Resolução - Geometria no espaço

1.

1.1. Para que dois planos sejam perpendiculares o produto escalar dos seus vetores normais tem de ser igual a zero.

$(1, 4, -3).(0, 4, -3) \neq 0$, logo não pode ser a opção (A)

$(3, 4, 1).(0, 4, -3) \neq 0$, logo não pode ser a opção (B)

Tanto a opção (C) como a opção (D) verificam esta condição.

Vamos averiguar se o ponto de coordenadas $(1, 2, -1)$ pertence ao plano definido na opção(C):

$3 \times 2 + 4 \times (-1) \neq 8$

Concluímos que o ponto $(1, 2, -1)$ não pertence ao plano definido na opção(D).

Vamos confirmar que o ponto de coordenadas $(1, 2, -1)$ pertence ao plano definido na opção(D):

$1 + 3 \times 2 + 4 \times (-1) = 3$

Concluímos que o ponto $(1, 2, -1)$ pertence ao plano definido na opção(C).

Opção(D)

1.2. O ponto A pertence ao eixo Oy por isso tem coordendas $(0, y, 0)$ e pertence ao plano que contém a base do cone. Substituindo o ponto A na equação do plano da base do cone conseguimos determinar y:

$4y - 3 \times 0 = 16 \Leftrightarrow y = 4$

O ponto A tem coordenadas $(0, 4, 0)$.

Vamos escrever a equação vetorial da reta VA:

$$VA\colon\ (x, y, z) = (0, 4, 0) + k(0, 4, -3)\ , \quad k \in \mathbb{R}$$

O ponto V pertence ao eixo Oz por isso tem coordendas $(0, 0, z)$ e pertence à reta VA. Substituindo o ponto V na equação vetorial da reta VA conseguimos determinar z:

$$\begin{cases} 0 = 0 + 0 \\ 0 = 4 + 4k \\ z = -3k \end{cases} , k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \\ k = -1 \\ z = -3 \times -1 \end{cases} , k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \\ \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \\ z = 3 \end{cases} , k \in \mathbb{R}$$

O ponto V tem coordenadas $(0, 0, 3)$.

Calculando a altura do cone:

$$\mathrm{d}(VA) = \sqrt{0 + (4-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

O volume do cone é igual a:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \times A_{base} \times altura = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 5 = \frac{45}{3}\pi = 15\pi$$

2022, 1ª fase

2.

2.1. Como os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{HE}$ formam um ângulo de 90º então o seu produto escalar é igual a 0.

Opção(B)

2.2. Vamos começar por determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BA}$:

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (-3, 6, -2)$$

O vetor $\overrightarrow{BA}$ é um vetor normal ao plano ADE por isso a equação deste plano é da forma:

$$\text{ADE:} \quad -3x + 6y - 2z + d = 0$$

Como o ponto A pertence ao plano ADE, substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$-3x + 6y - 2z + d = 0 \;\Leftrightarrow\; -3 \times -2 + 6 \times 5 - 2 \times 0 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = -36$$

Logo, $ADE : -3x + 6y - 2z - 36 = 0.$

As coordenadas genéricas de um ponto P pertencente à reta de equação

$(x, y, z) = (0, 0, 3) + k(1, -1, -1), \;\; k \in \mathbb{R}$ são:

$$\text{P}(k, -k, 3 - k)$$

.

Como o ponto E pertence ao plano ADE (ponto de interseção do plano ADE com a reta acima), substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano ADE conseguimos calcular a constante k:

$$-3x + 6y - 2z - 36 = 0 \;\Leftrightarrow\; -3k - 6k - 2(3-k) - 36 = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; -9k - 6 + 2k - 36 = 0 \;\Leftrightarrow\; -7k = 42 \;\Leftrightarrow\; k = -6$$

Substituindo $k = -6$ nas coordenadas genéricas do ponto conseguimos saber as coordenadas do ponto E:

$$E(-6, 6, 9)$$

2022, 2ª fase

3.

3.1. A base $[GHIJKL]$ do prisma hexagonal é perpendicular ao eixo Oz, ou seja a equação do plano que contem esta base é da forma:

$$z = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Sabendo que o centro do prisma tem cota igual a 2 então a cota de todos os pontos pertencentes ao plano que define a base $[GHIJKL]$ do prisma hexagonal têm cota igual ao dobro de dois.

Assim vem que a equação que define o plano que contém a face $[GHIJKL]$ do prisma é $z = 4$.

Opção(B)

3.2. O vetor normal ao plano BCJ tem coordenadas $(3, -\sqrt{3}, 0)$ e é também um vetor normal ao plano LEF.

A equação do plano LEF é da forma:

$$-3x - \sqrt{3}y + d = 0$$

Pela observação da figura sabemos que plano CFG corta o prisma em duas metades iguais por isso o ponto M, o centro do prisma, pertence a este plano.

O ponto F pertence ao eixo Oy e a sua ordenada é igual à ordenada do ponto M, assim F tem coordenadas $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$.

