Exercícios de exames - Geometria no espaço

1. Na Figura 1, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone reto de vértice V e base de centro no ponto A .

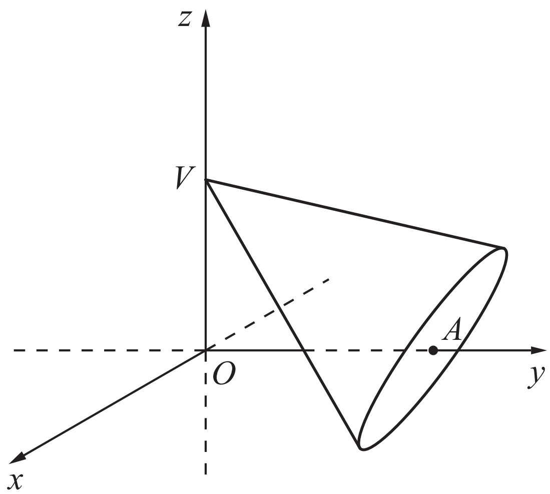

Figura 1

Sabe-se que:

- o ponto V pertence ao eixo Oz, e o ponto A pertence ao eixo Oy;
- a base do cone tem raio 3 e está contida no plano definido por $4y - 3z = 16$.

1.1. Qual das seguintes equações define um plano perpendicular ao plano que contém a base do cone e que passa no ponto de coordenadas $(1, 2, -1)$?

(A) $4y - 3z = 11$ **(B)** $3x + 4y + z = 10$
(C) $3y + 4z = 8$ **(D)** $x + 3y + 4z = 3$

1.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine o volume do cone.

2022, 1ª fase

2. Na Figura 2, está representado o cubo [ABCDEFGH].

   Fixado um determinado referencial o.n. $Oxyz$, tem-se: $A(-2,5,0)$, $B(1,-1,2)$ e $C(3,2,8)$.

   2.1. Qual é o valor de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HE}$?

   Opção(A) -49 **Opção(B)** 0

   Opção(C) 7 **Opção(D)** 49

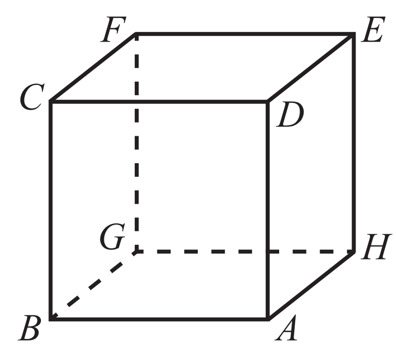

Figura 2

   2.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

   Sabe-se que o vértice E do cubo pertence à reta definida pela equação

$$(x,y,z)=(0,0,3)+k(1,-1,-1), k\in\mathbb{R}$$

   Determine as coordenadas do vértice E .

2022, 2ª fase

3. Na Figura 3, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma hexagonal reto $[ABCDEFGHIJKL]$, cujas bases são hexágonos regulares.

Sabe-se que:

- os vértices A e B pertencem ao semieixo positivo Ox, e o vértice F pertence ao semieixo positivo Oy;
- o plano BCJ é definido pela equação $3x - \sqrt{3}y - 6 = 0$;
- o centro do prisma, ponto equidistante de todos os seus vértices, é o ponto $M\left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$.

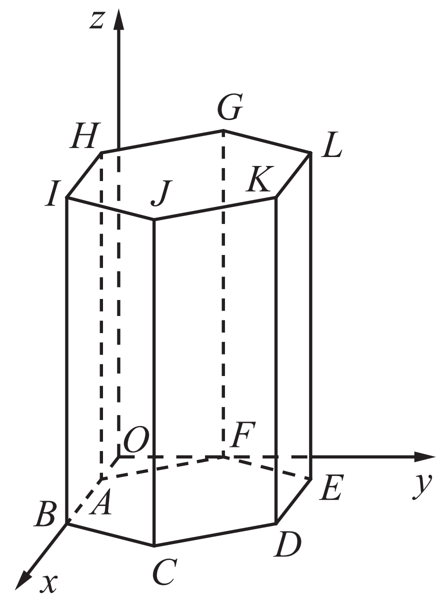

Figura 3

3.1. Qual das seguintes equações define o plano que contém a face $[GHIJKL]$?

(A) $z = 2$ **(B)** $z = 4$

(C) $x = \frac{4}{3}$ **(D)** $x = \frac{8}{3}$

3.2. Determine, sem recorrer à calculadora, uma equação cartesiana do plano LEF.

Apresente a equação na forma $ax+by+cz+d = 0$, em que a, b, c e d são números reais.

