Resolução - Sucessões

1. A sucessão $(-1)^n$ é igual a -1 quando n é ímpar e é igual a 1 quando n é par, logo podemos representar a sucessão $\frac{(-1)^n}{n}$ da seguinte forma:

$$\frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Como $\lim -\frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n} = 0$ então $\frac{(-1)^n}{n}$ é uma sucessão convergente.

Opção(B)

2022, 1ª fase

2. Conhecendo o valor da soma dos cinco primeiros termos da progressão geométrica:

$S_5 = u_1 \times \frac{1-r^5}{1-r} \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\frac{2}{3}} = 211 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1-\frac{32}{243}}{\frac{1}{3}} = 211 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{633}{243} = 211 \Leftrightarrow u_1 = 81$

Sabendo o primeiro termo e a razão da progressão geométrica conseguimos calcular o quinto termo desta progressão:

$u_5 = u_1 \times r^4 = 81 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 81 \times \frac{16}{81} = 16$

2022, 1ª fase

3. Os primeiros quatro termos da sucessão são:

$u_1 = -1$

$u_2 = 1$

$u_3 = -1$

$u_4 = \frac{15}{7}$

Usando o algoritmo da divisão inteira:

$$\begin{array}{rr|l} & 4n-1 & n+3 \\ \hline + & -4n-12 & 4 \\ & -13 & \end{array}$$

Logo temos que $\frac{4n-1}{n+3} = 4 - \frac{13}{n+3}$.

$\forall n > 3 \quad , 0 < \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall n > 3, \quad -\frac{1}{7} \leq -\frac{1}{n+3} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall n > 3, \quad -\frac{13}{7} \leq -\frac{13}{n+3} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall n > 3, \quad -\frac{13}{7} + 4 \leq -\frac{13}{n+3} + 4 < 0 + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall n > 3, \quad \frac{15}{7} \leq \frac{4n-1}{n+3} < 4$

Assim vem que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq u_n < 4$.

A sucessão u_n é limitada.

2022, 2ª fase

4. $\lim u_n = \lim \left(\frac{n+k}{n}\right)^n = \lim \left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k \quad$ (Limite notável)

Opção(C)

2022, Época especial

5. A expressão do termo geral de uma progressão aritmética é da forma:

$$v_n = v_1 + (n-1)r$$

Sabemos que:

$v_3 = v_1 + 2r$ e $v_3 = 1$ logo vem que $1 = v_1 + 2r$

$v_9 = v_1 + 8r$, $v_{10} = v_1 + 9r$ e $v_{10} = \frac{5}{4}v_9$ logo vem que $v_1 + 9r = \frac{5}{4}(v_1 + 8r)$

$v_1 + 9r = \frac{5}{4}(v_1 + 8r) \Leftrightarrow 4v_1 + 36r = 5v_1 + 40r \Leftrightarrow v_1 = -4r$

Resolvendo o sistema abaixo conseguimos determinar o primeiro termo e a razão desta progressão:

$$\begin{cases} 1 = v_1 + 2r \\ v_1 = -4r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -4r + 2r \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{2} \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{2} \\ v_1 = 2 \end{cases}$$

O termo geral desta progressão é igual a:

$$v_n = 2 - \frac{1}{2}(n-1) = 2 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - \frac{n}{2} = \frac{5-n}{2}$$

Vamos averiguar se -50 é termo da progressão (v_n):

$-50 = \frac{5-n}{2} \Leftrightarrow -100 = 5 - n \Leftrightarrow n = 105$

Concluímos que -50 é termo da progressão (v_n) de ordem 105.

2022, Época especial

6. Como (v_n) é uma progressão geométrica de razão r então temos que:

$$v_8 = v_5 \times r^3 \Leftrightarrow 108 = 4 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{108}{4} \Leftrightarrow r^3 = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow r = 3$$

Assim temos que $v_6 = v_5 \times r = 4 \times 3 = 12$

Opção(C)

2021, 1ª fase

7. Considerando que n é um número ímpar então $u_n = 2 + \frac{1}{n}$

Vamos determinar quantos termos de ordem ímpar da sucessão u_n pertencem ao intervalo $\left[\frac{83}{41}, \frac{67}{33}\right]$:

$\frac{83}{41} \leq u_n \leq \frac{67}{33} \Leftrightarrow \frac{83}{41} \leq 2 + \frac{1}{n} \leq \frac{67}{33} \Leftrightarrow \frac{83}{41} - 2 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{67}{33} - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{41} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{33} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{41} \land \frac{1}{n} \leq \frac{1}{33} \Leftrightarrow n \leq 41 \land n \geq 33 \Leftrightarrow 33 \leq n \leq 41$

Existem 5 termos de ordem ímpar da sucessão u_n que pertencem ao intervalo $\left[\frac{83}{41}, \frac{67}{33}\right]$.