Como o ponto F pertence ao plano LEF, substituindo as coordenadas do ponto F na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$-3x - \sqrt{3}y + d = 0 \;\Leftrightarrow\; -3 \times 0 - \sqrt{3} \times \tfrac{2\sqrt{3}}{3} + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = 2$$

Uma equação do plano LEF é: $-3x - \sqrt{3}y + 2 = 0$.

2022, Época especial

4.

4.1. Para que a reta seja perpendicular à reta EF o produto escalar do seu vetor diretor com o vetor diretor da reta EF tem de ser igual a 0.

$(A) : (2, -3, 0).(-3, -2, 2) = 0$
$(B) : (0, 3, -3).(-3, -2, 2) = -12$
$(C) : (0, 3, 3).(-3, -2, 2) = 0$
$(D) : (2, 0, -3).(-3, -2, 2) = -12$

Concluímos que só poderá ser a opção(A) ou a opção(C).

Vamos averiguar se o ponto E pertence à reta definida na opção(A):

$(7,2,15) = (7,-3,3) + k(2,-3,0); \quad k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 + 2k \\ 2 = -3 - 3k\,; \\ 15 = 3 + 0k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -\frac{5}{3} \\ 12 = 0 \end{cases}$$

Concluímos que o ponto E não pertence à reta definida na opção(A).

Vamos averiguar se o ponto E pertence à reta definida na opção(C):

$(7,2,15) = (7,-10,3) + k(0,3,3); \quad k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 + 0k \\ 2 = -10 + 3k\,; \\ 15 = 3 + 3k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ k = 4 \\ k = 4 \end{cases}$$

Concluímos que o ponto E pertence à reta definida na opção (C).

Opção(C)

4.2. Através da condição que define a reta EF, sabemos que o seu vetor diretor tem coordenadas $(-3,-2,2)$.

Como o plano FGB é perpendicular à reta EF, o vetor $(-3,-2,2)$ é um vetor normal do plano. Assim a equação do plano é da forma: $-3x-2y+2z+d=0$.

Como o ponto G pertence ao plano FGB, substituindo as coordenadas do ponto G na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$-3x-2y+2z+d=0 \;\Leftrightarrow\; -3\times 6-2\times 10+2\times 13+d=0 \;\Leftrightarrow\; d=12$$

Logo, $FGB: -3x-2y+2z+12=0$.

Sabendo que o ponto B pertence ao eixo Oy, então tem coordenadas $(0,y,0)$.

Como o ponto B pertence ao plano FGB, substituindo as coordenadas do ponto B na equação do plano conseguimos determinar a sua ordenada:

$$-3\times 0-2y+2\times 0+12=0 \;\Leftrightarrow\; y=6$$

O ponto B tem coordenadas $(0,6,0)$.

O raio da superfície esférica é igual à distância entre os pontos E e G:

$$d(EG)=\sqrt{(7-6)^2+(2-10)^2+(15-13)^2}=\sqrt{69}$$

A equação da superfície esférica de centro no ponto B e que passa no ponto D é:

$$x^2+(y-6)^2+z^2=69$$

2021, 1ª fase

5.

5.1. A superfície esférica de centro no ponto R e que passa no ponto Q tem raio igual a $\overline{RQ}$. Vamos calcular a distância entre os pontos R e Q:

$$d(RQ) = \sqrt{(-5-(-2))^2 + (5-1)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{41}$$

A superfície esférica de centro no ponto $\mathbb{R}$ e que passa no ponto $\mathbb{Q}$ tem equação:

$$(x+5)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = 41$$

Opção(C)

5.2. Um dos vetores normais ao plano perpendicular à reta RS é o vetor $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2,1,1) - (1,-1,2) = (-3,2,-1)$$

Assim a equação do plano é da forma: $-3x + 2y - z + d = 0$.

Como o ponto P pertence ao plano, substituindo as coordenadas do ponto P na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$-3x + 2y - z + d = 0 \;\Leftrightarrow\; -3 \times 1 + 2 \times (-1) - 2 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = 7$$

Uma equação do plano perpendicular à reta RS e que passa no ponto P é $-3x + 2y - z + 7 = 0$.

2021, 2ª fase

6.

6.1. Sabendo que o plano α é perpendicular à reta BE então o vetor normal ao plano α tem de ser colinear com o vetor $\overrightarrow{BE}$.

O vetor normal ao plano da opção A, de coordenadas $(-1, 6, 2)$, é colinear com o vetor $\overrightarrow{BE}$. Da mesma forma o vetor normal ao plano da opção C, de coordenadas $(1, -6, -2)$ também é colinear com o vetor $\overrightarrow{BE}$.

Como os vetores normais aos planos da opções B e D não são colineares com o vetor $\overrightarrow{BE}$ excluímos estas duas opções.

