

Resolução - Assíntotas e limites notáveis

1. Como $D_g =]1, +\infty[$, a única possível assíntota vertical do gráfico da função g , é a reta $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [5x - 3 \ln(x - 1)] = 5 - 3 \ln(0^+) = 5 - 3(-\infty) = +\infty$$

Concluimos que a reta definida $x = 1$ é assíntota vertical do gráfico de g .

A função g só está definida em $]1, +\infty[$, logo vamos averiguar a existência de uma única assíntota oblíqua quando $x \rightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 3 \ln(x-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[5 - 3 \frac{\ln(x-1)}{x} \right] = 5 - 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x} \quad (*_2)$$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1$ ($y \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$)

$$(*_2) = 5 - 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y+1} = 5 - 3 \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y+1}{\ln(y)}} = 5 - \frac{3}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{\ln(y)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(y)}} = 5 - \frac{3}{+\infty+0} = 5$$

(Limite notável)

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 5x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3 \ln(x - 1) = -3 \times +\infty = -\infty$$

Concluimos a função g não tem assíntotas oblíquas.

2022, 1ª fase

2. Como $D_h =]0, +\infty[$, a única possível assíntota vertical do gráfico da função h , é a reta $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + \ln x}{e^x - 1} = \frac{1 - \infty}{1^+ - 1} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Concluimos que a reta definida por $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de h .

A função h só está definida em $]0, +\infty[$, logo vamos averiguar a possível existência de uma assíntota horizontal quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \ln x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 + \frac{\ln x}{e^x}\right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}}{1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}}{1 - 0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 0 \times 0}{1} = 1 \end{aligned}$$

Concluimos que $h(x)$ tem uma assíntota horizontal de equação $y = 1$ quando $x \rightarrow +\infty$.

2022, 2ª fase

3. Vamos começar por determinar a equação da assíntota oblíqua ao gráfico de g quando x tende para $+\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x) - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} - 1 = \frac{\ln(1+e^{-\infty})}{-\infty} - 1 = \frac{\ln(1+0^+)}{-\infty} - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(1+e^x) - x + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^x) = \\ &= \ln(1+e^{-\infty}) = \ln(1+0^+) = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

Concluimos que a reta definida por $y = -x$ é assíntota oblíqua do gráfico de g quando $x \rightarrow -\infty$.

Vamos calcular a assíntota horizontal ao gráfico de g , quando x tende para $+\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x) - \ln e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{+\infty}} + 1\right) = \ln 1 = 0\end{aligned}$$

Concluimos que a reta definida por $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$.

2022, Época especial

4. A função h só está definida em $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$, logo vamos averiguar a existência de uma única assíntota oblíqua quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{2x^2 - \ln x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^3 - x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 \left(2 - \frac{\ln x}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - \frac{\ln x}{x^2}} = \\ &= \frac{1}{2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}} = \frac{1}{2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{1}{2 - 0 \times 0} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[h(x) - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{2x^2 - \ln x} - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - (2x^3 - x \ln x)}{4x^2 - 2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{4x^2 - 2 \ln x} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{2x^2 - \ln x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{\ln x}{x}\right)}{x^2 \left(2 - \frac{\ln x}{x^2}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}{2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}{2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{0}{2-0 \times 0} = \frac{1}{2} \times \frac{0}{2} = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

Concluimos que $h(x)$ tem uma assíntota oblíqua de equação $y = \frac{1}{2}x$ quando $x \rightarrow +\infty$.

2021, 1ª fase

5. Vamos verificar a existência de assíntotas horizontais do gráfico da função f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} \quad (*_1)$$

Fazendo a mudança de variável: $y = -x$ ($y \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow -\infty$)

$$(*_1) = 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{-y} = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty \text{ (Limite notável)}$$

Não existe assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x+1)^2}} - 3 = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{(x+1)^2}} - 3 =$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2}} - 3 = \sqrt{1} - 3 = -2$$

Concluimos que a reta $y = -2$ é assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

2021, 2ª fase

6. Vamos verificar a existência de assíntotas horizontais do gráfico da função f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-2}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-2}} = e^2 \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}} - \frac{1}{+\infty} = 0$$

$y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

2021, Época especial

7. A função f só está definida em $] -\infty, 2]$, logo vamos averiguar a existência de uma única assíntota oblíqua quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x} = \\ &= 1 + \frac{\ln(e^{-\infty} + 1)}{-\infty} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln(e^x + 1) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = \ln(e^{-\infty} + 1) = \\ &= \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

Concluimos que $f(x)$ tem uma assíntota oblíqua de equação $y = x$ quando $x \rightarrow -\infty$.

