Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2ª Fase | Ensino Secundário | 2019

Caderno 1

1.

1.1. O ponto A pertence ao eixo Ox por isso tem coordenadas $(x, 0, 0)$ e pertence ao plano ABC, substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano conseguimos calcular x:

$$3x + 4 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \tfrac{12}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

Assim temos que A$(4, 0, 0)$.

De acordo com a figura 1 o ponto B pertence ao eixo Oy por isso tem coordenadas $(0, y, 0)$, sabendo as coordenadas do ponto C temos que B$(0, 3, 0)$.

Sabendo as coordenadas dos pontos A $(4, 0, 0)$ e B $(0, 3, 0)$ podemos determinar a distância $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

Sabendo as coordenadas dos pontos G $(6, 11, 0)$ e B $(0, 3, 0)$ podemos determinar a distância $\overline{GB}$:

$$\overline{GB} = \sqrt{(6-0)^2 + (11-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{36+64} = 10$$

Pelas coordenadas do vértice C sabemos que a altura do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ é igual a 6.

Calculando o volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ vem que:

$$V_{[ABCDEFGH]} = A_{[ABGH]} \times altura = 5 \times 10 \times 6 = 300$$

1.2. Sabendo as coordenadas do ponto P e um vetor diretor da reta r, uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (1, -4, 3) + k(3, 4, 0), \quad k \in \mathbb{R}$$

As coordenadas genéricas do ponto Q pertencente à reta r são $(1+3k, -4+4k, 3)$.

Como o ponto Q pertence ao plano ABC (ponto de interseção do plano ABC com a reta r), substituindo as coordenadas do ponto Q na equação do plano conseguimos calcular a constante k:

$3x + 4y - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 3(1 + 3k) + 4(-4 + 4k) - 12 = 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; 3 + 9k - 16 + 16k - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 25k = 25 \;\Leftrightarrow\; k = 1$

Substituindo $k = 1$ nas coordenadas genéricas do ponto Q conseguimos saber as coordenadas do ponto de interseção do plano ABC com a reta r: $(4, 0, 3)$.

1.3. Para a terceira coordenada do vetor $\overrightarrow{XY}$ ser igual a zero então os pontos X e Y têm de ter a mesma cota. Observando o paralelepípedo da figura 1 temos apenas dois planos em que todos os pontos desse plano têm igual cota: o plano DEF e o plano AHG.

Assim podemos escolher dois vértices do plano DEF ou podemos escolher dois vértices do plano AHG.

$$P(\text{"Terceira coordenada do vetor } \overrightarrow{XY} \text{ ser igual a zero"}) = \frac{{}^4C_2 + {}^4C_2}{{}^8C_2} = \frac{6+6}{28} = \frac{3}{7}$$

2.

2.1. Consideremos os acontecimentos:

R: O aluno é rapaz
B: O aluno frequenta o 10º ano

Sabe-se que:

$\frac{3}{5}$ dos alunos que frequentam o 10º ano são rapazes, logo vem que:

$$P(R|B) = \frac{3}{5}$$

$\frac{11}{21}$ dos alunos da escola são rapazes, o que corresponde à equação:

$$P(R) = \frac{11}{21}$$

$\frac{1}{7}$ dos alunos da escola são rapazes e frequentam o 10º ano, por isso temos que:

$$P(R \cap B) = \frac{1}{7}$$

Usando a fórmula da probabilidade condicionada temos:

$$P(R|B) = \frac{P(R\cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(B) = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{21}$$

Logo, temos que:

$$P(R\cup B) = P(R) + P(B) - P(R\cap B) = \frac{11}{21} + \frac{5}{21} - \frac{1}{7} = \frac{16}{21} - \frac{3}{21} = \frac{13}{21}$$

Aplicando as leis de morgan:

$$P(\overline{R}\cap \overline{B}) = P(\overline{R\cup B}) = 1 - P(R\cup B) = 1 - \frac{13}{21} = \frac{8}{21} \approx 0,38$$