Vamos verificar se o ponto de coordenadas $(1, 0, 1)$ pertence ao plano da opção A:

$$-x + 6y + 2z = 0 \Leftrightarrow -1 + 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \quad \text{(Não pertence)}$$

Só pode ser a opção C mas vamos confirmar que o ponto de coordenadas $(1, 0, 1)$ pertence ao plano da opção C:

$$x - 6y - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + 0 - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad \text{(Pertence)}$$

Opção(C)

6.2. Com as coordenadas do ponto E e do vetor $\overrightarrow{BE}$ conseguimos calcular as coordenadas do ponto B:

$$\overrightarrow{BE} = E - B \Leftrightarrow B = (-2, 6, 2) - (-1, 6, 2) \Leftrightarrow B = (-1, 0, 0)$$

Através da fórmula do volume da pirâmide vamos determinar a área da base quadrada da pirâmide:

$$V_{[ABCDE]} = \frac{A_b \times h}{3} \Leftrightarrow 20 = \frac{A_b \times 6}{3} \Leftrightarrow A_b = 10$$

Como $A_b = 10$ então $aresta_{\,base} = d(AB) = \sqrt{10}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo [OAB], vamos determinar a distância do ponto O ao ponto A:

$h^2 = c_1^2 + c_2^2 \Leftrightarrow (\sqrt{10})^2 = 1^2 + d^2(OA) \Leftrightarrow d^2(OA) = 9 \Leftrightarrow d(OA) = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d(OA) = 3$

Ou seja o ponto A tem coordenadas (0,0,3).

Calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 0, 0) - (0, 0, 3) = (-1, 0, -3)$$

2021, Época especial

7.

7.1. O ponto A pertence ao plano ABC, substituindo na equação do plano ABC os valores da abcissa e cota podemos calcular o valor da ordenada do ponto A:

$$3x + 4y + 4z - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 + 4y + 0 - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 3$$

O ponto A tem coordenadas $(0, 3, 0)$.

O ponto B também pertence ao plano ABC, substituindo na equação do plano ABC os valores da ordenada e cota podemos calcular o valor da abcissa do ponto B:

$$3x + 4y + 4z - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x + 0 + 0 - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 4$$

O ponto B tem coordenadas $(4, 0, 0)$

Pela observação da figura, a altura do cilindro é igual à distância entre os pontos A e B:

$$d(AB) = \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$V_{cilíndro} = A_b \times h \;\Leftrightarrow\; 10\pi = \pi \times \overline{BC}^2 \times \overline{AB} \;\Leftrightarrow\; 10 = \overline{BC}^2 \times 5 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \overline{BC}^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; \overline{BC} = \pm\sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; \overline{BC} = \sqrt{2}, \quad \overline{BC} > 0$$

7.2. O ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P é o pé da perpendicular do ponto P com o plano ABC. Seja P' este ponto.

Vamos começar por determinar uma equação vetorial da reta PP'.

O vetor normal ao plano ABC tem coordenadas $(3, 4, 4)$ e é um vetor diretor da reta PP'.

Sabendo as coordenadas do ponto P e um vetor diretor da reta PP', uma equação vetorial desta reta é:

$$(x,y,z) = (3,5,6) + k(3,4,4), \qquad k \in \mathbb{R}$$

As coordenadas genéricas do ponto P' pertencente à reta são $(3+3k, 5+4k, 6+4k)$.

Como o ponto P' pertence ao plano ABC (ponto de interseção do plano ABC com a reta PP'), substituindo as coordenadas do ponto P' na equação do plano conseguimos calcular a constante k:

$3x + 4y + 4z - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 3(3+3k) + 4(5+4k) + 4(6+4k) - 12 = 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; 9 + 9k + 20 + 16k + 24 + 16k - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 41k = -41 \;\Leftrightarrow\; k = -1$

Substituindo $k = -1$ nas coordenadas genéricas do ponto P' conseguimos saber as coordenadas do ponto de interseção do plano ABC com a reta PP' o que corresponde às coordenadas do ponto P':

$$P'(0,1,2)$$

2020, 1ª fase

8.

8.1. Através da condição que define a reta AE, sabemos que o seu vetor diretor tem coordenadas $(3,-6,2)$.

Como o plano EFG é perpendicular à reta AE, o vetor $(3,-6,2)$ é um vetor normal do plano. Assim a equação do plano é da forma: $3x - 6y + 2z + d = 0$.

Como o ponto G pertence ao plano AEG, substituindo as coordenadas do ponto G na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$3x - 6y + 2z + d = 0 \;\Leftrightarrow\; 3 \times 5 - 6 \times 3 + 2 \times 6 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = -9$$

Logo, $AEG : 3x - 6y + 2z - 9 = 0$.

8.2. De acordo com a figura, o centro da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo é o centro do cubo que corresponde ao ponto médio da diagonal espacial do cubo.

Calculando o ponto médio da diagonal espacial do cubo:

$M_{[AG]}\left(\frac{7+5}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{4+6}{2}\right)$

$M_{[AG]}\left(6, 2, 5\right)$

Calculando o diâmetro da superfície esférica:

$d(AG) = \sqrt{(7-5)^2 + (1-3)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Determinando o raio da superfície esférica:

$$r = \frac{d(AG)}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

A equação reduzida da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo é:

$$(x-6)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 3$$

2020, 2ª fase

9.

