Exercícios de exames - Números complexos

1. Na Figura 1, estão representados, no plano complexo, os afixos de cinco números complexos.

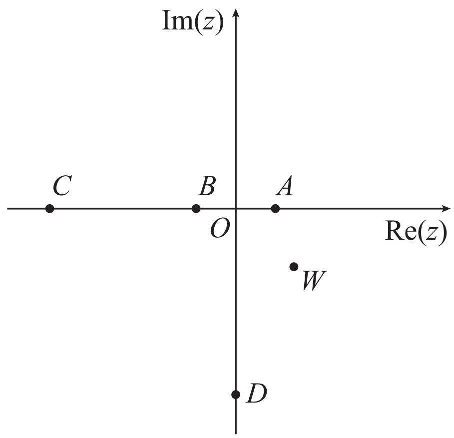


Figura 1

O ponto A pertence ao semieixo real positivo, os pontos B e C pertencem ao semieixo real negativo, e o ponto D pertence ao semieixo imaginário negativo.
O ponto W é o afixo de um número complexo w tal que $Im(w) = -Re(w)$ e $Re(w) > 1$.
Qual dos pontos seguintes pode ser o afixo do número complexo $-iw^2$?

(A) Ponto A **(B)** Ponto B **(C)** Ponto C **(D)** Ponto D

2022, 1ªfase

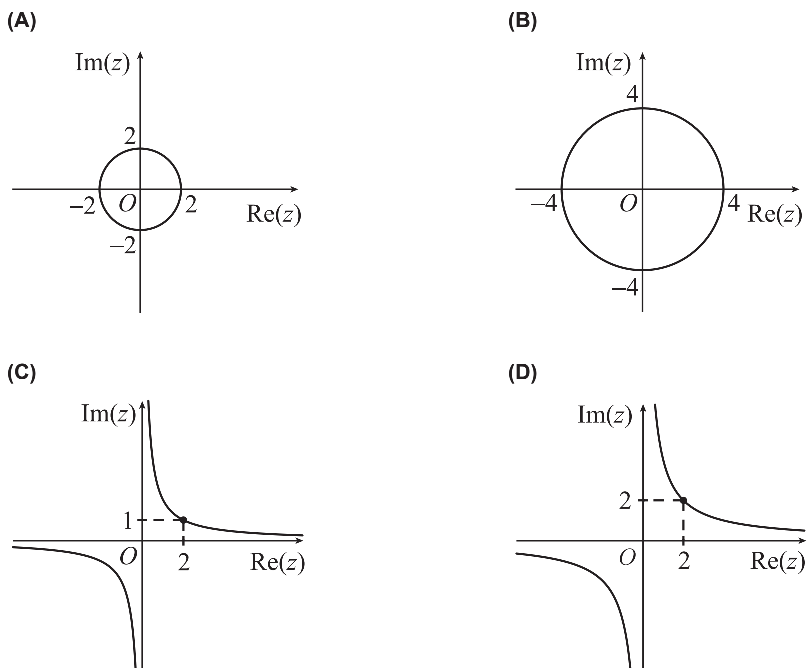
2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a equação $z^3 = \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}i}\right)^6$

Determine o número complexo que é solução da equação e cujo afixo, no plano complexo, pertence ao terceiro quadrante.
Apresente o resultado na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

2022, 1ªfase

3. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $z \times \overline{z} = 4$.

   Em qual das opções seguintes está representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?



2022, 2ªfase

4. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

   Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número complexo $z = \frac{4}{1-i} + 4i^{18}$.

   O número complexo z é uma das raízes cúbicas de um número complexo w.