2020, 1ª fase

8. Vamos verificar a existência de assíntotas horizontais do gráfico da função h :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + xe^{x-1}) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{x-1} = (*_2)$$

Fazendo a mudança de variável: $y = -x$ ($y \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow -\infty$)

$$(*_2) = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} -ye^{-y-1} = 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} ye^{-y} \cdot e^{-1} = 1 - e^{-1} \lim_{y \rightarrow +\infty} ye^{-y} =$$

$$= 1 - \frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 1 - \frac{1}{e} \frac{1}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}} = 1 - \frac{1}{e} \times \frac{1}{+\infty} = 1 \quad (\text{Limite notável})$$

Concluimos que a reta $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de h quando $x \rightarrow -\infty$.

2020, 2ª fase

9. Como $D_f =]0, \frac{\pi}{2}[$, a função f não tem assíntotas horizontais nem oblíquas. As únicas possíveis assíntotas verticais do gráfico da função f , são as retas $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x}-1}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x}-1}{2x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\tan x} = (*_1)$$

Fazendo a mudança de variável: $y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$ ($y \rightarrow 0^+$ quando $x \rightarrow 0^+$)

$$(*_1) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y-1}{y} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = 1 \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \cos x =$$

$$= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}} \times 2 = \frac{1}{1} \times 2 = 2 \quad (\text{Limite notável})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{e^{2x} - 1}{\tan x} = \frac{e^{\frac{2\pi}{2}} - 1}{\tan \frac{\pi}{2}^-} = \frac{e^{\pi} - 1}{+\infty} = 0$$

Concluimos que o gráfico da função f não tem assíntotas verticais.

2020, Época especial

10. Atendendo ao domínio da função $h(x)$, sabemos que tem assíntotas oblíquas apenas quando $x \rightarrow +\infty$.

Calculando o declive da assíntota, temos que:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{-x}}{x} + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x^2} + 2 - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} + 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{e^{-\infty}}{(+\infty)^2} + 2 - \frac{1}{\sqrt{(+\infty)^3}} = 0 + 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

Opção(B)

2019, 1ª fase, caderno 2

11. Como $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, a única possível assíntota vertical do gráfico da função h , é a retas $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^+} = +\infty$$

Concluimos que a reta $x = 1$ é assíntota vertical do gráfico de h .

Vamos verificar a existência de assíntotas horizontais do gráfico da função h :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

Concluimos que a reta $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de h quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Concluimos que o gráfico da função h não tem assíntota horizontal quando $x \rightarrow +\infty$.

2019, 2ª fase, caderno 2

12. Vamos determinar a assíntota oblíqua da função g quando $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1-3x}{1-e^{-x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x}{x(1-e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-e^{-x}} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x}{x} = \frac{1}{1-e^{-\infty}} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x} = \\ &= 1 \times -3 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x}{1-e^{-x}} + 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x+3x(1-e^{-x})}{1-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x+3x-3xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3\frac{x}{e^x}}{1-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{3}{+\infty}}{1-e^{-\infty}} = \frac{1-3}{1-e^{-\infty}} = 1 \end{aligned}$$

A função g tem uma assíntota oblíqua de equação $y = -3x + 1$ quando $x \rightarrow +\infty$.

2019, Época especial, caderno 2

13. Como $D_f =]0, \pi[$, as únicas possíveis assíntotas verticais do gráfico da função f , são as retas $x = 0$ e $x = \pi$.

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1 \quad (\text{Limite notável})$$

Concluimos que a reta definida $x = 0$ não é assíntota vertical do gráfico de f .

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi^-}{\sin \pi^-} = \frac{\pi^-}{0^+} = +\infty$$

Concluimos que a reta definida $x = \pi$ é assíntota vertical do gráfico de f .

Opção(B)

2018, 1ª fase, caderno 2

14. Vamos verificar se existem assíntotas horizontais:

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{e^x}{1-x}\right) = 3 + \frac{e^{-\infty}}{1-(-\infty)} = 3 + \frac{0^+}{+\infty} = 3 + 0 = 3$$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, então a reta $y = 3$ é assíntota horizontal da função f quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)+2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{+\infty} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + 0 = 2 \times 0 + 0 = 0 \quad (\text{Limite notável}) \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, então a reta $y = 0$ é assíntota horizontal da função f quando $x \rightarrow +\infty$.

2018, 2ª fase, caderno 2

15. • A função h é contínua em $[-\frac{\pi}{3}, 0[$ pois resulta do quociente entre funções trigonométricas que são contínuas.

- Da alínea anterior resulta que a função h é contínua em $x = 0$.
- A função h é contínua em $[-\frac{\pi}{3}, +\infty[$ pois resulta do quociente entre uma função exponencial e uma polinomial que são contínuas.

Assim a função h é uma função contínua no seu domínio ($D_h = [-\frac{\pi}{3}, +\infty[$).

Vamos verificar se existem assíntotas não verticais:

A função h só está definida em $[-\frac{\pi}{3}, +\infty[$, logo só temos de averiguar a existência de uma única assíntota não vertical quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty \times \frac{1}{1 + \frac{1}{+\infty}} = +\infty \times 1 = +\infty \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$ concluímos que $h(x)$ não tem assíntotas não verticais.