9.1. Sabendo as coordenadas dos pontos O (0,0,0) e B $(0,2,4)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BO}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{BO} = O - B = (0,0,0) - (0,2,4) = (0,-2,-4)$$

$$||\overrightarrow{BO}|| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$$

Com as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BE}$ podemos calcular a sua norma:

$$\overrightarrow{BE} = (2,2,-2)$$

$$||\overrightarrow{BE}|| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$$\cos(\overrightarrow{BO}\,\hat{}\,\overrightarrow{BE}) = \frac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BE}}{||\overrightarrow{BO}|| \times ||\overrightarrow{BE}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BO}\,\hat{}\,\overrightarrow{BE}) = \frac{(0,-2,-4).(2,2,-2)}{\sqrt{20} \times \sqrt{12}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BO}\,\hat{}\,\overrightarrow{BO}) =$$

$$= \frac{0-4+8}{\sqrt{240}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BO}\,\hat{}\,\overrightarrow{BE}) = \frac{4}{\sqrt{240}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BO}\,\hat{}\,\overrightarrow{BE}) = \frac{4}{\sqrt{240}} \Leftrightarrow O\hat{B}E \approx 75^o$$

9.2. Vamos começar por determinar as coordenadas do ponto E:

$$\overrightarrow{BE} = E - B \Leftrightarrow (2,2,-2) = E - (0,2,4) \Leftrightarrow E = (2,4,2)$$

Sabendo as coordenadas dos pontos O (0,0,0) e E $(2,4,2)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OE}$

$$\overrightarrow{OE} = E - O = (2,4,2)$$

Como o plano α é perpendicular à reta OE, o vetor $(2,4,2)$ é um vetor normal do plano. Assim a equação do plano é da forma: $2x + 4y + 2z + d = 0$.

Pela observação da figura sabemos que o ponto G tem coordenadas $(0,2,2)$.

Como o ponto G pertence ao plano α, substituindo as coordenadas do ponto G na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$2x + 4y + 2z + d = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 \times 0 + 4 \times 2 + 2 \times 2 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = -12$$

Logo, $\alpha : 2x + 4y + 2z - 12 = 0$.

Consideremos os pontos P, Q e R os pontos do plano α que pertencem aos eixos coordenados x, y e z respectivamente:

$$P(x,0,0) \qquad Q(0,y,0) \qquad R(0,0,z)$$

O ponto P pertence ao plano α, substituindo na equação do plano α os valores da ordenada e cota podemos calcular o valor da abcissa do ponto P:

$$2x + 0 + 0 - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 6$$

O ponto P tem coordenadas $(6,0,0)$.

O ponto Q também pertence ao plano α, substituindo na equação do plano α os valores da abcissa e cota podemos calcular o valor da ordenada do ponto Q:

$$0 + 4y + 0 - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 3$$

O ponto Q tem coordenadas $(0, 3, 0)$

O ponto R também pertence ao plano α, substituindo na equação do plano α os valores da abcissa e cota podemos calcular o valor da ordenada do ponto R:

$$0 + 0 + 2z - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 6$$

O ponto R tem coordenadas $(0, 0, 6)$

Calculando o volume da pirâmide:

$$V_{[OPQR]} = \frac{A_b \times altura}{3} = \frac{\frac{\overline{OP}\times\overline{OQ}}{2}\times\overline{OR}}{3} = \frac{\frac{6\times3}{2}\times6}{3} = \frac{54}{3} = 18$$

2020, Época especial

10. Tendo em conta que a base da pirâmide [ABCD] é um quadrado regular, então o ponto médio de [AC] é o ponto central da base.
Calculando o ponto médio de [AC]:

$$\mathrm{M}_{[AC]} \;\; \left(\frac{2+0}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$$

Logo,

$$\mathrm{M}_{[AC]} \;\; (1, 0, 1)$$

O vetor $\overrightarrow{MV}$ é um vetor perpendicular ao plano que contem a base da pirâmide.

Sabendo as coordenadas dos pontos M (1,0,1) e V $(3, -1, 2)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{MV}$:

$$\overrightarrow{MV} = V - M = (3, -1, 2) - (1, 0, 1) = (2, -1, 1)$$

Assim a equação do plano é da forma : $2x - y + z + d = 0$.

Como o ponto A pertence ao plano que contem a base da pirâmide, substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano conseguimos calcular a constante d:

$$2 \times 2 - 1 \times 1 + 1 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

Uma das equações do plano que contem a base da pirâmide é: $2x - y + z - 3 = 0$.

2019, 1ª fase, caderno 1

11.

11.1. O ponto A pertence ao eixo Ox por isso tem coordenadas $(x, 0, 0)$ e pertence ao plano ABC, substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano conseguimos calcular x:

$$3x + 4 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

Assim temos que A$(4, 0, 0)$.

De acordo com a figura 2 o ponto B pertence ao eixo Oy por isso tem coordenadas $(0, y, 0)$, sabendo as coordenadas do ponto C temos que B$(0, 3, 0)$.

Sabendo as coordenadas dos pontos A $(4, 0, 0)$ e B $(0, 3, 0)$ podemos determinar a distância $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

Sabendo as coordenadas dos pontos G $(6, 11, 0)$ e B $(0, 3, 0)$ podemos determinar a distância $\overline{GB}$:

$$\overline{GB} = \sqrt{(6-0)^2 + (11-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{36+64} = 10$$

Pelas coordenadas do vértice C sabemos que a altura do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ é igual a 6.