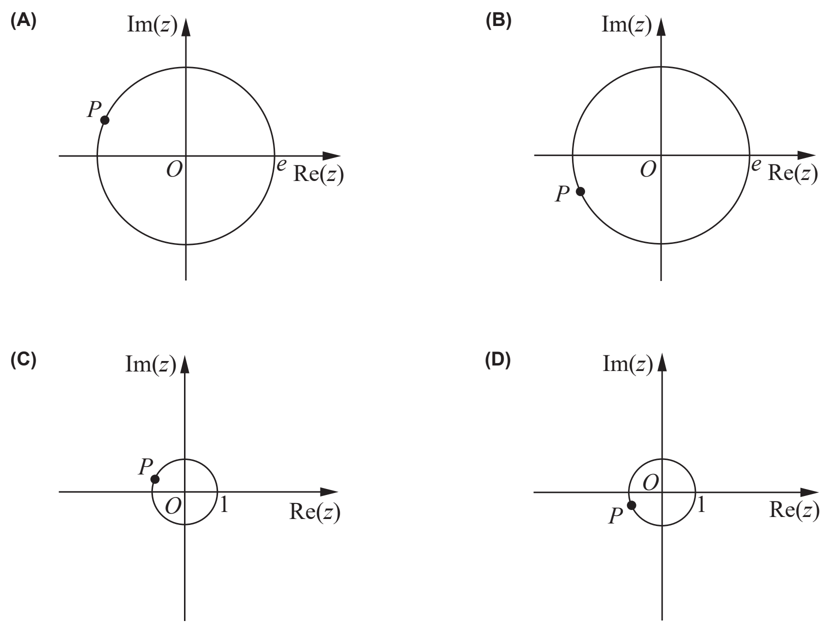
   Determine as restantes raízes cúbicas de w e apresente-as na forma trigonométrica.

2022, 2ªfase

5. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z = e\,e^{ie}$.

   Seja P o afixo de z no plano complexo.

   Em qual das opções seguintes pode estar representado, no plano complexo, o ponto P?



   2022, Época especial

6. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números complexos z_1 e z_2, dados por:

   - $z_1 = (1+i)^2 \times (2+i) + i^7$;
   - $z_2 = \sin\theta + i\cos\theta$, com $\theta \in [0, 2\pi[$.

   Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de θ tal que $z_1 \times z_2 = 3 + 2i$.

   2022, Época especial

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{28}}$

Seja w o número complexo tal que $w = \frac{z_1}{z_2}$

Sabe-se que, no plano complexo, o afixo do número complexo w é um dos vértices de um polígono regular com centro na origem do referencial e com outro vértice sobre o semieixo real positivo.

Qual é o número mínimo de vértices desse polígono?

(A) 7 **(B)** 14 **(C)** 21 **(D)** 28

2021, 1ªfase

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = -3+2i$, $z_2 = 1+2i$ e $z_3 = 2-i$

Seja w o número complexo tal que $w = \frac{z_1 \times z_2}{z_3}$

Mostre, sem recorrer à calculadora, que a proposição seguinte é verdadeira.

$$|w| = \sqrt{13} \ \wedge \ Arg(w) \in \left] -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right[$$

2021, 1ªfase

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 2e^{i\frac{3\pi}{5}}$

Seja w o número complexo tal que $z \times w = i$

Qual dos valores seguintes é um argumento do número complexo w?

(A) $\frac{19\pi}{10}$ **(B)** $\frac{2\pi}{5}$ **(C)** $-\frac{2\pi}{5}$ **(D)** $-\frac{19\pi}{10}$

2021, 2ªfase

10. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $(1+2i)z + (1-2i)\overline{z} + 10 = 0$ define, no plano complexo, uma reta.

Considere todos os números complexos cujos afixos pertencem a esta reta.

Determine qual deles tem menor módulo.

Apresente esse número complexo na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$

2021, 2ªfase

11. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

11.1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números complexos z_1 e z_2 tais que, para $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $z_1 = e^{i\theta}$ e $z_2 = 2e^{i(\theta+\pi)}$

A qual dos quadrantes do plano complexo pertence o afixo do número complexo $z_1 + z_2$?

(A) Primeiro **(B)** Segundo **(C)** Terceiro **(D)** Quarto

2021, Época especial

11.2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam $z_1 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_2 = 2i$

Determine, sem recorrer à calculadora, os números complexos z que são solução da equação

$$iz^2 + {z_1}^2 \times (\overline{z_2})^3 - 2 = 0$$

Apresente esses números na forma trigonométrica.