2022, Época especial

4. Na Figura 4, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo [ABCDEFGH]

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy
- ascoordenadasdosvértices E e G são $(7, 2, 15)$ e $(6, 10, 13)$, respetivamente;
- a reta EF é definida pela equação $(x, y, z) = (1, -2, 19) + k(-3, -2, 2),\ k \in \mathbb{R}$

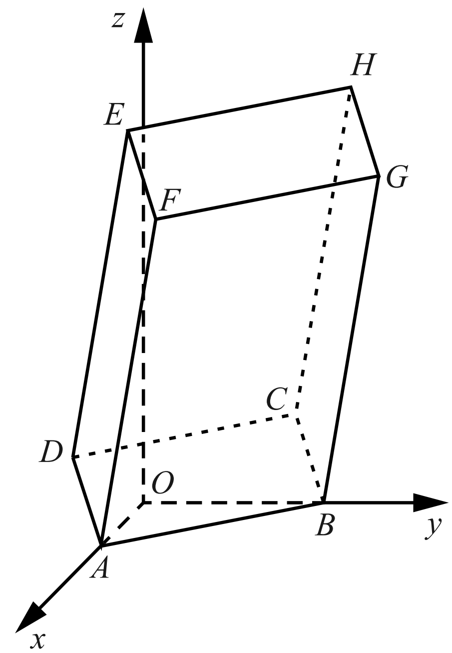

Figura 4

4.1. Qual das equações seguintes define uma reta perpendicular à reta EF e que passa no ponto E?

Opção(A) $(x, y, z) = (7, -3, 3) + k(2, -3, 0),\ k \in \mathbb{R}$
Opção(B) $(x, y, z) = (7, 2, 15) + k(0, 3, -3),\ k \in \mathbb{R}$
Opção(C) $(x, y, z) = (7, -10, 3) + k(0, 3, 3),\ k \in \mathbb{R}$
Opção(D) $(x, y, z) = (7, 2, 15) + k(2, 0, -3),\ k \in \mathbb{R}$

4.2. Determine, sem recorrer à calculadora, a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto B e que passa no ponto D.

2021, 1ª fase

5. Na Figura 5, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um trapézio [PQRS], de bases [PQ] e [RS], em que o lado [PS] é perpendicular às bases.
Tem-se $P(1,-1,2)$, $Q(-2,1,1)$ e $R(-5,5,-3)$

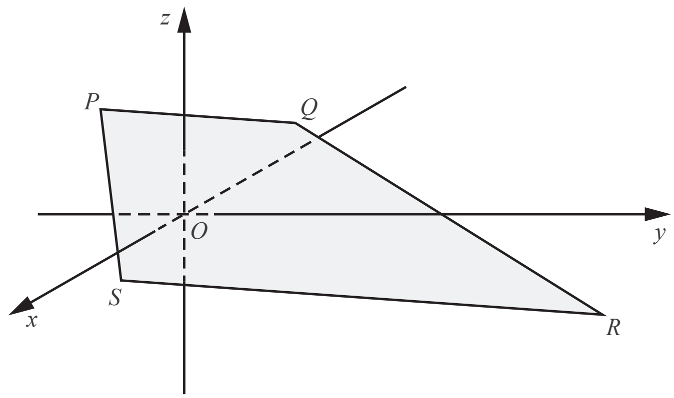

Figura 5

5.1. Qual das condições seguintes define a superfície esférica de centro no ponto R e que passa no ponto Q?

Opção(A) $(x-5)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=59$
Opção(B) $(x-5)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=41$
Opção(C) $(x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=41$
Opção(D) $(x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=59$