Calculando o volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ vem que:

$$V_{[ABCDEFGH]} = A_{[ABGH]} \times altura = 5 \times 10 \times 6 = 300$$

11.2. Sabendo as coordenadas do ponto P e um vetor diretor da reta r, uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (1, -4, 3) + k(3, 4, 0), \quad k \in \mathbb{R}$$

As coordenadas genéricas do ponto Q pertencente à reta r são $(1+3k, -4+4k, 3)$.

Como o ponto Q pertence ao plano ABC (ponto de interseção do plano ABC com a reta r), substituindo as coordenadas do ponto Q na equação do plano conseguimos calcular a constante k:

$3x + 4y - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 3(1+3k) + 4(-4+4k) - 12 = 0 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; 3 + 9k - 16 + 16k - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 25k = 25 \;\Leftrightarrow\; k = 1$

Substituindo $k = 1$ nas coordenadas genéricas do ponto Q conseguimos saber as coordenadas do ponto de interseção do plano ABC com a reta r: $(4, 0, 3)$.

2019, 2ª fase, caderno 1

12.

12.1. Através da equação do plano α, sabemos que um vetor normal a este plano tem coordenadas $(2, 3, -1)$.

Como o plano é paralelo ao plano α, o vetor $(2, 3, -1)$ é também um vetor normal do plano. Assim a equação do plano é da forma: $2x + 3y - z + d = 0$.

Sabendo que a ordenada do ponto A é igual a 4, as suas coordenadas são (x,4,z).

Como o ponto A pertence à reta r, substituindo na equação da reta r o valor da sua ordenada conseguimos calcular os valores da abcissa e da cota do ponto A através do seguinte sistema:

$$(x, 4, z) = (1, 2, 1) + k(0, 1, 5) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4 = 2 + k \\ z = 1 + 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ k = 2 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ z = 11 \end{cases}$$

Assim, o ponto A tem coordenadas $(1, 4, 11)$.

Substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$2x + 3y - z + d = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 + 12 - 11 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = -3$$

Logo, o plano tem equação $2x + 3y - z - 3 = 0$.

12.2. As coordenadas genéricas do ponto G pertencente à reta r são $(1, 2+k, 1+5k)$.

Como o ponto G pertence ao plano α (ponto de interseção do plano α com a reta r), substituindo as coordenadas do ponto G na equação do plano conseguimos calcular a constante k:

$2x + 3y - z - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 + 3(2+k) - (1+5k) - 3 = 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; 2 + 6 + 3k - 1 - 5k - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; -2k = -4 \;\Leftrightarrow\; k = 2$

Substituindo $k = 2$ nas coordenadas genéricas do ponto G conseguimos saber as coordenadas do ponto de interseção do plano α com a reta r:

$$\mathrm{P}(1, 4, 11)$$

2019, Época especial, caderno 1

13. Para calcular a área lateral do prisma precisamos de saber as coordenadas do ponto P.

Sabendo as coordenadas do ponto S e um vetor diretor da reta PS, uma equação vetorial da reta PS é:

$$(x, y, z) = (14, 5, 0) + k(2, 3, -1), \quad k \in \mathbb{R}$$

Logo as coordenadas genéricas do ponto P são $(14 + 2k, 5 + 3k, -k)$.

Como o ponto P pertence ao plano PQR, substituindo as coordenadas do ponto P na equação do plano conseguimos calcular a constante k:

$$2x+3y-z-15=0 \Leftrightarrow 2(14+2k)+3(5+3k)-(-k)-15=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 28+4k+15+9k+k-15=0 \Leftrightarrow 14k=-28 \Leftrightarrow k=-\tfrac{28}{14} \Leftrightarrow k=-2$$

Logo as coordenadas do ponto P são $(10,-1,2)$.

Com as coordenadas dos pontos S e P podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{SP}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{SP}=P-S=(10,-1,2)-(14,5,0)=(-4,-6,2)$$

$$||\overrightarrow{SP}||=\sqrt{(-4)^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{56}$$

A área lateral do prisma é igual a:

$$A_{lateral}=\overline{SP}\times\overline{PQ}\times 6=\sqrt{56}\times 4\times 6\approx 179,6$$

2018, 1ª fase, caderno 1

14. Através da condição que define a reta r, sabemos que o seu vetor diretor tem coordenadas $(4,1,-2)$.

Como o plano é perpendicular à reta r, o vetor $(4,1,-2)$ é um vetor normal do plano. Assim a equação do plano é da forma: $4x+y-2z+d=0$.

Como o ponto P pertence à superfície esférica, substituindo na equação da superfície esférica os valores da abcissa e ordenada podemos calcular o valor da cota do ponto P:

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=10 \;\Leftrightarrow\; (1-1)^2+(3-2)^2+(z+1)^2=10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; (z+1)^2=9 \;\Leftrightarrow\; z+1=\pm\sqrt{9} \;\Leftrightarrow\; z=\pm 3-1 \;\Leftrightarrow\; z=-4,$ porque o ponto P tem cota negativa

Assim, o ponto P tem coordenadas $(1,3,-4)$.

