Proposta de Resolução da Prova Final de Matemática

Prova 92 | 1ª Fase | 3º Ciclo do Ensino Básico | 2023

1. Uma dízima infinita periódica pode ser representada por uma fração (de números inteiros) que pertence ao conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$.

   Opção(C)

2. Número de dormidas nos estabelecimentos de alojamento turístico, em Portugal, no ano de $2020 = 30,5$ milhões $= 30500000$

   Vamos determinar o número de dormidas a mais estimado para o ano de 2023 face a 2020, ou seja, 60 % de 30500000:

$$0,60 \times 30500000 = 18300000$$

   O número de dormidas estimado para o ano 2023 é igual a:

$$30500000 + 18300000 = 48800000$$

   Agora basta escrever em notação científica:

   $48800000 = 4,88 \times 10^7$

3.

   3.1. Usando a Regra de Laplace e sabendo que pretende-se selecionar, ao acaso, um dos seis amigos para ser o organizador das atividades náuticas, a probabilidade de a pessoa selecionada preferir fazer atividades em rios é:

   $P($"a pessoa escolhida preferir fazer atividades em rios"$)= \frac{nr\ de\ casos\ favoráveis}{nr\ de\ casos\ \ possíveis} =$
   $= \frac{6-4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

   Opção(B)

3.2. Vamos começar por construir uma tabela de dupla entrada:

	Surf	Bodyboard	Windsurf	Padlle	Mergulho	Canoagem
Surf	-					
Bodyboard	-	-				
Windsurf	-	-	-			
Padlle	-	-	-	-		
Mergulho	-	-	-	-	-	
Canoagem	-	-	-	-	-	-

Deste modo conseguimos perceber todas as hipóteses possíveis.

nº de casos favoráveis = nº de entradas da tabela que que tem um par constituído por duas atividades diferentes realizadas com prancha = 6

nº de casos possíveis = nº de entradas da tabela que que tem um par constituído por duas atividades diferentes = 15

P("As duas atividades sorteadas serem realizadas com prancha")= $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

4. Recorrendo à máquina de calcular sabemos que $\sqrt{50} \approx 7,071$ e $\sqrt{51} \approx 7,141$.

   O número que pertence ao intervalo $[\sqrt{50}, \sqrt{51}]$ é $7,14$.

   Opção(C)

5. Vamos calcular a área do triângulo [ABC]:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AM}}{2} = \frac{15 \times 12}{2} = 90$$

   Sabemos que os triângulos [AED] e [ABC] são semelhantes porque têm um ângulo comum e os segmentos de reta $\overline{ED}$ e $\overline{BC}$ são paralelos.

A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre essas figuras, ou seja:

$$\frac{A_{[ABC]}}{A_{[AED]}} = r^2 \Leftrightarrow \frac{90}{10} = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow r = \pm 3 \Leftrightarrow r = 3 \qquad (r > 0)$$

Através da razão de semelhança entre os triângulos [AED] e [ABC] podemos determinar o segmento de reta $\overline{AP}$:

$\overline{AM} = 3 \times \overline{AP} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{12}{3} \Leftrightarrow \overline{AP} = 4$

Pela observação da figura vem que:

$\overline{EF} = \overline{PM} = \overline{AM} - \overline{AP} = 12 - 4 = 8$

6. Cada termo da sequência dos quadrados brancos, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando 4 unidades ao termo anterior, logo a expressão geradora desta sequência é igual a $4n+?$.

   Quando $n = 1$, o primeiro termo da sequência dos quadrados brancos é igual a 8, desta forma conseguimos determinar o "?":

$$4 \times 1 + ? = 8 \Leftrightarrow ? = 4$$

   A expressão geradora desta sequência é igual à soma da expressão geradora da sequência dos quadrados cinzentos com a expressão geradora da sequência dos quadrados brancos:

$$n^2 + 4n + 4$$

   Vamos calcular a ordem do termo da sequência que é igual a 529:

   $n^2 + 4n + 4 = 529 \Leftrightarrow (n+2)^2 = 529 \Leftrightarrow n + 2 = \pm\sqrt{529} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow n + 2 = 23 \vee n + 2 = -23 \Leftrightarrow n = 21 \vee n = -25$

   Como n é um número natural $n = 21$, logo o termo desta sequência que tem 529 quadrados é o termo de ordem 21.

   O termo de ordem 21 tem $4 \times 21 + 4 = 88$ quadrados brancos.