2.2. Como o delegado (D) já faz parte da comissão vamos considerar que ele já foi escolhido por isso sobram-nos 15 raparigas (A) e 10 rapazes (B). A comissão tem de ser mista logo só temos duas hipóteses, escolhemos duas raparigas ou escolhemos uma rapariga e um rapaz:

$$\underline{D}\ \underline{A}\ \underline{A} \quad \text{ou} \quad \underline{D}\ \underline{A}\ \underline{B}$$

Tendo em conta que a ordem de escolha não interessa, o número de comissões mistas e diferentes que se podem formar, sabendo-se que o delegado de turma tem de fazer parte da comissão é igual a ${}^{15}C_2 + {}^{10}C_1 \times {}^{15}C_1 = 255$.

Opção(D)

3.

3.1. O número de bolas brancas retiradas pode ser:

- $X = 0$, quando retiramos duas bolas pretas;
- $X = 1$, quando retiramos uma bola branca e outra preta;
- $X = 2$, quando retiramos duas bolas brancas.

Assim a variável X pode assumir os valores 0,1 e 2.

Calculando as probabilidades:

$P(X=0)=\frac{^3C_2}{^5C_2}=\frac{3}{10}$

$P(X=1)=\frac{^2C_1\times{}^3C_1}{^5C_2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

$P(X=2)=\frac{^2C_2}{^5C_2}=\frac{1}{10}$

Construindo a tabela de distribuição de probabilidades da variável X:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

Calculando o valor médio da variável aleatória X:

$$0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=\frac{3}{5}+\frac{2}{10}=\frac{4}{5}=0,8$$

Opção(B)

3.2. Pela lei dos cossenos vem que:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \;\Leftrightarrow\; 6^2=4^2+5^2-2\times4\times5\times\cos A \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; 36=41-40\times cosA \;\Leftrightarrow\; cosA=\frac{1}{8}$

Usando a Lei fundamental da trignometria vem que:

$\sin^2 A+\cos^2 A=1 \;\Leftrightarrow\; \sin^2 A=1-\frac{1}{64} \;\Leftrightarrow\; \sin^2 A=\frac{63}{64} \;\Leftrightarrow\; \sin A=\pm\sqrt{\frac{63}{64}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \sin A\approx 0,992$

Opção(B)

4. Vamos considerar as seguintes constantes:

N_0 é o nível inicial do som, medido em decibéis.

I_0 é o valor da intensidade inicial do som, medida em microwatt por metro quadrado.

O nível do som inicial N_0 respeita a seguinte igualdade:

$$N_0 = 60 + 10\log_{10} I_0 \quad (1)$$

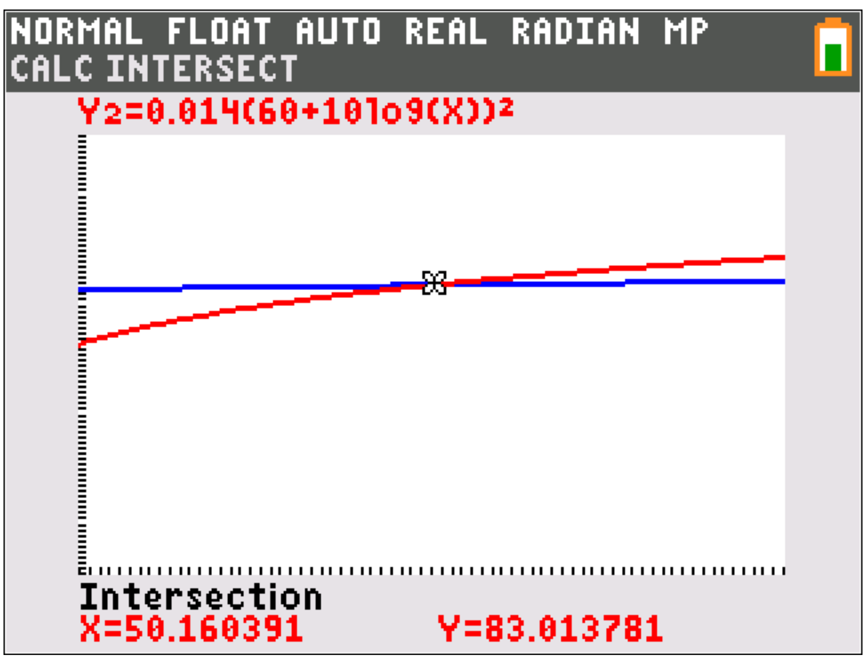
Relativamente ao som de um certo despertador, sabe-se que, aumentando a sua intensidade em 150 $\mu W/m^2$, o seu nível passa a ser 1,4 % do quadrado do nível inicial, o que corresponde à equação:

$$0,014{N_0}^2 = 60 + 10\log_{10}(I_0 + 150) \quad (2)$$

Substituindo na equação (2) o nível do som inicial N_0 que está na igualdade (1), vem que:

$$0,014(60 + 10\log_{10} I_0)^2 = 60 + 10\log_{10}(I_0 + 150) \quad (2)$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Considerando que $I_0 \in [20, 80]$, temos que $I_0 \approx 50$ $\mu W/m^2$.

5. A função f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ pois resulta do quociente entre funções polinomiais que são contínuas.

   Para que a função f seja contínua em $\mathbb{R}$ tem de ser contínua em $x = 1$, ou seja, temos que ter:

   $$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x).$$

   Calculando o valor da função f no ponto $x = 1$:

   $f(1) = \log_3 k$

   Calculando o valor dos limites laterais da função f no ponto $x = 1$:

   $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^\pm} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^\pm} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \lim\limits_{x\to 1^\pm} x + 1 = 2$

   Logo vem que:

   $$\log_3 k = 2 \;\Leftrightarrow\; k = 3^2 \;\Leftrightarrow\; k = 9$$

   Opção(D)

6. Sabemos que u_n é uma progressão geométrica.
   Logo temos o seguinte sistema:

   $$\begin{cases} \frac{b}{a} = r \\ \frac{a}{2} = r \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow 2b = a^2 \qquad (1)$$

   Da mesma forma v_n é uma progressão aritmética.

   Logo temos o seguinte sistema:

   $$\begin{cases} 2 - b = r \\ b - (a-2) = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - b = r \\ b - a + 2 = r \end{cases} \Leftrightarrow 2 - b = b - a + 2 \qquad (2)$$

Resolvendo o sistema resultante das equações (1) e (2):

$$\begin{cases} 2b = a^2 \\ 2 - b = b - a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = a^2 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ a = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ a - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ a(1-a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ a = 0 \vee 1 - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ a = 0 \vee a = 1 \end{cases} \quad (a \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

7. Vamos considerar que A é o afixo do número complexo $z = r\,e^{i\theta}$.

Sabendo que r é a medida do lado do quadrado, conseguimos calcular $\overline{DB}$:

$$\overline{DB}^2 = r^2 + r^2 \Leftrightarrow \overline{DB} = \sqrt{2}r \quad (r > 0)$$

De acordo com a figura o ângulo que o afixo de B faz com o eixo Ox é igual a $\theta + \frac{\pi}{4}$, portanto B é o afixo do número complexo $\sqrt{2}r\,e^{i\,(\theta + \frac{\pi}{4})}$.