Substituindo as coordenadas do ponto P na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$4x+y-2z+d=0 \;\Leftrightarrow\; 4+3+8+d=0 \;\Leftrightarrow\; d=-15$$

Logo, $\alpha : 4x+y-2z-15=0$.

2018, 2ª fase, caderno 1

15. Sabemos que o ponto P tem coordenadas (1,1,1).

O ponto O é a origem do referencial por isso tem coordenadas (0,0,0).

Calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$:

$$\overrightarrow{OP}=P-O=(1,1,1)-(0,0,0)=(1,1,1)$$

Calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{u}=-2\overrightarrow{OP}=-2(1,1,1)=(-2,-2,-2)$$

Como $Q=P+\overrightarrow{u}$, vem que:

$$Q=(1,1,1)+(-2,-2,-2)=(-1,-1,-1)$$

O ponto Q é o simétrico do ponto P em relação à origem do referencial. Como o ponto P pertence à superfície esférica então [PQ] é o diâmetro da superfície esférica.

2018, Época especial, caderno 1

16.

16.1. O ponto T pertence ao eixo Oz logo tem abcissa e ordenada nulas e como pertence ao plano $z = 3$ as suas coordenadas são $(0, 0, 3)$. Como o ponto T' é o simétrico do ponto T relativamente à origem do referencial tem coordenadas $(0, 0, -3)$.

A superfície esférica tem diâmetro [TT'] que é igual a 6, assim temos que o raio é igual a 3.

O centro da superfície esférica corresponde à origem do referencial $(0, 0, 0)$ que é o ponto médio do diâmetro [TT']. A equação da superfície esférica é:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 3^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

16.2. O ponto Q pertence ao eixo Oy por isso tem abcissa e cota nulas.

Como o ponto Q pertence ao plano PQV, substituindo na equação do plano PQV o valor da abcissa podemos calcular o valor da ordenada do ponto Q:

$$x + y = 2 \;\Leftrightarrow\; 0 + y = 2 \;\Leftrightarrow\; y = 2$$

Assim o ponto Q tem coordenadas $(0, 2, 0)$ e já sabemos que o ponto T tem coordenadas $(0, 0, 3)$.

Vamos calcular o vetor diretor da reta TQ:

$$\overrightarrow{TQ} = Q - T = (0, 2, 0) - (0, 0, 3) = (0, 2, -3)$$

Uma condição cartesiana que define a reta TQ é:

$$x = 0 \wedge \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3} \;\Leftrightarrow\; x = 0 \wedge \frac{y}{2} = \frac{3-z}{3}$$

2017, 1ª fase, grupo II

17.

17.1. De acordo com a figura 5 o ponto A pertence ao plano xOy, por isso tem cota nula e a sua ordenada é igual à ordenada do ponto D, ou seja, é igual 4.

Como o ponto A pertence ao plano ACG, substituindo na equação do plano ACG os valores da ordenada e cota podemos calcular o valor da abcissa do ponto A:

$$x + y - z - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; x + 4 - 0 - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2$$

Logo o vértice A tem abcissa igual a 2.

17.2. Vamos escrever a equação do plano ACG em ordem a z:

$$x + y - z - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = x + y - 6$$

Susbstituindo a variável z no sistema de equações que define a reta r vem que:

$$\begin{cases} x - 1 = z \\ 1 - y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = x + y - 6 \\ 1 - y = x + y - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x - y = -6 + 1 \\ ----------- \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -y = -5 \\ ---- \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ 1-5=x+5-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ 1-5-5+6=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=-3 \end{cases}$$

Como o ponto de interseção da reta r com o plano ACG pertence ao plano ACG, substituindo na equação do plano ACG os valores da abcissa e ordenada podemos calcular o valor da cota do ponto:

$$x+y-z-6=0 \;\Leftrightarrow\; -3+5-z-6=0 \;\Leftrightarrow\; z=-4$$

As coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG são $(-3,5,-4)$.

2017, 2ª fase, grupo II

18.

18.1. De acordo com a figura 6, a secção produzida no cilindro pelo plano de equação $x=1$, corresponde ao retâgulo cujos lados são a altura do cilindro (igual a 3) e o diâmetro da base do cilindro (igual a 2).

$$A_{retângulo} = c \times l = 3 \times 2 = 6$$

18.2. Pela observação da figura 6, sabemos que o ponto C tem coordenadas $(1,2,3)$.

Com as coordenadas dos pontos C e B podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{CB}$:

$$\overrightarrow{CB} = B - C = (1,3,0) - (1,2,3) = (0,1,-3)$$

Uma condicão cartesiana que define a reta CB é:

$$x=1 \wedge \tfrac{y-3}{1} = \tfrac{z-0}{-3} \;\Leftrightarrow\; x=1 \wedge y-3 = -\tfrac{z}{3}$$

O ponto de intersecção da reta BC com o plano xOz tem ordenada nula, logo tem coordenadas $(1, 0, z)$.