7. Para que a equação $x^2 - 4x + c = 0$, com $a = 1$, $b = -4$ e $c \in \mathbb{R}$, ter duas soluções reais distintas temos de verificar:

   $b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow (-4)^2 - 4 \times 1 \times c > 0 \Leftrightarrow 16 - 4c > 0 \Leftrightarrow -4c > -16 \Leftrightarrow c < \frac{16}{4} \Leftrightarrow c < 4$

Opção(A)

8. Vamos começar por calcular o volume do paralelipípedo $[BCEFGHIJ]$:

$$V_{[BCEFGHIJ]} = A_{[GHIJ]} \times h = 25,8 \times 4 = 103,2 \text{ m}^3$$

O volume do prisma triangular $[ABCDEF]$, em metros cúbicos, é igual a:

$V_{[ABCDEF]} = V_{sólido} - V_{[BCEFGHIJ]} = 134,1 - 103,2 = 30,9 \text{ m}^3$

9. Pela observação da figura sabemos que a função f tem declive positivo e ordenada na origem igual a 2.

Opção(D)

10. Os ângulos $A\hat{C}B$ e $B\hat{C}D$ são suplementares, logo a soma das suas amplitudes é igual a 180^o:

$$A\hat{C}B = 180 - B\hat{C}D = 180 - 100 = 80^o$$

$A\hat{C}B$ é o ângulo inscrito relativo ao arco AB, por isso vem que:

$$A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Leftrightarrow 80 = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = 160^o$$

Calculando a amplitude, em graus, do arco BCA:

$$\overset{\frown}{BCA} = 360 - \overset{\frown}{AB} = 360 - 160 = 200^o$$

11.

11.1. Como o triângulo $[CMB]$ é retângulo em M podemos usar o teorema de pitágoras:

$\overline{BC}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{MB}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 1,8^2 + 1,1^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 4,45 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overline{BC} = \pm\sqrt{4,45} \Leftrightarrow \overline{BC} \approx 2 \text{ m} \quad (\overline{BC} > 0)$

11.2. O triângulo $[PMC]$ é retângulo em M, usando a definição de tangente vem que:

$\tan(C\hat{P}M) = \frac{c.oposto}{c.adjacente} \Leftrightarrow \tan(C\hat{P}M) = \frac{\overline{CM}}{\overline{PM}} \Leftrightarrow \tan(42) = \frac{1{,}8}{\overline{PM}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,9004 = \frac{1{,}8}{\overline{PM}} \Leftrightarrow \overline{PM} = \frac{1{,}8}{0{,}9004} \Leftrightarrow \overline{PM} \approx 1,9991$ m

Pela observação da figura sabemos que:

$$\overline{PB} = \overline{PM} - \overline{MB} = 1,9991 - 1,1 = 0,8991 \approx 0,9 \text{ m}$$

12. $\frac{3(1-x)}{4} \geq \frac{x}{3} + 1 \Leftrightarrow \frac{3-3x}{4} \geq \frac{x}{3} + 1 \Leftrightarrow 9 - 9x \geq 4x + 12 \Leftrightarrow -13x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{13}$

C.S.$= \left]-\infty, -\frac{3}{13}\right]$

13. O gráfico A não representa a função f porque quando $t = 0$ a distância, d , em quilómetros, a que o barco se encontra do local de partida é 1 quando devia ser 0.

O gráfico B não representa a função f porque quando o barco chega à ilha da Berlenga (em t=0,5), ele deveria ficar parado no cais, ou seja, a distância deveria ser 9km no intervalo de 0,5h até 3,5h. Mas o que vemos pelo gráfico B é que esta distância varia neste intervalo de tempo.

14. O ponto A pertence à função f por isso conseguimos determinar a sua ordenada:

$$f(2) = 3 \times 2^2 = 12$$

Assim, as coordenadas do ponto A são $(2, 12)$.

O ponto A também pertence à função g, substituindo as coordenadas deste ponto na expressão algébrica da função g conseguimos calcular a constante de proporcionalidade inversa a:

$$g(x) = \frac{a}{x} \Leftrightarrow 12 = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 12 \times 2 \Leftrightarrow a = 24$$

15. Usando a fórmula da média dos valores registados na tabela, vamos determinar o valor representado por k:

$$\frac{770+k+2900+1500+262+1000}{6} = 1122 \Leftrightarrow \frac{6432+k}{6} = 1122 \Leftrightarrow 6432 + k = 6732 \Leftrightarrow k = 300$$

16.

		Alentejo	Algarve	AML	Centro	Norte
(1)	Região onde o aumento do número de dormidas, em milhões, de 2020 para 2021, foi o mais elevado.			X		
(2)	Região onde o aumento do número de dormidas, em milhões, de 2020 para 2021, foi o mais baixo.	X				
(3)	Região onde o número de dormidas, de 2020 para 2021, aumentou 100%.				X	