$\sqrt{2}r\,e^{i\,(\theta+\frac{\pi}{4})} = (r\,e^{i\theta})(\sqrt{2}e^{i\,\frac{\pi}{4}}) = z\,(1+i)$

Opção(A)

Caderno 2

---

8. Vamos começar por simplificar e escrever o número complexo w na forma algébrica.

$w = \frac{3(2-3i)-i(1+2i)}{1+i^7} = \frac{6-9i-i+2}{1+i^3} = \frac{8-10i}{1-i} = \frac{(8-10i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{8+8i-10i+10}{2} = \frac{18-2i}{2} = 9 - i$

Escrevendo a equação da circunferência de centro no afixo de z_1 e raio igual a $\sqrt{53}$:

$$|z-(2-3i)|=\sqrt{53} \;\Leftrightarrow\; |z-2+3i|=\sqrt{53}$$

Substituindo o número complexo w na equação da circunferência vem que:

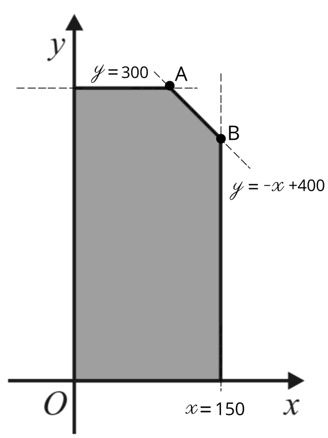
$$|9-i-2+3i|=\sqrt{53} \;\Leftrightarrow\; |7+2i|=\sqrt{53} \Leftrightarrow \sqrt{7^2+2^2}=\sqrt{53} \Leftrightarrow \sqrt{53}=\sqrt{53}$$

O número complexo w verifica a equação da circunferência logo ele pertence à circunferência de centro no afixo de z_1 e raio igual a $\sqrt{53}$.

9.

9.1. Vamos comaçar por determinar os pontos de interseção das retas representadas na região admissível.

De acordo com a figura abaixo e fazendo a interseção das retas sabemos que o ponto A tem coordenadas $(100, 300)$ e o ponto B tem coordenadas $(150, 250)$.



De modo a calcular o valor máximo que a função objetivo pode alcançar nesta região basta substituir as coordenadas destes pontos na função objetivo.

Substituindo as coordenadas dos pontos A e B na função objetivo temos que $L = 500$ e $L = 550$, respetivamente.

Opção(C)

9.2. Através da tabela trigonométrica sabemos que $arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

Assim vem que:

$$\sin\left(3arccos\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = \sin\pi = 0$$

Opção(C)

10. Através da equação da reta AB sabemos que as coordenadas do ponto B (ordenada na origem) são (0,4).

O ponto A tem ordenada igual a zero, substituindo na eqaução da reta AB conseguimos determinar a sua abcissa:

$$y = 2x + 4 \;\Leftrightarrow\; 0 = 2x + 4 \Leftrightarrow\; -4 = 2x \;\Leftrightarrow x = -2$$

O ponto A tem coordenadas (-2,0).

Calculado o ponto médio M do segmento de reta $[AB]$:

$$M\left(\tfrac{0-2}{2}, \tfrac{4+0}{2}\right)$$

Logo as coordenadas do ponto M são $(-1, 2)$.

Opção(B)

11.

11.1. A reta r é definida pela condição:

$$\tfrac{x-1}{2} = \tfrac{3-y}{4} = z \;\Leftrightarrow\; \tfrac{x-1}{2} = \tfrac{y-3}{-4} = \tfrac{z-0}{1}$$

Portanto um vetor diretor da reta r tem coordenadas $\overrightarrow{v}\ (2, -4, 1)$.

Os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{a}$ são colineares por isso são paralelos.

Calculando o produto escalar dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{b}$: $(2,-4,1).(-3,1,0)=-10$

Calculando o produto escalar dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{v}$: $(2,-4,1).(1,1,2)=0$

Opção(C)

11.2. $\lim \left(\frac{n+\ln a}{n}\right)^{n+2} = \lim \left(\frac{n}{n}+\frac{\ln a}{n}\right)^{n+2} = \lim \left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{n} \times \lim \left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{2} =$
$= e^{\ln a} \times (1+0)^2 = a$

Opção(C)

12.

12.1. Como $D_h = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, a única possível assíntota vertical do gráfico da função h, é a retas $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^+} = +\infty$

Concluímos que a reta $x=1$ é assíntota vertical do gráfico de h.