2021, Época especial

11.3. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 = \overline{z}$

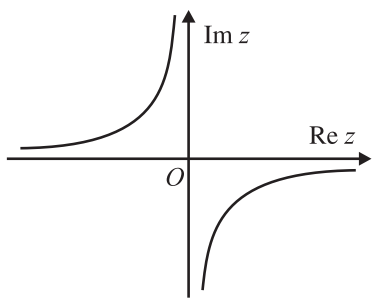
Sabe-se que, no plano complexo, os afixos dos números complexos não nulos que são soluções desta equação são os vértices de um polígono regular.

Determine o perímetro desse polígono.

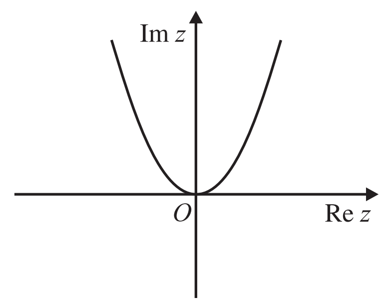
11.4. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $Re(z) \times Im(z) = 1$

Em qual das opções seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

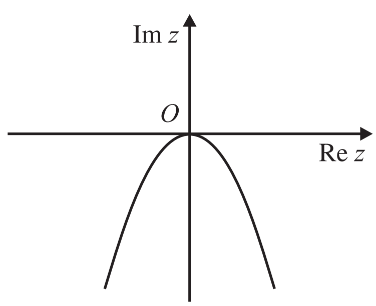
(A)



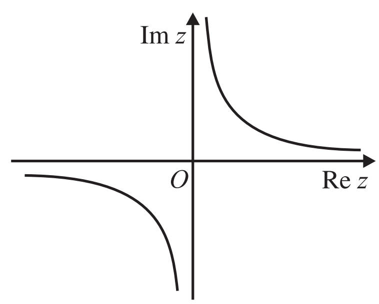
(B)



(C)



(D)



2020, 1ª fase

12. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

12.1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja $z_1 = \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^2}$ e seja z_2 um número complexo tal que $|z_2| = \sqrt{5}$

Sabe-se que, no plano complexo, o afixo de $z_1 \times z_2$ tem coordenadas positivas e iguais.

Determine z_2

Apresente a resposta na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$

12.2. Seja k um número real.

Sabe-se que $k + i$ é uma das raízes quadradas do número complexo $3 - 4i$

Qual é o valor de k?

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** -2

2020, 2ª fase

13. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z_1 = -1 - i$

13.1. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais a e b, de forma que z_1 seja solução da equação $\frac{a}{z^2} + bz^4 = -2 + i$

13.2. Na Figura 2, está representado, no plano complexo, o triângulo equilátero $[OFG]$

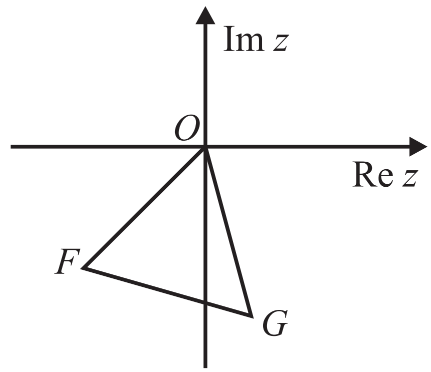


Figura 2

Sabe-se que o ponto F é a imagem geométrica do número complexo z_1 e que o ponto G é a imagem geométrica do número complexo $z_1 \times z_2$ e pertence ao quarto quadrante.
A que é igual o número complexo z_2?

(A) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ **(B)** $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **(C)** $1 + \sqrt{2}i$ **(D)** $1 + \sqrt{3}i$

2020, Época especial

14. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = -1 + 2i$
Seja θ o menor argumento positivo do número complexo $\overline{z}$ (conjugado de z).
A qual dos intervalos seguintes pertence θ?