2021, 1ª fase

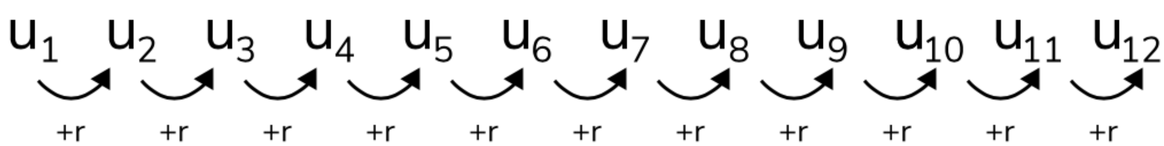
8. $\lim v_n = \lim 2 - \frac{5}{n+3} = 2 - 0^+ = 2^-$

   Pela observação do gráfico sabemos que, $\lim g(v_n) = g(\lim v_n) = g(2^-) = 1$

   Opção(B)

   2021, 2ª fase

9. Seja (u_n) uma progressão aritmética.



   Sabemos que:

$$\begin{cases} u_6 + u_{20} = -5 \\ u_{19} = 4u_7 \end{cases}$$

   Como (u_n) é uma progressão aritmética conseguimos escrever qualquer termo da sucessão em função do primeiro termo u_1 e da razão r:

   $u_6 = u_1 + 5r$

   $u_{20} = u_1 + 19r$

   $u_{19} = u_1 + 18r$

   $u_7 = u_1 + 6r$

   Resolvendo o sistema conseguimos determinar o primeiro termo e a razão da progressão aritmética:

$$\begin{cases} u_6 + u_{20} = -5 \\ u_{19} = 4u_7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 5r + u_1 + 19r = -5 \\ u_1 + 18r = 4(u_1 + 6r) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ -3u_1 = 6r \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ u_1 = -2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2r) + 24r = -5 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{4} \\ u_1 = -2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{4} \\ u_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sabendo o primeiro termo e a razão conseguimos determinar u_{16}:

$$u_{16} = u_1 + 15r = \frac{1}{2} + 15 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{13}{4}$$

A soma dos dezasseis primeiros termos desta progressão é igual a:

$$S_{16} = \frac{u_1 + u_{16}}{2} \times 16 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{13}{4}}{2} \times 16 = -22$$

2021, 2ª fase

10. Calculando o limite da sucessão:

$$\lim u_n = \lim (2n^2 - n) = \lim n^2\left(2 - \frac{1}{n}\right) = +\infty$$

$$\lim f\left(\frac{1}{u_n}\right) = f\left(\frac{1}{\lim u_n}\right) = f\left(\frac{1}{+\infty}\right) = f(0^+) = +\infty$$

O gráfico da função f que verifica a condição $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ é o gráfico da opção A.

Opção(A)

2021, Época especial

11. Consideremos a sucessão $u_n = 2n + 1$.

Calculando os primeiros termos de ordem ímpar da sucessão (u_n):

$u_1 = 3, \quad u_3 = 7, \quad u_5 = 11, \quad u_7 = 15, ...$

Conseguimos perceber que os termos de ordem ímpar da sucessão $u_n = 2n + 1$ são os termos de uma progressão aritmética em que o primeiro termo é igual 3 e razão 4.

Vamos escrever o termo geral da progressão aritmética (r_n) em que o primeiro termo é igual 3 e razão 4:

$$r_n = 3 + (n - 1) \times 4 = 4n - 1$$

Assim vem que, $r_{200} = 4 \times 200 - 1 = 799$

Calculando o valor da soma dos duzentos primeiros termos da progressão aritmética (r_n):

A soma dos primeiros duzentos termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) é igual à soma dos primeiros duzentos termos da progressão aritmética (r_n):

$$S_{200} = \frac{u_1+u_{200}}{2} \times 200 = \frac{3+799}{2} \times 200 = 80200$$

2021, Época especial

12.

