Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1ª Fase | Ensino Secundário | 2023

1. $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2} = e^2$

   Opção(C)

2. Seja (u_n) a progressão aritmética de razão 2 onde $u_1 = [AB]$.

   Sabemos que $S_{100} = 104$ m $= 10400$ cm.

   Usando a fórmula da soma dos 100 primeiros termos de uma progressão aritmética vem que:

   $S_{100} = \frac{u_1+u_{100}}{2} \times 100 \Leftrightarrow 10400 = \frac{u_1+u_1+99\times 2}{2} \times 100 \Leftrightarrow 10400 = \frac{2u_1+198}{2} \times 100 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow 2u_1 + 198 = \frac{10400\times 2}{100} \Leftrightarrow 2u_1 + 198 = 208 \Leftrightarrow u_1 = 5$

   O comprimento do segmento de reta $[AB]$ é de 5 cm.

3. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função f:

   $f''(x) = (-2xe^{1-x^2})' = -2e^{1-x^2} + (-2x)e^{1-x^2}(-2x) = -2e^{1-x^2} + 4x^2e^{1-x^2} =$
   $= e^{1-x^2}(-2+4x^2)$

   Os pontos de inflexão de f correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

   $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x^2}(-2+4x^2) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x^2} = 0_{\ (cond.\ impossível)} \vee -2+4x^2 = 0 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow 4x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

   De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	-	0	$+$
$f(x)$	$\smile$	P.I.	$\frown$	P.I.	$\smile$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$.

As abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de f são $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.

4.1. Calculando o valor da função g no ponto $x = 1$:

$g(1) = 7 \times 3^{1-1} - 3 = 7 - 3 = 4$

Calculando o valor do limite lateral da função g quando $x \to 1^+$:

$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (7 \times 3^{x-1} - 3) = 4$

Calculando o valor do limite lateral da função g quando $x \to 1^-$:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{4x-4}{e^{x-1}-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{4(x-1)}{e^{x-1}-1} = 4 \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} = (*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - 1$ ($y \to 0^-$ quando $x \to 1^-$)

$(*_1) = 4 \lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{4}{\lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y}} = 4 = \frac{4}{1} = 4$ (Limite notável)

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = g(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$, então a função g é contínua em $x = 1$.

4.2. $\log_3 \left(g(x)\right) = x + \log_3 2 \wedge g(x) > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_3 \left(7 \times 3^{x-1} - 3\right) = \log_3 3^x + \log_3 2 \wedge 7 \times 3^{x-1} - 3 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_3 \left(7 \times 3^{x-1} - 3\right) = \log_3 (3^x \times 2) \wedge 3^{x-1} > \frac{3}{7} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 7 \times 3^x \times 3^{-1} - 3 = 2 \times 3^x \wedge x - 1 > \log_3 \frac{3}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{7}{3} \times 3^x - 3 - 2 \times 3^x = 0 \wedge x > \log_3 \frac{3}{7} + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3^x\left(\frac{7}{3} - 2\right) = 3 \wedge x > \log_3 \frac{3}{7} + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3^x\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \wedge x > \log_3 \frac{3}{7} + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \wedge x > \log_3 \frac{3}{7} + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 2 \wedge x > \log_3 \frac{3}{7} + 1$

$2 \in [1, +\infty[$ e $2 \in \left]\log_3 \frac{3}{7} + 1, +\infty\right[$ então 2 é solução da equação.

C.S.$= \{2\}$

5.

5.1. Existem 8 possibilidades para que a Ana, o Diogo e o Francisco fiquem juntos. Tendo em conta que a Ana, o Diogo e o Francisco podem trocar de lugar entre si, temos 3! maneiras de os dispor lado a lado em linha reta.

Da mesma forma, os restantes 7 jovens também podem trocar de lugar entre si, logo temos 7! maneiras diferentes para dispor na fila.