5.2. Determine uma equação do plano perpendicular à reta RS e que passa no ponto P Apresente essa equação na forma $ax+by+cz+d=0$

2021, 2ª fase

6. Na Figura 6, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide regular de base quadrada [ABCD] e vértice E

Sabe-se que:

- a base da pirâmide está contida no plano xOz
- o vértice A pertence ao semieixo positivo Oz e o vértice B pertence ao semieixo negativo Ox
- o vértice E tem coordenadas $(-2, 6, 2)$
- o vetor $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas $(-1, 6, 2)$
- o volume da pirâmide é 20

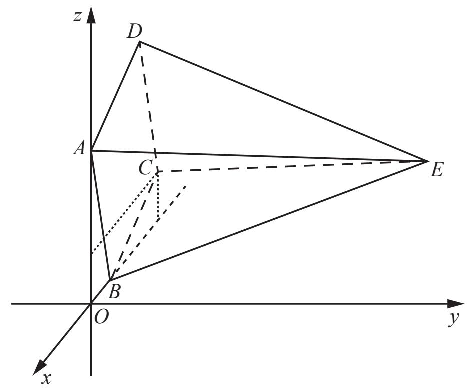

Figura 6

6.1. Seja a o plano perpendicular à reta BE e que passa no ponto de coordenadas $(1, 0, 1)$

Qual das equações seguintes é uma equação do plano α?

(A) $x + 6y + 2z - 3 = 0$ **(B)** $-x + 6y + 2z = 0$

(C) $x - 6y - 2z + 1 = 0$ **(D)** $2x - y + 4z - 5 = 0$

6.2. Determine, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$

2021, Época especial

7. Na Figura 7, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro reto.

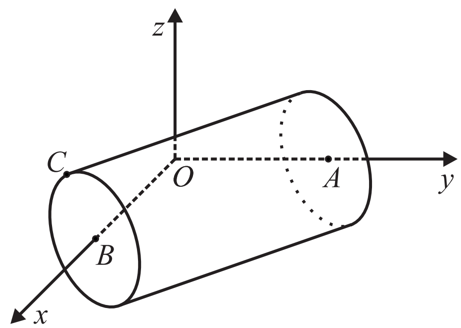

Figura 7

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Oy e é o centro de uma das bases do cilindro, e o ponto B pertence ao eixo Ox e é o centro da outra base;
- o ponto C pertence à circunferência de centro B que delimita uma das bases do cilindro;
- o plano ABC é definido pela equação $3x + 4y + 4z - 12 = 0$

Resolva os itens 5.1. e 5.2. sem recorrer à calculadora.

7.1. Determine $\overline{BC}$, sabendo que o volume do cilindro é igual a 10π

7.2. Seja P o ponto de coordenadas $(3, 5, 6)$
Determine as coordenadas do ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P

2020, 1ª fase

8. Na Figura 8, está representado, num referencial o.n. Oxyz, o cubo [ABCDEFGH] (o ponto H não está representado na figura).

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(7, 1, 4)$
- o ponto G tem coordenadas $(5, 3, 6)$
- a reta AE é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (7, 1, 4) + k(3, -6, 2)$, $k \in \mathbb{R}$

Resolva os itens 1.1. e 1.2. sem recorrer à calculadora.

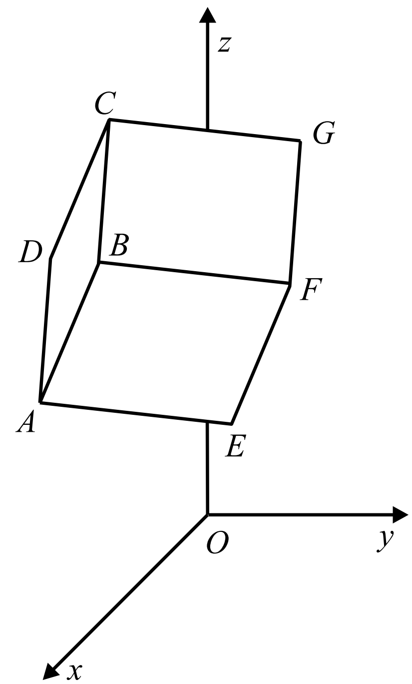

Figura 8

8.1. Determine uma equação do plano EFG
Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$

8.2. Determine a equação reduzida da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo.

2020, 2ª fase

9. Na Figura 9, está representado, num referencial o.n. Oxyz, um cubo $[ABCDEFGH]$ em que cada aresta é paralela a um dos eixos coordenados. Sabe-se que:

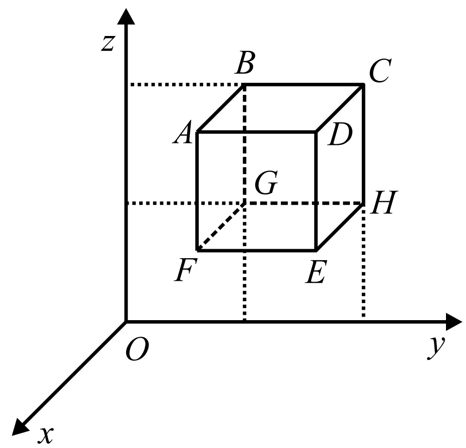

Figura 9

- o vértice B tem coordenadas $(0, 2, 4)$
- o vetor $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas $(2, 2, -2)$
- a aresta $[BG]$ é paralela ao eixo Oz

9.1. Determine a amplitude do ângulo OBE

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

9.2. Seja α o plano que passa por G e é perpendicular à reta OE

Sejam P, Q e R os pontos de α que pertencem aos eixos coordenados.

Determine o volume da pirâmide $[OPQR]$

2020, Época especial

10. Na figura 10, está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular [ABCDV]

    Os vértices A e C têm coordenadas $(2,1,0)$ e $(0,-1,2)$, respectivamente.
    O vértice V tem coordenadas $(3,-1,2)$

    Determine uma equação do plano que contém a base da pirâmide.
    Apresente essa equação na forma $ax+by+cz+d=0$

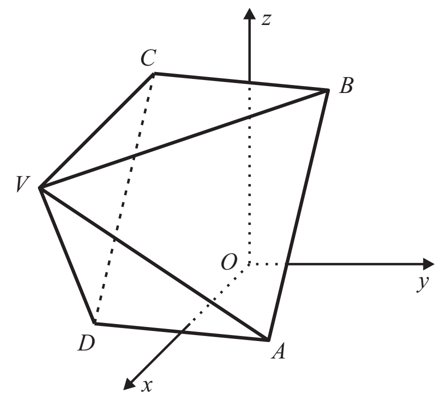

Figura 10

    2019, 1ª fase, caderno 1

11. Na Figura 11, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$

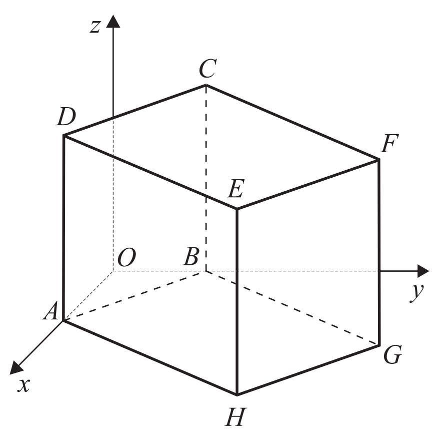

Figura 11

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy
- o vértice C tem coordenadas $(0, 3, 6)$ e o vértice G tem coordenadas $(6, 11, 0)$
- o plano ABC é definido pela equação $3x + 4y - 12 = 0$

11.1. Determine o volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$

11.2. Seja P o ponto de coordenadas $(1, -4, 3)$, e seja r a reta que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano ABC

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ABC

2019, 2ª fase, caderno 1

12. Considere, num referencial o.n. Oxyz

- o plano α, de equação $2x + 3y - z - 9 = 0$
- a reta r, de equação vetorial $(x, y, z) = (1, 2, 1) + k(0, 1, 5),\ \ k \in \mathbb{R}$

12.1. Seja A o ponto da reta r cuja ordenada é igual a 4

Determine uma equação do plano que é paralelo ao plano α e que passa pelo ponto A

Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$

12.2. Seja P o ponto de intersecção da reta r com o plano α

Determine as coordenadas do ponto P

2019, Época especial, caderno 1

13. Na Figura 12, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma hexagonal regular.
Sabe-se que:

- $[PQ]$ e $[QR]$ são arestas de uma das bases do prisma;
- $\overline{PQ} = 4$

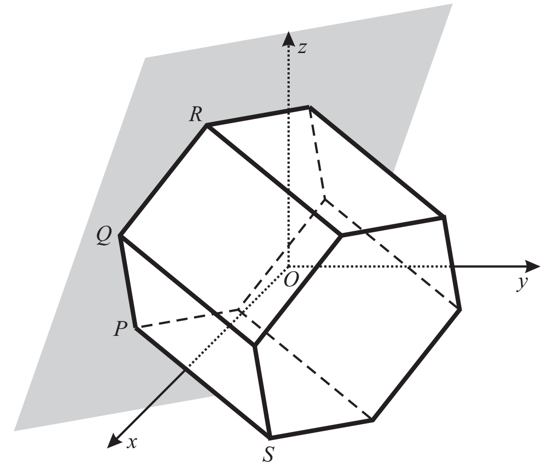

Figura 12

Sabe-se ainda que:

- o plano PQR tem equação $2x+3y-z-15=0$
- uma das arestas laterais do prisma é o segmento de reta $[PS]$, em que S é o ponto de coordenadas $(14,5,0)$

Determine a área lateral do prisma.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2018, 1ª fase, caderno 1

14. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=10$$

Seja P o ponto da superfície esférica de abcissa 1, ordenada 3 e cota negativa.

Seja r a reta de equação vetorial $(x,y,z)=(-1,0,3)+k(4,1,-2),\ k\in\mathbb{R}$

Determine uma equação do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta r

Apresente essa equação na forma $ax+by+cz+d=0$

2018, 2ª fase, caderno 1

15. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2=3$ e o ponto P de coordenadas $(1,1,1)$, pertencente a essa superfície esférica.

Seja $\vec{u}=-2\overrightarrow{OP}$ e seja $Q=P+\vec{u}$
Determine as coordenadas do ponto Q e refira, no contexto do problema, o significado de $[PQ]$

2018, Época especial, caderno 1

16. Na Figura 13, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OPQRSTUV]$

Sabe-se que:

- a face $[OPQR]$ está contida no plano xOy
- o vértice Q pertence ao eixo Oy e o vértice T pertence ao eixo Oz
- o plano STU tem equação $z=3$

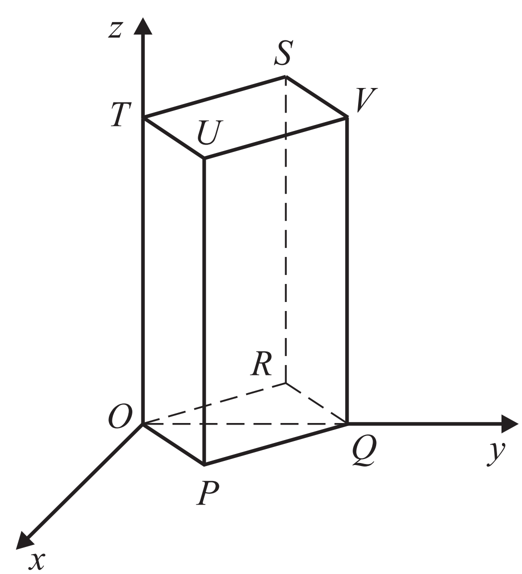

Figura 13

16.1. Seja T' o simétrico do ponto T , relativamente à origem do referencial.
Escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro $[TT']$

16.2. Uma equação do plano PQV é $x+y=2$
Determine uma condição cartesiana que defina a reta TQ

2017, 1ª fase, grupo II

17. Na Figura 14, está representado, num referencial o.n. Oxyz, o cubo $[ABCDEFGH]$ Sabe-se que:

- a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy
- a aresta $[CD]$ está contida no eixo Oy
- o ponto D tem coordenadas $(0, 4, 0)$
- o plano ACG é definido pela equação $x + y - z - 6 = 0$