Substituindo $y = 0$ na condição que define a reta, podemos determinar o valor da cota do ponto de interseção:

$$x = 1 \wedge y - 3 = -\tfrac{z}{3} \;\Leftrightarrow\; x = 1 \wedge 0 - 3 = -\tfrac{z}{3} \;\Leftrightarrow\; x = 1 \wedge z = 9$$

As coordenadas do ponto de interseção da reta BC com o plano xOz são $(1, 0, 9)$.

2017, Época especial, grupo II

19.

19.1. O ponto A tem cota 1, ou seja, a distância do ponto A ao plano xOy é igual a 1, assim a superfície esférica de centro em A e tangente ao plano xOy tem raio 1.

A equação da superfície esférica de centro em A e tangente ao plano xOy é:

$$(x - (-1))^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1^2 \;\Leftrightarrow\; (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$$

19.2. De acordo com a figura 7, sabemos que o ponto V tem abcissa igual a -2 e ordenada igual a 2.

Como o ponto V pertence ao plano BCV, substituindo na equação do plano BCV o valor da ordenada podemos calcular o valor da cota do ponto V:

$$3y + z - 10 = 0 \;\Leftrightarrow\; 3 \times 2 + z - 10 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 4$$

Logo o vértice V tem coordenadas $(-2, 2, 4)$.

19.3. Vamos começar por determinar uma equação do plano α.

O plano α é perpendicular à reta AC então $\overrightarrow{AC}$ é um vetor normal a este plano:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3, 3, 1) - (-1, 1, 1) = (-2, 2, 0)$$

Logo, $\alpha : -2x + 2y + d = 0$

Substituindo as coordenadas do ponto P (que pertence ao plano α) na equação do plano α, conseguimos determinar a constante d:

$$-2 \times 1 + 2 \times (-2) + d = 0 \;\Leftrightarrow\; -2 - 4 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = 6$$

Assim vem que, $\alpha : -2x + 2y + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha : -x + y + 3 = 0$.

Resolvendo o sistema de equações em ordem à variável comum nas equações dos dois planos (variável y) temos:

$$\begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ 3y + z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ 3y = 10 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = \frac{10-z}{3} \end{cases}$$

As equações cartesianas da reta que corresponde à intersecção dos planos α e BCV são da forma:

$$x - 3 = y = \tfrac{10-z}{3} \;\Leftrightarrow\; \tfrac{x-3}{1} = \tfrac{y-0}{1} = \tfrac{z-10}{-3}$$

Ou seja, a reta passa no ponto $(3, 0, 10)$ e tem vetor diretor $(1, 1, -3)$.

Uma equação vetorial desta reta é:

$$(x, y, z) = (3, 0, 10) + k(1, 1, -3), \quad k \in \mathbb{R}$$

2016, 1ª fase, grupo II

20.

20.1. O vetor normal do plano α é um vetor diretor da reta perpendicular a este plano.

Logo o vetor diretor da reta tem coordenadas $(3, 2, 4)$.

Uma equacão vetorial da reta que tem vetor diretor de coordenadas $(3, 2, 4)$ e passa no ponto C é:

$$(x, y, z) = (2, 1, 4) + k(3, 2, 4), \quad k \in \mathbb{R}$$

20.2. Vamos começar por escrever as equações cartesianas da reta OD.

O vetor diretor da reta OD é:

$$\overrightarrow{OD} = D - O = (4, 2, 2) - (0, 0, 0) = (4, 2, 2)$$

As equações cartesianas desta reta OD são da forma:

$$\tfrac{x-0}{4} = \tfrac{y-0}{2} = \tfrac{z-0}{2} \;\Leftrightarrow\; \tfrac{x}{4} = \tfrac{y}{2} = \tfrac{z}{2}$$

Para calcular as coordenadas do ponto de intersecção da reta OD com o plano α temos de resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} 3x+2y+4z-12=0 \\ \frac{x}{4}=\frac{y}{2} \\ \frac{z}{2}=\frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y+4z-12=0 \\ x=2y \\ z=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\times 2y+2y+4y-12=0 \\ ------------- \\ ------------- \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12y=12 \\ ---- \\ ---- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \\ z=1 \end{cases}$$

O plano α e a reta OD intersectam-se no ponto de coordenadas $(2,1,1)$.

2016, 2ª fase, grupo II

21.

21.1. Como o ponto F pertence ao plano OFB, substituindo na equação do plano OFB os valores da abcissa e ordenada podemos calcular o valor da cota do ponto F:

$$3x + 3y - z = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 + 3 \times 2 - z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 6$$

Logo o vértice F tem cota igual a 6.

De acordo com a figura 8, o ponto D tem coordenadas $(-2, 0, 6)$.

O vetor de coordenadas $(3, 3, -1)$ é um vetor normal do plano OFB bem como de todos os planos paralelos a este plano.

Assim, uma equação do plano paralelo ao plano OFB é da forma: $3x+3y-z+d = 0$

Substituindo as coordenadas do ponto D na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$3x + 3y - z + d = 0 \;\Leftrightarrow\; 3 \times (-2) + 0 - 6 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = 12$$

Assim, uma equação do plano paralelo ao plano OFB que passa no ponto D é:

$$3x + 3y - z + 12 = 0$$

21.2. Pela observação da figura 8, sabemos que o ponto B tem coordenadas $(-2, 2, 0)$.

Com as coordenadas dos pontos B e O (origem do referencial) podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OB}$:

$$\overrightarrow{OB} = B - O = (-2,2,0) - (0,0,0) = (-2,2,0)$$

Uma condicão cartesiana que define a reta OB é:

$$\tfrac{x-0}{-2} = \tfrac{y-0}{2} \wedge z = 0 \;\Leftrightarrow\; -\tfrac{x}{2} = \tfrac{y}{2} \wedge z = 0$$

2016, Época especial, grupo II

22.