Portanto o número de maneiras que se podem dispor os dez jovens na fila, de modo que a Ana, o Diogo e o Francisco fiquem juntos é igual a:

$$8 \times 3! \times 7! = 241920$$

Opção(B)

5.2. Consideremos os acontecimentos:

S: Praticar surf
K: Praticar skate

Como 65% praticavam surf vem que:

$P(S) = 0,65$

Sabemos também que 20% praticavam skate e não praticavam surf :

$P(K \cap \overline{S}) = 0,2$

Quatro em cada cinco dos que praticavam surf também praticavam skate o que equivale a:

$P(K|S) = \frac{4}{5}$

	S	$\overline{S}$	
K	$P(K \cap S)$	0,2	
$\overline{K}$	$P(\overline{K} \cap S)$	$P(\overline{K} \cap \overline{S})$	
	0,65	0,35	1

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$P(K|S) = \frac{P(K \cap S)}{P(S)} \Leftrightarrow \frac{4}{5} = \frac{P(K \cap S)}{0{,}65} \Leftrightarrow P(K \cap S) = 0,52$

De acordo com a tabela acima, temos que:

$P(\overline{K} \cap S) = P(S) - P(K \cap S) = 0,65 - 0,52 = 0,13$

A probabilidade de esse jovem, no questionário, também ter respondido que praticava surf é igual a :

$$P(S|\overline{K}) = \frac{P(\overline{K} \cap S)}{P(\overline{K})} = \frac{0{,}13}{0{,}28} = \frac{13}{28}$$

5.3. Seja x o número de jovens com 14 anos, ou seja, $70 - x$ é o número de jovens com 13 anos.

$P($"selecionar dois jovens com idades distintas"$) = \frac{{}^{x}C_1 \times {}^{70-x}C_1}{{}^{70}C_2} \Leftrightarrow \frac{16}{35} = \frac{x(70-x)}{2415} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x^2 + 70x = \frac{2415 \times 16}{35} \Leftrightarrow -x^2 + 70x - 1104 = 0 \Leftrightarrow x = 24 \lor x = 46$

Como o número de jovens com 14 anos é maior do que o número de jovens com 13 anos então $x = 46$.

O número de jovens com 13 anos que há no grupo é igual a $70 - 46 = 24$.

6.

6.1. A reta OD tem a mesma direção da reta AC, por isso o seu vetor diretor tem de ser colinear com o vetor diretor da reta AC.

Como o vetores $(0, 3, -4)$ e $(0, 4, 3)$ não são colineares então a **Opção(C)** e a **Opção(D)** estão excluídas.

Os vetores $(0,4,3)$ e $\left(0,2,\frac{3}{2}\right)$ são colineres porque $(0,4,3)=2\left(0,2,\frac{3}{2}\right)$.

Vamos verificar se o ponto O $(0,0,0)$ pertence à reta definida na **Opção(A)**:

$$\begin{cases} 0=0 \\ 0=6+2k \\ 0=8+\frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ k=-3 \\ k=-\frac{16}{3} \end{cases}$$

Como $-3\neq-\frac{16}{3}$ então o ponto O$(0,0,0)$ não pertence à reta da **Opção(A)**, logo esta opção está excluída.

Vamos confirmar que o ponto O $(0,0,0)$ pertence à reta definida na **Opção(B)**:

$$\begin{cases} 0=0 \\ 0=-4+2k \\ 0=-3+\frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ k=2 \\ k=2 \end{cases}$$

Opção(B)

6.2. Sabendo que $\overline{OE}=12,5$ então as coordenadas do ponto E são (0; 12,5; 0).

O vetor diretor da reta AC tem coordenadas $(0,4,3)$ e é também um vetor normal ao plano CBE.

A equação do plano CBE é da forma:

$$4y+3z+d=0$$

Como o ponto E pertence ao plano CBE, substituindo as coordenadas do ponto E na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$4y+3z+d=0 \;\Leftrightarrow\; 4\times 12,5+3\times 0+d=0 \;\Leftrightarrow\; d=-50$$

Uma equação do plano CBE é: $4y+3z-50=0$.