12.1. Vamos estudar a sucessão (u_n) quanto à monotonia:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{8(n+1)-4}{n+1+1} - \frac{8n-4}{n+1} = \frac{8n+4}{n+2} - \frac{8n-4}{n+1} = \frac{(8n+4)(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{(8n-4)(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{8n^2+8n+4n+4}{(n+2)(n+1)} - \frac{8n^2+16n-4n-8}{(n+2)(n+1)} = \frac{8n^2+12n+4}{(n+2)(n+1)} - \frac{8n^2+12n-8}{(n+2)(n+1)} = \frac{8n^2+12n+4-(8n^2+12n-8)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{12}{(n+2)(n+1)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $u_{n+1} - u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ então (u_n) é uma sucessão monótona crescente.

12.2. $\lim f(u_n) = f(\lim u_n)$

$\lim u_n = \lim \frac{8n-4}{n+1} = \lim \frac{8n}{n} = 8$

Mas como (u_n) é uma sucessão monótona crescente vem que $\lim u_n = 8^-$

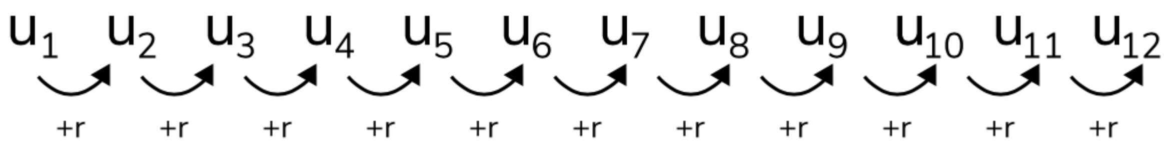
Logo, $\lim f(u_n) = \lim\limits_{x \to 8^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 8^-} \log_2 (8-x) = \log_2 0^+ = -\infty$

Opção(A)

2020, 1ª fase

13. u_n é uma progressão aritmética de razão r:

- $u_1 = u_2 - r$



- $u_{12} = u_2 + 10r$
- $u_7 = u_2 + 5r$

Conhecendo o valor da soma dos doze primeiros termos da progressão aritmética:

$$S_{12} = \frac{u_1+u_12}{2}\times 12 \Leftrightarrow 57 = \frac{u_2-r+u_2+10r}{2}\times 12 \Leftrightarrow 57 = \frac{(2u_2+9r)\times 12}{2} \Leftrightarrow 2u_2+9r = \frac{57\times 2}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2u_2 + 9r = \frac{19}{2} \qquad (1)$$

Sabe-se que o sétimo termo é igual ao dobro do segundo:

$$u_7 = 2u_2 \Leftrightarrow u_2 + 5r = 2u_2 \Leftrightarrow u_2 = 5r \qquad (2)$$

Resolvendo o sistema resultante das equações (1) e (2):

$$\begin{cases} 2u_2 + 9r = \frac{19}{2} \\ u_2 = 5r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10r + 9r = \frac{19}{2} \\ \rule{2cm}{0.4pt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ u_2 = 5\times\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ u_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Logo $u_1 = u_2 - r = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$

Assim, o termo geral desta progressão aritmética é:

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r = 2 + (n-1) \times \frac{1}{2} = 2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3+n}{2}$$

Calculando a ordem do termo 500 da sucessão (u_n):

$u_n = 500 \;\Leftrightarrow\; \frac{3+n}{2} = 500 \;\Leftrightarrow\; 3 + n = 1000 \;\Leftrightarrow\; n = 997$

Concluímos que 500 é o termo de ordem 997 da sucessão (u_n).

2020, 2ª fase

14. Calculando o limite da sucessão:

$\lim v_n = \lim 1 + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1$

Podemos concluir que a sucessão é convergente e tem limite não nulo, portanto as opções **A** e **B** não estão corretas.

A sucessão v_n é monótona crescente quando $n < 10$ e é monótona decrescente quando $n > 10$, por isso v_n não é uma sucessão monótona. A opção **D** não é verdadeira.