22.1. O vetor de coordenadas $(1,-2,1)$ é um vetor normal do plano α bem como de todos os planos paralelos a este plano.

Assim, uma equação do plano paralelo ao plano α é da forma: $x - 2y + z + d = 0$

Substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$x - 2y + z + d = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 + 0 + 2 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = -2$$

Assim, uma equação do plano paralelo ao plano α que passa no ponto A é:

$$x - 2y + z - 2 = 0$$

22.2. Vamos começar por determinar a distância entre A e B:

$$d(AB) = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

O segmento de reta [AB] é um diâmetro da superfície esférica logo o raio é:

$$r = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

O centro da superfície esférica é ponto médio do segmento de reta [AB]:

$$C = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (2, 0, 1)$$

Uma equação cartesiana que define a superfície esférica da qual o segmento de reta [AB] é um diâmetro é:

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{5})^2 \;\Leftrightarrow\; (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$$

2015, 1ª fase, grupo II

23.

23.1. O vértice V coincide com o centro geométrico da face [URST] do cubo, ou seja, o vértice V tem de coordendas $(1, 1, z), \quad z \in \mathbb{R}$.

Como o ponto V pertence ao plano PQV, substituindo na equação do plano PQV o valor da abcissa podemos calcular o valor da cota do ponto V:

$$6x + z - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 6 \times 1 + z - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 6$$

Logo o vértice V tem coordenadas $(1, 1, 6)$.

23.2. O vetor $\overrightarrow{OR}$ é um vetor normal do plano perpendicular à reta OR.

Com as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e R podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OR}$:

$$\overrightarrow{OR} = R - O = (2,2,2) - (0,0,0) = (2,2,2)$$

Assim, uma equação do plano perpendicular à reta OR é da forma:

$$2x + 2y + 2z + d = 0$$

Substituindo as coordenadas do ponto P na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$2x + 2y + 2z + d = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 \times 2 + 0 + 0 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = -4$$

Assim, uma equação do plano perpendicular à reta OR que passa no ponto P é:

$$2x + 2y + 2z - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x + y + z - 2 = 0$$

2015, 2ª fase, grupo II

24.

24.1. O vetor $(2,-1,1)$ é um vetor normal do plano β.

Como a reta OP é perpendicular ao plano β então o vetor $\overrightarrow{OP}$ e o vetor normal do plano $(2,-1,1)$ são colineares:

$$\overrightarrow{OP} = k(2,-1,1), \quad k \in \mathbb{R}$$

Com as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e P podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (-2,1,3a) - (0,0,0) = (-2,1,3a)$$

Logo temos que:

$\overrightarrow{OP} = k(2,-1,1) \Leftrightarrow (-2,1,3a) = k(2,-1,1) \Leftrightarrow -2 = 2k \ \wedge \ 1 = -k \ \wedge$
$\wedge \ 3a = k \ \Leftrightarrow \ k = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$

24.2. Seja T o ponto de tangência do plano β com a superfície esférica.

Sabendo as coordenadas do ponto O e um vetor diretor da reta OT (vetor normal ao plano β), uma equação vetorial da reta OT é:

$$(x,y,z) = (0,0,0) + k(2,-1,1), \qquad k \in \mathbb{R}$$

As coordenadas genéricas do ponto P pertencente à reta OT são $(2k,-k,k)$.

Como o ponto T pertence ao plano β (ponto de interseção do plano β com a reta OT), substituindo as coordenadas do ponto P na equação do plano conseguimos calcular a constante k:

$2x - y + z - 4 = 0 \ \Leftrightarrow \ 2(2k) - (-k) + k - 4 = 0 \ \Leftrightarrow \ 4k + k + k = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ 6k = 4 \ \Leftrightarrow \ k = \frac{2}{3}$

Substituindo $k = \frac{2}{3}$ nas coordenadas genéricas do ponto P conseguimos saber as coordenadas do ponto de interseção do plano β com a reta OT:

$$\text{T}\ \left(\tfrac{4}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right).$$

Fazendo a distância entre o ponto O e o ponto T, conseguimos calcular o raio da superfície esférica:

$$d(OT) = \sqrt{\left(0 - \tfrac{4}{3}\right)^2 + \left[0 - \left(-\tfrac{2}{3}\right)\right]^2 + \left(0 - \tfrac{2}{3}\right)^2} = \tfrac{\sqrt{24}}{3}$$

Uma equação cartesiana que define a superfície esférica de centro na origem do referencial e que é tangente ao plano β é:

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=(\tfrac{\sqrt{24}}{3})^2 \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2+z^2=\tfrac{24}{9}$$

2015, Época especial, grupo II