Vamos verificar a existência de assíntotas horizontais do gráfico da função h:

- $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0$

Concluímos que a reta $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de h quando $x\to -\infty$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{e^x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Concluímos que o gráfico da função h não tem assíntota horizontal quando $x\to +\infty$.

12.2. Resolvendo a equação:

$$(x-1)\times h(x)+2e^{-x}=3 \ \Leftrightarrow \ (x-1)\times \tfrac{e^x}{x-1}+2e^{-x}=3 \ \Leftrightarrow \ e^x+\tfrac{2}{e^x}=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ e^{2x}+2-3e^x=0 \ \wedge \ e^x\neq 0_{\ Cond.\,universal} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2+2-3e^x=0 \ \wedge \ e^x\neq 0_{\ Cond.\,universal}$$

Fazendo a mudança de variável $y=e^x$, ficamos com a equação $y^2-3y+2=0$.

$a=1 \qquad b=-3 \qquad c=2$

Usando a fórmula resolvente temos:

$$y=\tfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \ \Leftrightarrow \ y=\tfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times2}}{2\times1} \ \Leftrightarrow \ y=\tfrac{3\pm\sqrt{1}}{2} \ \Leftrightarrow \ y=\tfrac{3+1}{2}\vee y=\tfrac{3-1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ y=2\vee y=1$$

Calculando na variável original x vem que:

$$2=e^x \vee 1=e^x \ \Leftrightarrow \ x=\ln 2\vee x=0$$

C.S.$=\{0,\ln 2\}$

13.

13.1. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g:

$$g'(x)=\left(\tfrac{1}{4}\cos(2x)-\cos x\right)'=-\tfrac{1}{2}\sin(2x)+\sin x$$

Calculando a expressão algébrica da segunda derivada da função g:

$$g''(x)=\left(-\tfrac{1}{2}\sin(2x)+\sin x\right)'=-\cos(2x)+\cos x$$

Os pontos de inflexão correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$$g''(x)=0 \ \Leftrightarrow \ -\cos(2x)+\cos x=0 \ \Leftrightarrow \ \cos(2x)=\cos x \ \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \ 2x = x + 2k\pi \ \vee \ 2x = -x + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ x = 2k\pi \ \vee \ 3x = 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow \ x = 2k\pi \ \vee \ x = \frac{2k\pi}{3} \ , \ k \in \mathbb{Z}$

Para $k = -1$, $x = -2\pi \quad \notin \left]0, \pi\right[\ \vee \ x = -\frac{2\pi}{3} \quad \notin \left]0, \pi\right[$

Para $k = 0$, $x = 0 \quad \notin \left]0, \pi\right[$

Para $k = 1$, $x = 2\pi \quad \notin \left]0, \pi\right[\ \vee \ x = \frac{2\pi}{3} \quad \in \left]0, \pi\right[$

Para $k = 2$, $x = 4\pi \quad \notin \left]0, \pi\right[\ \vee \ x = \frac{4\pi}{3} \quad \notin \left]0, \pi\right[$

Logo, $g''(x)$ tem um zero em $x = \frac{2\pi}{3}$ no intervalo $\left]0, \pi\right[$.

$g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{2} = -\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2} = -(-1) + 0 = 1 > 0$

$g''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(2 \times \frac{3\pi}{4}\right) + \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{3\pi}{2} + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{3\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{4} =$
$= 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$g''(x)$	n.d	$+$	0	-	n.d
$g(x)$	n.d	$\smile$	P.I	$\frown$	n.d

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0, \frac{2\pi}{3}\right]$.

$g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\cos\left(2 \times \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{4}\cos\frac{4\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{4}\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$
$= -\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

A função g tem um ponto de inflexão de coordenadas $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3}{8}\right)$.