(A) $]0, \frac{\pi}{4}[$ **(B)** $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ **(C)** $]\pi, \frac{5\pi}{4}[$ **(D)** $]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}[$

2019, 1ª fase, caderno 1

15. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 4 + 6i$
Seja $w = \frac{z_1 + i^6 + 2\overline{z_1}}{z_1 - z_2}$

No plano complexo, a condição $|z| = |w| \wedge Im(z) \geq 0 \wedge Re(z) \geq 0$ define uma linha. Determine o comprimento dessa linha.

2019, 1ª fase, caderno 2

16. Na Figura 3, está representado, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$

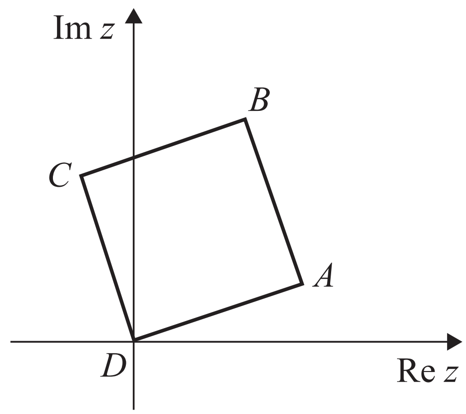


Figura 3

Sabe-se que o ponto A é o afixo (imagem geométrica) de um número complexo z e que o ponto D é o afixo (imagem geométrica) do complexo nulo.

Qual é o número complexo cujo afixo (imagem geométrica) é o ponto B?

(A) $z(1+i)$ **(B)** iz **(C)** $i^3 z$ **(D)** $z(2+i)$

2019, 2ª fase, caderno 1

17. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 1 - 2i$
Mostre que o afixo (imagem geométrica) do número complexo $w = \frac{3z_1 - i\overline{z_2}}{1+i^7}$ pertence

à circunferência de centro no afixo (imagem geométrica) de z_1 e raio igual a $\sqrt{53}$

2019, 2ª fase, caderno 2

18. Na Figura 4, está representado, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$, cujo centro coincide com a origem.

Os pontos A, B, C e D são os afixos (imagens geométricas) dos números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4, respetivamente.

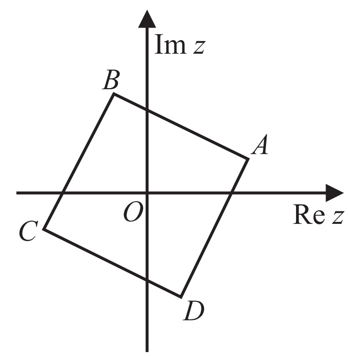


Figura 4

A que é igual $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$?

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

2019, Época especial, caderno 1

19. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \frac{5+(1+i)^4}{2+2i^{15}} - \frac{i}{2}$

Determine o menor número natural n para o qual z^n é um número real negativo.

2019, Época especial, caderno 2

20. Para um certo número real x, pertencente ao intervalo $]0, \frac{\pi}{12}[$, o número complexo $z = (\cos x + i \sin x)^{10}$ verifica a condição $Im(z) = \frac{1}{3}Re(z)$

Qual é o valor de x arredondado às centésimas?

(A) $0,02$ **(B)** $0,03$ **(C)** $0,12$ **(D)** $0,13$

2018, 1ª fase, caderno 1

21. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = 1 + \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}i^5}{1+2i}$

    Sabe-se que w é uma raiz quarta de um certo complexo z

    Determine a raiz quarta de z cujo afixo (imagem geométrica) pertence ao primeiro quadrante.

    Apresente o resultado na forma trigonométrica, com argumento pertencente ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$

2018, 1ª fase, caderno 2

22. Na Figura 5, está representado, no plano complexo, um pentágono regular $[ABCDE]$ inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1

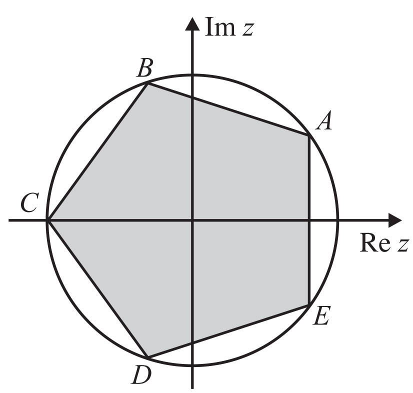


Figura 5

Sabe-se que o ponto C pertence ao semieixo real negativo.