Opção(C)

2020, 2ª fase

15. Consideremos a progressão geométrica u_n de razão r:

Temos que:

$$u_1 \xrightarrow{\times r} u_2 \xrightarrow{\times r} u_3 \xrightarrow{\times r} u_4 \xrightarrow{\times r} u_5 \xrightarrow{\times r} u_6 \xrightarrow{\times r} u_7 \xrightarrow{\times r} u_8 \xrightarrow{\times r} u_9 \xrightarrow{\times r} u_{10} \xrightarrow{\times r} u_{11} \xrightarrow{\times r} u_{12} \xrightarrow{\times r} u_{13} \xrightarrow{\times r} u_{14} \xrightarrow{\times r} u_{15} \xrightarrow{\times r} u_{16} \xrightarrow{\times r} u_{17} \xrightarrow{\times r} u_{18} \xrightarrow{\times r} u_{19} \xrightarrow{\times r} u_{20}$$

$u_{18} = u_3 \times r^{15} = \frac{r^{15}}{12}$

$u_{20} = u_3 \times r^{17} = \frac{r^{17}}{12}$

Sabendo que $u_{18} = 4u_{20}$, conseguimos determinar a razão da progressão geométrica:

$$u_{18} = 4u_{20} \Leftrightarrow \frac{r^{15}}{12} = \frac{4r^{17}}{12} \Leftrightarrow r^{15} = 4r^{17} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{r^{17}}{r^{15}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = r^2 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$$

$r < 0$ porque (u_n) não é monótona

Calculando o primeiro termo da progressão:

$u_3 = u_1 \times r^2 \Leftrightarrow \frac{1}{12} = u_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{3}$

A expressão do termo geral de (u_n) é:

$u_n = u_1 \times r^{n-1} = \frac{1}{3} \times (-\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times -2 = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

2020, Época especial

16. Vamos determinar os primeiros quatro termos desta sucessão:

$v_1 = 2$

$v_2 = \frac{1}{v_1} = \frac{1}{2}$

$v_3 = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$v_4 = \frac{1}{v_3} = \frac{1}{2}$

Podemos concluir que a sucessão (v_n) não é monótona.

Como $\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_3}{v_2}$ a sucessão (v_n) não é uma progressão geométrica.

Como $v_2 - v_1 \neq v_3 - v_2$ a sucessão (v_n) não é uma progressão aritmética.

Opção(D)

2020, Época especial

17. Vamos considerar dois termos consecutivos, a e b desta pregressão. Como a razão é maior do que um quer dizer que a progressão é crescente ou seja o valor de b é maior que a.

Sabendo que a sua soma dos dois termos consecutivos é igual a 12 e a diferença entre o maior e o menor é igual a 3, podemos escrever um sistema de equações que permita determinar a e b:

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ b - a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 - b \\ b - (12 - b) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ b - 12 + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 2b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ b = \frac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 - \frac{15}{2} \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{2} \\ b = \frac{15}{2} \end{cases}$$

Para determinar a razão de uma progressão geométrica basta fazer o quociente entre um termo com o termo anterior:

$r = \frac{b}{a} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{30}{18} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

2019, 1ª fase, caderno 1

18. Sabemos que u_n é uma progressão geométrica.

Logo temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = r \\ \frac{a}{2} = r \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow 2b = a^2 \qquad (1)$$

Da mesma forma v_n é uma progressão aritmética.

Logo temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2 - b = r \\ b - (a-2) = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - b = r \\ b - a + 2 = r \end{cases} \Leftrightarrow 2 - b = b - a + 2 \qquad (2)$$

Resolvendo o sistema resultante das equações (1) e (2):

$$\begin{cases} 2b = a^2 \\ 2 - b = b - a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = a^2 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ a = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ a - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ a(1-a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ a = 0 \vee 1 - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ a = 0 \vee a = 1 \end{cases} \quad (a \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

2019, 2ª fase, caderno 1

19. A sucessão $(-1)^{n+1}$ é igual a 1 quando n é ímpar e é igual a -1 quando n é par, logo podemos representar a sucessão u_n da seguinte forma:

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -\frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Quando n é ímpar todos os termos da sucessão u_n são positivos portanto são maiores do que $-0,01$.

