombons com recheio de frutos secos: quatro de amêndoa, dois de avelã e três de noz.

4.1. Numa caixa com nove compartimentos, numerados de 1 a 9, o Rui vai colocar, aleatoriamente, os nove bombons, um bombom em cada compartimento.

Os nove compartimentos estão dispostos em três linhas por três colunas, como se ilustra na Figura 2.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 2

Determine a probabilidade de uma das três linhas ficar preenchida com três bombons de amêndoa.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

* **4.2.** Aos nove bombons com recheio de frutos secos, juntam-se vinte e dois bombons com recheio de caramelo.

Selecionam-se, sucessivamente, ao acaso e sem reposição, três bombons.

Considere os acontecimentos:

A: «o primeiro bombom tem recheio de frutos secos»;

B: «o segundo bombom tem recheio de frutos secos»;

C: «o terceiro bombom tem recheio de caramelo».

Justifique, sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada, que o valor da probabilidade $P(C\,|\,(A \cap \overline{B}))$ é $\dfrac{21}{29}$.

Na sua resposta, tendo em conta o contexto descrito:

- interprete o significado de $P(C\,|\,(A \cap \overline{B}))$;
- explique o valor do numerador e o valor do denominador da fração apresentada.

5. Na Figura 3, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular reto $[OABCDE]$, de bases $[OAB]$ e $[CDE]$.

Sabe-se que:

- as coordenadas do ponto A são $(2\sqrt{3}, 6, 0)$;
- o ponto B pertence ao plano mediador do segmento de reta $[OA]$;
- a reta AB é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (0, 16, 0) + k(\sqrt{3}, -5, 0)$, $k \in \mathbb{R}$;
- o ponto D pertence ao eixo Oz e tem cota 5.

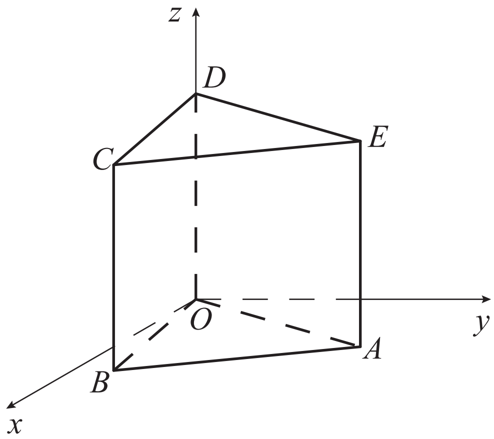

Figura 3

*** 5.1.** Qual das seguintes equações define o plano que passa no ponto A e é perpendicular ao eixo Ox?

(A) $z = 0$ **(B)** $y = 6$ **(C)** $x = 2\sqrt{3}$ **(D)** $x + y + z = 0$

*** 5.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine o volume do prisma $[OABCDE]$.

6. Na Figura 4, estão representados, em referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica, o triângulo $[ABC]$ e a reta de equação $x = 1$.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto B pertence à reta de equação $x = 1$;
- C é o ponto de intersecção da semirreta $\dot{O}B$ com a circunferência trigonométrica;
- $A\hat{O}B = \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Determine a área do triângulo $[ABC]$.

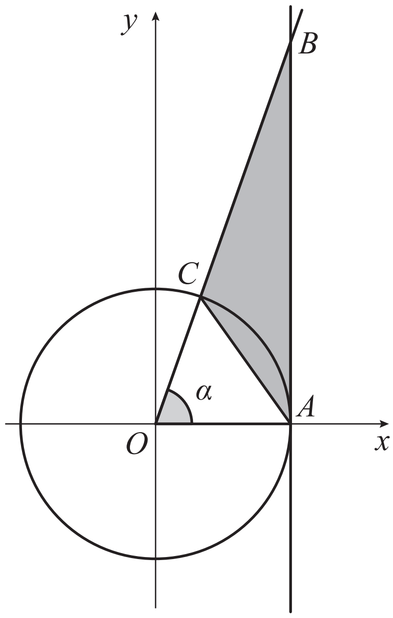

Figura 4

7. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida, para um certo $a \in \mathbb{R}^+$, por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\,(ax)}{e^x - 1} & \text{se } x < 0 \\ \ln(2 - e^{-x}) + x + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **7.1.** e **7.2.** sem recorrer à calculadora.

* **7.1.** Determine o valor de a para o qual existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

7.2. O gráfico de f admite uma assíntota oblíqua quando x tende para $+\infty$.

Determine uma equação dessa assíntota.

* **8.** Para certos valores de a e de b $(a > 1$ e $b > 1)$, tem-se $\log_a\left(\dfrac{b}{a}\right) = 2$.