As coordenadas genéricas de um ponto P pertencente à reta AC são:

$$\mathrm{P}(10,4k,3k)$$

.

Como o ponto C pertence ao plano CBE (ponto de interseção do plano CBE com a reta AC), substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano CBE conseguimos calcular a constante k:

$4y + 3z - 50 = 0 \;\Leftrightarrow\; 4 \times 4k + 3 \times 3k - 50 = 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; 16k + 9k - 50 = 0 \;\Leftrightarrow\; k = \frac{50}{25} \;\Leftrightarrow\; k = 2$

Substituindo $k = 2$ nas coordenadas genéricas do ponto conseguimos saber as coordenadas do ponto C:

$$C(10, 8, 6)$$

7. Usando a fórmula do produto escalar vem que:

$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} = ||\overrightarrow{OP}|| \times ||\overrightarrow{OQ}|| \times \cos(\overrightarrow{OP}\,\hat{}\,\overrightarrow{OQ}) \Leftrightarrow 3 = 2 \times 2 \times \cos[2(\alpha - \pi)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos(2\alpha - 2\pi) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \frac{3}{4}$

8. $a(t)$ é a distância, em metros, do foguete ao solo após o lançamento, no instante t, em segundos.

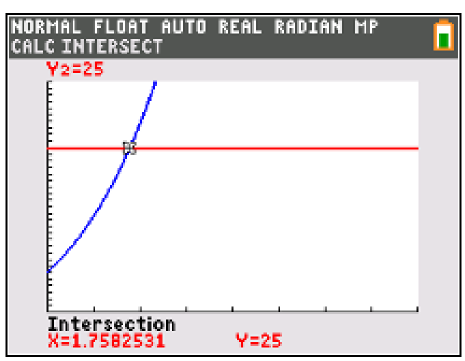
$a(t+3)$ é a distância, em metros, do foguete ao solo, 3 segundos depois do instante t.

Existe um instante a partir do qual, durante 3 segundos, esse foguete percorre 25 metros, o que corresponde à equação:

$a(t+3) - a(t) = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100\left[t+3+\left(10-(t+3)\right)\ln\left(1-\frac{t+3}{10}\right)\right] - \left[4,9(t+3)^2 - 100\left[t+(10-t)\ln\left(1-\frac{t}{10}\right)\right] - 4,9t^2\right] = 25$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Considerando que $t \in [0, 8]$, o instante a partir do qual, durante 3 segundos, esse foguete percorre 25 metros, arredondado às décimas é 1,8 segundos.

9. Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-2x+1\big)=0$ então a função f admite uma assíntota oblíqua de equação $y=2x-1$ quando $x\to+\infty$ por isso não admite mais nenhuma assíntota quando $x\to+\infty$.
A proposição I é falsa.

Sabendo que a reta r de equação $y=2x-1$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 podemos calcular o ponto de tangência:

$$y=2\times1-1=1$$

Ou seja, a reta r é tangente à função g no ponto de coordenadas (1,1), logo $\lim\limits_{x\to1}g(x)=1$.
A proposição II é falsa.

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima no seu domínio:

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	n.d.	+
$f(x)$	n.d.	$\smile$

$\forall x\in]0,+\infty[,\quad f''(x)>0$

O gráfico de g tem concavidade voltada para baixo no seu domínio:

x	0	$+\infty$
$g''(x)$	n.d.	-
$g(x)$	n.d.	$\frown$

$\forall x\in]0,+\infty[,\quad g''(x)<0$

Por isso concluímos que: $\forall x\in]0,+\infty[,\quad f''(x)>g''(x)$.
A proposição III é falsa.

10. Sabemos que o ponto A é o afixo de um número complexo z tal que $Im(z) = Re(z)$ e $Re(z) > 0$, logo o $Arg(z) = \frac{\pi}{4}$.

    Escrevendo o número complexo z na forma trigonométrica, $z = |z|e^{i\frac{\pi}{4}}$.

    Como ponto B é o afixo de um número complexo w, pela observação da figura concluímos que $Arg(w) = Arg(z) + \frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$.