13.2. Tendo em conta a simetria e paridade das funções trignométricas vem que:

$g(-x) = \frac{1}{4}\cos(-2x) - \cos(-x) = \frac{1}{4}\cos(2x) - \cos x$

$g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{4}\cos\left[2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{4}\cos(\pi - 2x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$
$= -\frac{1}{4}\cos(2x) - \sin x$

Assim temos que:

$f(x) = g(-x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{4}\cos(2x) - \cos x - \frac{1}{4}\cos(2x) - \sin x = -\cos x - \sin x$

Opção(B)

14. Seguindo a sugestão, o ponto P tem coordenadas (a, a^2) e o ponto Q tem coordenadas (c, c^2).

Como a reta r é tangente à função f em $x = a$ então o seu declive é igual à primeira derivada da função f neste ponto logo vem que:

$$m_r = f'(a) = 2a$$

Assim temos que a equação da reta r é $y = 2ax + b_1$, sendo b_1 a ordenada na origem da reta r.

Substituindo as coordenadas do ponto P na equação da reta r conseguimos determinar a constante b_1:

$$r : y = 2ax + b_1 \Leftrightarrow a^2 = 2a \times a + b_1 \Leftrightarrow a^2 - 2a^2 = b_1 \Leftrightarrow b_1 = -a^2$$

Logo a equação da reta r é:

$$r : y = 2ax - a^2$$

De acordo com o enuciado a reta s é perpendicular à reta r logo temos que:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{2a}$$

Por outro lado como a reta s é tangente à função f em $x = c$ então o seu declive é igual à primeira derivada da função f neste ponto logo vem que:

$$m_s = f'(c) = 2c$$

Assim chegamos à igualdade:

$$-\frac{1}{2a} = 2c \Leftrightarrow c = -\frac{1}{4a}$$

As coordenadas do ponto Q em ordem à constante a são $(-\frac{1}{4a}, \frac{1}{16a^2})$.

Portanto a equação da reta s é da forma: $y = -\frac{1}{2a}x + b_2$, sendo b_2 a ordenada na origem da reta s.

Substituindo as coordenadas do ponto Q na equação da reta s conseguimos determinar a constante b_2:

$$s : y = -\frac{1}{2a}x + b_2 \Leftrightarrow \frac{1}{16a^2} = -\frac{1}{2a} \times -\frac{1}{4a} + b_2 \Leftrightarrow b_2 = \frac{1}{16a^2} - \frac{1}{8a^2} \Leftrightarrow b_2 = -\frac{1}{16a^2}$$

Logo a equação da reta s é:

$$s : y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$$

Agora que temos as equações de ambas as retas r e s, para determinar a abcissa do seu ponto de interseção I basta igualar as duas equações:

$$2ax - a^2 = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2} \Leftrightarrow 2ax + \frac{1}{2a}x = -\frac{1}{16a^2} + a^2 \Leftrightarrow \frac{4a^2}{2a}x + \frac{1}{2a}x = -\frac{1}{16a^2} + \frac{16a^4}{16a^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(\frac{4a^2+1}{2a}) = \frac{16a^4-1}{16a^2} \Leftrightarrow x(\frac{4a^2+1}{2a}) = \frac{(4a^2-1)(4a^2+1)}{16a^2} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{(4a^2-1)(4a^2+1)}{16a^2}}{\frac{4a^2+1}{2a}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{(4a^2-1)(4a^2+1)2a}{16a^2(4a^2+1)} \Leftrightarrow x = \frac{(4a^2-1)2a}{16a^2} \Leftrightarrow x = \frac{4a^2-1}{8a}$$

Substituindo a abcissa do ponto I na equação da reta r conseguimos determinar a ordenada do ponto I:

$$r : y = 2a \times \frac{4a^2-1}{8a} - a^2 = \frac{8a^3-2a}{8a} - a^2 = \frac{8a^3-2a}{8a} - \frac{8a^3}{8a} = \frac{8a^3-2a-8a^3}{8a} = -\frac{2a}{8a} = -\frac{1}{4}$$

Logo, qualquer que seja a abcissa do ponto P, a ordenada do ponto I é sempre igual a $-\frac{1}{4}$.