2018, Época especial, caderno 2

16. A reta de equação $y = -x$ é assíntota oblíqua da função f de domínio \mathbb{R}^+ por isso vem que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

A reta de equação $y = -x$ também é assíntota oblíqua da função g de domínio \mathbb{R}^+ por isso vem que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

Assim temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \times g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1 \times -\infty = +\infty$$

Opção(A)

2017, 1ª fase, grupo I

17. As assíntotas paralelas aos eixos coordenados, se existirem, são assíntotas verticais ou horizontais.

Vamos verificar se existem assíntotas verticais:

$D_f = \mathbb{R}^+$, por isso a única possível assíntota vertical da função f é a reta de equação $x = 0$. A função f é contínua no seu domínio pois resulta de operações entre funções contínuas neste domínio.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 0^+}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ concluímos que $x = 0$ é assíntota vertical da função f .

Vamos verificar se existem assíntotas horizontais:

A função f só está definida em \mathbb{R}^+ , logo só temos de averiguar a existência de uma única assíntota horizontal quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad (\text{Limite notável})$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ concluímos que $y = 0$ é assíntota horizontal da função f .

2017, 2ª fase, grupo II

$$18. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)+e^x-x}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} + \frac{0}{-\infty} = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

Opção(D)

2016, 1ª fase, grupo I

19. $D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ e f é contínua no seu domínio pois resulta de operações entre funções contínuas neste domínio, por isso as duas únicas possíveis assíntotas verticais da função f são as retas de equação $x = -1$ e $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{-1^- - 1}{-1^- + 1}\right) = \ln\left(\frac{-2}{0^-}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{1^+ - 1}{1^+ + 1}\right) = \ln\left(\frac{0^+}{2}\right) = \ln 0^+ = -\infty$$

Como $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ concluímos que $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais da função f .

2016, 1ª fase, grupo II

20. $D_f =]-\frac{\pi}{2}, +\infty[$, logo só poderá existir uma assíntota oblíqua de equação $y = mx + b$ quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\blacktriangleright m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 1 - 0 = 1$$

(Limite notável)

$$\blacktriangleright b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x = -\infty$$

Como o valor de b não é finito então não existe assíntota oblíqua quando $\rightarrow +\infty$.

2016, 2ª fase, grupo II

21. Calculando o valor do limite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + x) - \ln(e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^x + x}{e^x}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^x}{e^x} \times \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) = \ln\left(1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{+\infty}\right) = \ln(1) = 0 \\ &\text{(Limite notável)} \end{aligned}$$

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua do gráfico da função f quando $x \rightarrow +\infty$.

2016, Época especial, grupo II

22. Vamos verificar se existem assíntotas verticais:

Como $x = \frac{1}{2}$ é um possível ponto de descontinuidade da função f , então $x = \frac{1}{2}$ é a única possível assíntota vertical da função f .

A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ pois os dois ramos da função resultam de operações entre funções contínuas neste domínio.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{\sqrt{e}}{2} \times \frac{\sqrt{e}(\frac{e^x}{\sqrt{e}} - 1)}{2(x - \frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{e}}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{e^{x - \frac{1}{2}} - 1}{x - \frac{1}{2}} = (*_1)$$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - \frac{1}{2}$ ($y \rightarrow 0^-$ quando $x \rightarrow \frac{1}{2}^-$)

$$(*_1) = \frac{\sqrt{e}}{2} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y} = \frac{\sqrt{e}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{e}}{2} \quad (\text{Limite notável})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (x + 1) \ln x = \left(\frac{1}{2} + 1\right) \ln \frac{1}{2} = \frac{3 \ln(2^{-1})}{2} = -\frac{3 \ln 2}{2}$$

Como $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) \neq \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) \neq \pm\infty$ concluímos que $x = \frac{1}{2}$ não é assíntota vertical da função f .

2015, 1ª fase, grupo II

23. Vamos verificar se existem assíntotas horizontais:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x - 3) - \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-3}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right) = \\ &= \ln\left(1 - \frac{3}{+\infty}\right) = \ln(1 - 0^+) = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, então a reta $y = 0$ é assíntota horizontal da função f quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + xe^x = (*_1)$$

Fazendo a mudança de variável: $y = -x$ ($y \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow -\infty$)

$$(*_1) = \lim_{y \rightarrow +\infty} 1 - ye^{-y} = 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1 \quad (\text{Limite notável})$$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, então a reta $y = 1$ é assíntota horizontal da função f quando $x \rightarrow -\infty$.

2015, 2ª fase, grupo II

24. $D_f = \mathbb{R}_0^+$, logo vamos verificar se existe assíntota horizontal quando $x \rightarrow +\infty$:

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times e^1 \times e^{-x} = e \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = e \times \frac{1}{+\infty} = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, então a reta $y = 0$ é assíntota horizontal da função f quando $x \rightarrow +\infty$.

2015, Época especial, grupo II