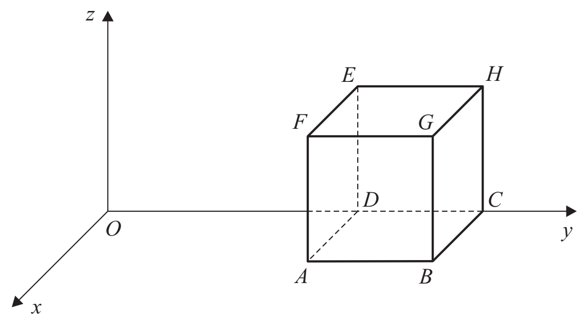

Figura 14

Seja P o vértice de uma pirâmide regular de base $[EFGH]$ Sabe-se que:

- a cota do ponto P é superior a 2
- o volume da pirâmide é 4

17.1. Verifique que o vértice A tem abcissa igual a 2

17.2. Seja r a reta definida pela condição $x - 1 = 1 - y = z$

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG

2017, 2ª fase, grupo II

18. Na Figura 15, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro de revolução de altura 3

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 2, 0)$ e é o centro da base inferior do cilindro, a qual está contida no plano xOy
- o ponto B tem coordenadas $(1, 3, 0)$ e pertence à circunferência que delimita a base inferior do cilindro;
- o ponto C é o centro da base superior do cilindro.

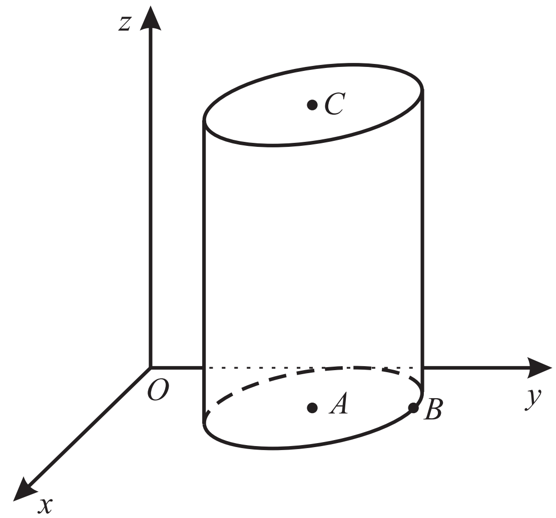

Figura 15

18.1. Determine a área da secção produzida no cilindro pelo plano de equação $x = 1$

18.2. Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta BC com o plano xOz

2017, Época especial, grupo II

19. Na Figura 16, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$

Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ da pirâmide é paralela ao plano xOy
- o ponto A tem coordenadas $(-1, 1, 1)$
- o ponto C tem coordenadas $(-3, 3, 1)$
- o plano BCV é definido pela equação $3y + z - 10 = 0$

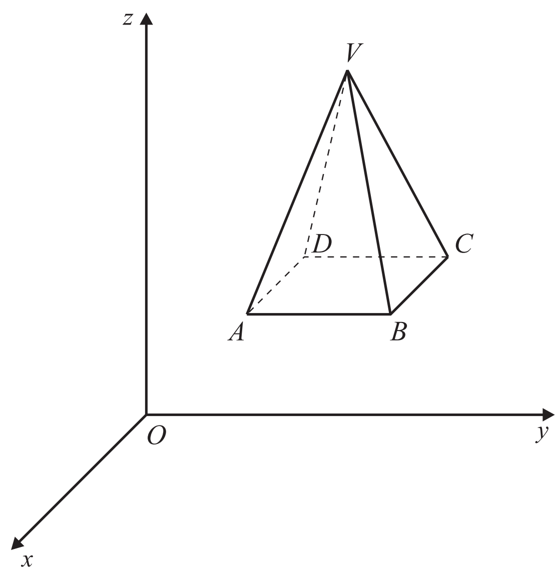

Figura 16

19.1. Escreva uma condição que defina a Oy superfície esférica de centro no ponto A e que é tangente ao plano xOy

19.2. Determine as coordenadas do ponto V

19.3. Seja α o plano perpendicular à reta AC e que passa no ponto $P(1, -2, -1)$
A intersecção dos planos α e BCV é uma reta.
Escreva uma equação vetorial dessa reta.