Vamos determinar a ordem a partir da qual todos os termos da sucessão u_n, quando n é par, são maiores do que $-0,01$, o que equivale a resolver a seguinte inequação:

$$-\frac{1}{n+1} > -0,01 \Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{100} > 0 \Leftrightarrow \frac{-100+n+1}{100(n+1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{n-99}{100(n+1)} > 0 \underset{(100(n+1)>0)}{\Rightarrow} n-99 > 0$$
$$\Leftrightarrow n > 99$$

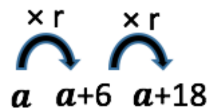
A partir da ordem 99 todos os termos da sucessão u_n são maiores do que $-0,01$.

2019, Época especial, caderno 1

20. Seja u_n uma progressão geométrica.

Logo temos que:

- $a + 6 = a \times r \ \Leftrightarrow \ r = \frac{a+6}{a}$



- $a + 18 = (a+6) \times r \ \Leftrightarrow \ r = \frac{a+18}{a+6}$

Resolvendo a equação abaixo, vamos calcular o número real a:

$\frac{a+6}{a} = \frac{a+18}{a+6} \ \Leftrightarrow \ (a+6)^2 = a(a+18) \ \Leftrightarrow \ a^2+12a+36 = a^2+18a \ \Leftrightarrow \ 36 = 18a-12a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ a = \frac{36}{6} \ \Leftrightarrow \ a = 6$

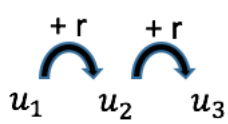
Assim temos que $r = \frac{a+6}{a} = \frac{6+6}{6} = 2$.

Conhecendo o valor da soma dos sete primeiros termos da progressão geométrica, conseguimos determinar o primeiro termo da progressão:

$S_7 = u_1 \times \frac{1-r^7}{1-r} \ \Leftrightarrow \ 381 = u_1 \times \frac{1-2^7}{1-2} \ \Leftrightarrow \ 381 = u_1 \times \frac{1-128}{-1} \ \Leftrightarrow \ 381 = u_1 \times 127 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ u_1 = \frac{381}{127} \ \Leftrightarrow \ u_1 = 3$

2018, 1ª fase, caderno 1

21. Sabemos que u_n é uma progressão aritmética.



Logo temos que:

$$u_3 = u_1 + 2r \ \Leftrightarrow \ 4 = u_1 + 2r \ \Leftrightarrow \ u_1 = 4 - 2r$$

Da mesma forma vem que, $u_{12} = u_1 + 11r = 4 - 2r + 11r = 4 + 9r$.

Conhecendo o valor da soma dos doze primeiros termos da progressão aritmética, conseguimos determinar a razão da progressão:

$S_{12} = \frac{u_1+u_1 2}{2} \times 12 \Leftrightarrow 174 = \frac{4-2r+4+9r}{2} \times 12 \Leftrightarrow 174 = \frac{(8+7r)\times 12}{2} \Leftrightarrow (8+7r) \times 12 =$
$= 2 \times 174 \Leftrightarrow 8+7r = \frac{348}{12} \Leftrightarrow 7r = 29-8 \Leftrightarrow r = \frac{21}{7} \Leftrightarrow r = 3$

Logo o termo geral desta progressão aritmética é:

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r \Leftrightarrow u_n = 4-6+(n-1)\times 3 \Leftrightarrow u_n = -2+(n-1)\times 3$$

Para averiguarmos se 5371 é termo da sucessão (u_n), vamos resolver a seguinte equação:

$u_n = 5371 \Leftrightarrow -2+(n-1)\times 3 = 5371 \Leftrightarrow (n-1)\times 3 = 5371+2 \Leftrightarrow (n-1)\times 3 = 5373 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n = \frac{5373}{3}+1 \Leftrightarrow n = 1792$

Como $n \in \mathbb{N}$, concluímos que 5371 é o termo de ordem 1792 da sucessão (u_n).