Qual é o valor de $\log_a(\sqrt{a^3} \times b^2)$?

(A) $\dfrac{13}{2}$ **(B)** $\dfrac{15}{2}$ **(C)** $\dfrac{19}{2}$ **(D)** $\dfrac{21}{2}$

9. Considere a função g, de domínio $[0, \pi[$, definida por $g(x) = e^x \cos x$.

* **9.1.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine esses extremos, caso existam.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia da função g.

* **9.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos.

Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que existe, pelo menos, um ponto do gráfico de g cuja ordenada é igual à abcissa, no intervalo $\left]\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

10. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{3}$$

11. Na Figura 5, estão representados, em referencial o.n. Oxy :

- uma circunferência, de centro na origem;
- o ponto A , ponto de intersecção da circunferência com o semieixo positivo Ox ;
- a reta r , de equação reduzida $y = x - 6$.

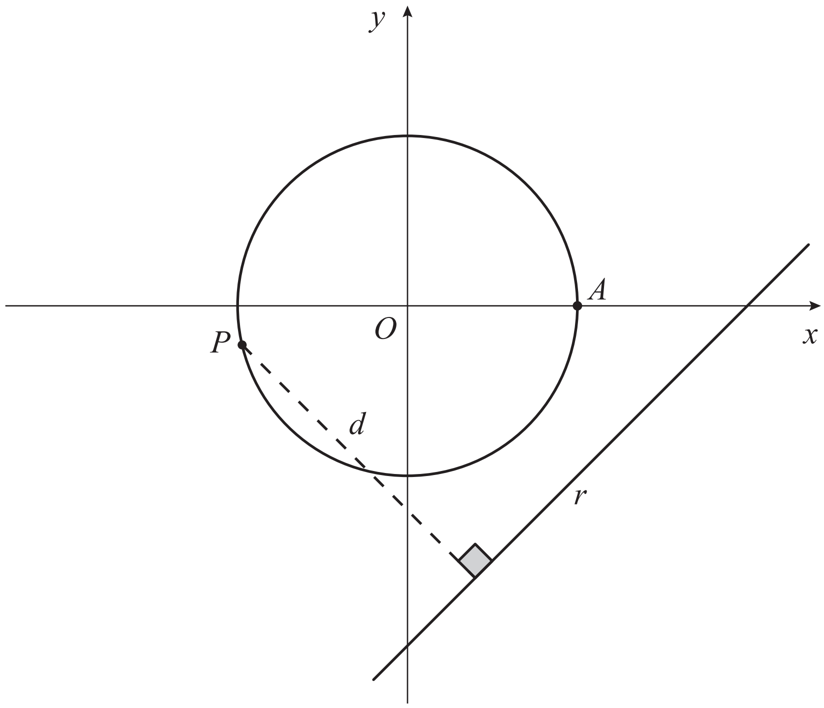

Figura 5

Considere que um ponto, P , partindo de A , se desloca sobre a circunferência, no sentido positivo, durante 7 segundos, percorrendo mais do que uma volta.

Nesse percurso, a distância, d , do ponto P à reta r , t segundos após o início do deslocamento, é dada por

$$d(t) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(2 + \operatorname{sen} t - \cos t) \text{ , com } t \in [0, 7]$$

Sabe-se que as distâncias máxima e mínima do ponto P à reta r são, respetivamente, $3\sqrt{2} + 3$ e $3\sqrt{2} - 3$.

Durante o percurso, existem dois instantes em que a distância do ponto P à reta r é igual ao diâmetro da circunferência.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, esses instantes.

Apresente os resultados em segundos, arredondados às décimas.

Não justifique a validade dos resultados obtidos.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale os pontos relevantes, que lhe permitem resolver a equação.

*** 12.** Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{7}$.

Qual dos seguintes valores é um argumento de $2iz$?

(A) $\frac{5\pi}{14}$ **(B)** $\frac{9\pi}{14}$ **(C)** $\frac{6\pi}{7}$ **(D)** $\frac{8\pi}{7}$

13. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, os números

$$z_1 = -5i \text{ e } z_2 = -1 - \sqrt{3}\,i$$

Determine o menor número natural n para o qual o número complexo $w = \frac{z_1 + i^{23}}{z_2^n}$ é um imaginário puro.

*** 14.** Considere uma função, h , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = ax^2$, com $a \neq 0$, e dois pontos, A e B, do seu gráfico.

Mostre que o ponto de intersecção das retas tangentes ao gráfico de h nos pontos A e B pertence à reta vertical que contém o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**3.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**7.1.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**11.**	**12.**	**14.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	12	14	12	14	14	12	14	14	14	12	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**		**4.1.**		**6.**		**7.2.**		**10.**		**13.**		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												**42**
TOTAL													**200**