2016, 1ª fase, grupo II

20. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido pela equação $3x + 2y + 4z - 12 = 0$

20.1. Seja C o ponto de coordenadas $(2, 1, 4)$

Escreva uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α que passa no ponto C

20.2. Seja D o ponto de coordenadas $(4, 2, 2)$

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta OD com o plano α

2016, 2ª fase, grupo II

21. Na Figura 17, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OABCDEFG]$

Sabe-se que:

- os pontos C, A e E pertencem aos eixos coordenados Ox, Oy e Oz, respetivamente;
- o ponto A tem coordenadas $(0, 2, 0)$
- o plano OFB é definido pela equação $3x + 3y - z = 0$

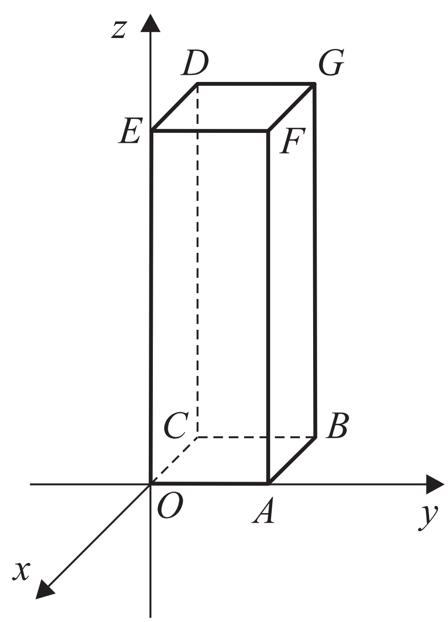

Figura 17

21.1. Determine uma equação do plano paralelo ao plano OFB que passa no ponto D

21.2. Defina a reta OB por uma condição cartesiana.

2016, Época especial, grupo II

22. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(0,0,2)$ e $B(4,0,0)$

22.1. Considere o plano α de equação $x - 2y + z + 3 = 0$

Escreva uma equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano α

22.2. Determine uma equação cartesiana que defina a superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro.

2015, 1ª fase, grupo II

23. Na Figura 18, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[NOPQRSTUV]$ que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- o vértice P pertence ao eixo Ox
- o vértice N pertence ao eixo Oy
- o vértice T pertence ao eixo Oz
- o vértice R tem coordenadas $(2,2,2)$
- o plano PQV é definido pela equação $6x + z - 12 = 0$

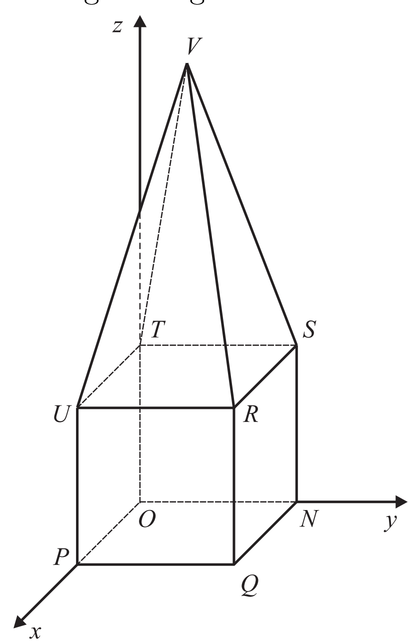

Figura 18

23.1. Determine as coordenadas do ponto V

23.2. Escreva uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta OR

2015, 2ª fase, grupo II

24. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano β definido pela condição $2x - y + z - 4 = 0$

24.1. Considere o ponto $P(-2, 1, 3)$, sendo a um certo número real.

Sabe-se que a reta OP é perpendicular ao plano β, sendo O a origem do referencial.

Determine o valor de a

24.2. Determine uma equação da superfície esférica de centro na origem do referencial, que é tangente ao plano β

Na resolução deste item, tenha em conta que o raio relativo ao ponto de tangência é perpendicular ao plano β

2015, Época especial, grupo II