2018, 2ª fase, caderno 1

22. Vamos estudar a sucessão (u_n) quanto à monotonia:

$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1+5}{n+1+3} - \frac{n+5}{n+3} = \frac{n+6}{n+4} - \frac{n+5}{n+3} = \frac{(n+6)(n+3)}{(n+4)(n+3)} - \frac{(n+5)(n+4)}{(n+3)(n+4)} =$
$= \frac{n^2+3n+6n+18}{(n+4)(n+3)} - \frac{n^2+4n+5n+20}{(n+3)(n+4)} = \frac{n^2+9n+18}{(n+4)(n+3)} - \frac{n^2+9n+20}{(n+3)(n+4)} = \frac{n^2+9n+18-(n^2+9n+20)}{(n+3)(n+4)} =$
$= -\frac{2}{(n+3)(n+4)} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Como $u_{n+1} - u_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ então (u_n) é uma sucessão monótona decrescente.

2018, Época especial, caderno 1

23. De acordo com a sucessão temos que:

Para $n \leq 20, \quad 1 \leq u_n \leq 20$

Para $n > 20, \quad u_n = -1 \ \vee \ u_n = 1$

Portanto a sucessão u_n é limitada, $-1 \leq u_n \leq 20$.

Opção(C)

2017, 1ª fase, grupo I

24. Para $n = 1, \quad u_1 = (\frac{1}{2})^0 = 1$

Para $n = 2, \quad u_2 = (\frac{1}{2})^{-1} = 2 \quad (u_2 = u_1 \times 2)$

Para $n = 3, \quad u_3 = (\frac{1}{2})^{-2} = 4 \quad (u_3 = u_2 \times 2)$
...

A sucessão u_n é uma progressão geométrica de razão igual a 2.

Opção(B)

2017, 2ª fase, grupo I

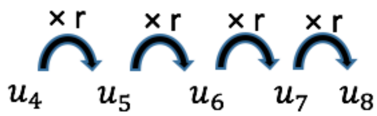
25. Como $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ então $u_n > u_{n+1}$, ou seja, a sucessão é limitada superiormente por u_1.

Tendo em conta que todos os termos da sucessão são positivos então u_n também é limitada inferiormente (por zero).

Opção(A)

2017, Época especial, grupo I

26. Sabemos que u_n é uma progressão geométrica.



Logo temos que:

$$u_8 = u_4 \times r^4 \iff 8192 = 32 \times r^4 \iff r = \pm\sqrt[4]{\frac{8192}{32}} \iff r = 4 \quad (r > 0)$$

Conhecendo a razão da progressão geométrica conseguimos determinar o quinto termo da sucessão:

$$u_{n+1} = u_n \times r \iff u_5 = u_4 \times r \iff u_5 = 32 \times 4 \iff u_5 = 128$$

Opção(B)

2016, 2ª fase, grupo I

27.

$u_1 = a$

$u_2 = -3u_1 + 2 = -3a + 2$

$u_3 = -3u_2 + 2 = -3(-3a + 2) + 2 = 9a - 6 + 2 = 9a - 4$

Opção(B)

2015, 1ª fase, grupo I

28.

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ -1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Logo$(-1)^n$ é uma sucessão limitada mas não é monótona.

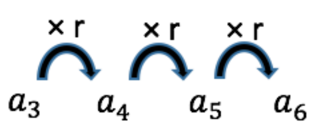
A sucessão $(-1)^n.n$ também não é monótona visto que $u_2 > u_1$ mas $u_3 < u_2$.

A sucessão $1+n^2$ não é limitada porque $\lim 1+n^2 = 1+(+\infty)^2 = +\infty$.

Opção(C)

2015, 1ª fase, grupo I

29. Sabemos que a_n é uma progressão geométrica.



Logo temos que:

$$a_6 = a_3 \times r^3 \;\Leftrightarrow\; 2 = \tfrac{1}{4} \times r^3 \;\Leftrightarrow\; r = \sqrt[3]{8} \;\Leftrightarrow\; r = 2$$

Conhecendo a razão da progressão geométrica conseguimos determinar o vigésimo termo da sucessão:

$$a_{20} = a_6 \times r^{14} \;\Leftrightarrow\; a_{20} = 2 \times 2^{14} \;\Leftrightarrow\; a_{20} = 2^{15} \;\Leftrightarrow\; a_{20} = 32768$$

Opção(C)

2015, Época especial, grupo I