    Escrevendo o número complexo w na forma trigonométrica, $w = |w|e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

    Assim temos que o produto de w com z é igual a:

$$w \times z = |w|e^{i\frac{7\pi}{8}} \times |z|e^{i\frac{\pi}{4}} = |w| \times |z|e^{i\left(\frac{7\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)} = |w||z|e^{i\frac{9\pi}{8}}$$

    Opção(C)

11. Escrevendo o número complexo $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ na forma algébrica:

    $e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

    Vamos simplificar o número complexo w:

    $z = \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}} - i^{17}}{i} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-i}{i} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}{i} \times \frac{-i}{-i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

    Escrevendo w na forma trigonométrica:

$$\begin{cases} tg\ \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} \\ \theta \in 2\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = -\sqrt{3} \\ \theta \in 2\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ e } \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{1} = 1$$

    Logo $w = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

    As soluções da equação $z^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ são:

$$z = \sqrt{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}},\ \ k \in \{0, 1\}$$

    Para $k = 0$, $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

Para $k = 1$, $z_1 = e^{i\frac{8\pi}{6}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Escrevendo z_0 e z_1 na forma algébrica:

$z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_1 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

12.

12.1. Fazendo a primeira derivada da função f:

$f'(x) = (\sin(2x) + x)' = 2\cos(2x) + 1 = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 1 =$
$= 2(1 - \sin^2 x - \sin^2 x) + 1 = 2 - 4\sin^2 x + 1 = 3 - 4\sin^2 x$

Opção(D)

12.2. $f(x) = -x + 2 \Leftrightarrow \sin(2x) + x = -x + 2 \Leftrightarrow \sin(2x) + 2x - 2 = 0$

Seja h a função $h(x) = \sin(2x) + 2x - 2$.

Sabemos que h é uma função contínua em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$ pois resulta da soma de duas funções contínuas, uma função trigonométrica e uma função polinomial.

- $h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \frac{2\pi}{6} - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} - 2 < 0$

- $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3} - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - 2 > 0$

Como $h\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0 < h\left(\frac{\pi}{3}\right)$, pelo Teorema de Bolzano existe $c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $h(c) = 0$. Logo a equação $f(x) = -x + 2$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$.

13. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f:

$$f'(x) = (ax^2 + bx)' = 2ax + b$$

Seja o T o ponto de tangência da reta de equação $y = ax + b$ ao gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$ com coordenadas (x_t, y_t).

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa x_t é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$f'(x_t) = a \Leftrightarrow 2ax_t + b = a \Leftrightarrow 2ax_t = a - b \Leftrightarrow x_t = \frac{a-b}{2a}$

Calculando a ordenada do ponto de tangência através da equação da reta tangente:

$y_t = ax_t + b = a\left(\frac{a-b}{2a}\right) + b = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a-b}{2} + \frac{2b}{2} = \frac{a+b}{2}$

Substituindo as coordenadas do ponto de tangência $\left(\frac{a-b}{2a}, \frac{a+b}{2}\right)$ na expressão algébrica da função f:

$y_t = a(x_t)^2 + bx_t \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} = a \times \left(\frac{a-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{a-b}{2a}\right) \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{(a-b)^2}{4a} + \frac{b(a-b)}{2a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2a(a+b)}{4a} = \frac{(a-b)^2}{4a} + \frac{2b(a-b)}{4a} \Leftrightarrow 2a(a+b) = (a-b)^2 + 2b(a-b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a(a+b) = (a-b)(a-b+2b) \Leftrightarrow 2a(a+b) = (a-b)(a+b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2a(a+b)}{a+b} = a - b \Leftrightarrow 2a = a - b \Leftrightarrow a = -b$

Substituindo $a = -b$ nas coordenadas do ponto de tangência, vem que:

$$T\left(\frac{-b-b}{-2b}, \frac{-b+b}{2}\right)$$

O ponto de tangência tem coordenadas $T(1, 0)$.