Seja z o número complexo cujo afixo (imagem geométrica) é o ponto A

Qual é o valor de z^5 ?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** i **(D)** $-i$

2018, 2ª fase, caderno 1

23. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \frac{(2-i)^2+1+i}{1-2i} + 3i^{15}$

Escreva o complexo $-\frac{1}{2} \times \overline{z}$ na forma trigonométrica.

2018, 2ª fase, caderno 2

24. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a expressão $i^0 + i + i^2 + ... + i^{2018}$ é igual a

(A) i **(B)** $-i$ **(C)** $-1+i$ **(D)** $1+i$

2018, Época especial, caderno 1

25. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z^4 + 16 = 0 \wedge Re(z) < 0\}$$

Determine os elementos do conjunto A e apresente-os na forma algébrica.

2018, Época especial, caderno 2

26. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$\frac{5\pi}{4} \leq arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \wedge Im(z) \geq -1$$

No plano complexo, esta condição define uma região.

Qual é a área dessa região?

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** 1

2017, 1ª fase, grupo I

27. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam

$$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} \qquad \text{e} \qquad z_2 = -3kcis(\tfrac{3\pi}{2}), \quad \text{com } k \in \mathbb{R}^+$$

Sabe-se que, no plano complexo, a distância entre a imagem geométrica de z_1 e a imagem geométrica de z_2 é igual a $\sqrt{5}$

Qual é o valor de k ?

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

2017, 1ª fase, grupo II

28. Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{5}$

Qual dos seguintes valores é um argumento do número complexo $-5iz$?

(A) $-\frac{3\pi}{10}$ **(B)** $-\frac{4\pi}{5}$ **(C)** $-\frac{7\pi}{5}$ **(D)** $-\frac{13\pi}{10}$

2017, 2ª fase, grupo I

29. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam z_1 e z_2 tais que $z_1 = 2+i$ e $z_1 \times \overline{z_2} = 4-3i$

Considere a condição $|z-z_1| = |z-z_2|$

Mostre que o número complexo $\sqrt{2}cis\frac{\pi}{4}$ verifica esta condição e interprete geometricamente este facto.

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

2017, 2ª fase, grupo II

30. Na Figura 6, estão representados, no plano complexo, uma circunferência de centro na origem e dois diâmetros perpendiculares dessa circunferência, $[AC]$ e $[BD]$

Sabe-se que o ponto A é a imagem geométrica de um certo complexo z

Qual é a imagem geométrica do complexo i^3z ?

(A) Ponto A **(B)** Ponto B
(C) Ponto C **(D)** Ponto D

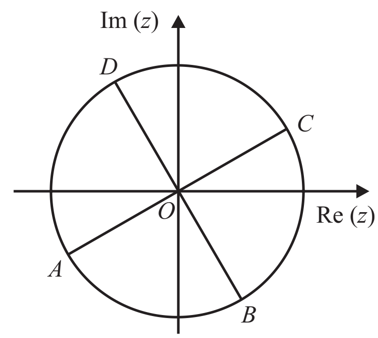


Figura 6

2017, Época especial, grupo I

31. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

- $z_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}cis\theta}$, com $\theta \in]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}[$
- $w = \overline{z_1} \times z_1^4$

Seja $A = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0 \ \wedge \ Im(z) > 0 \ \wedge \ |z| = 1\}$
Justifique que o número complexo w pertence ao conjunto A

2017, Época especial, grupo II

32. Seja θ um número real pertencente ao intervalo $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$

Considere o número complexo $z = -3cis\theta$

A que quadrante pertence a imagem geométrica do complexo z ?

(A) Primeiro **(B)** Segundo **(C)** Terceiro **(D)** Quarto

2016, 1ª fase, grupo I

33. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = \frac{8cis\theta}{-1+\sqrt{3}i} \quad \text{e} \quad z_2 = cis(2\theta)$$

Determine o valor de θ pertencente ao intervalo $]0, \pi[$, de modo que $\overline{z_1} \times z_2$ seja um número real.

2016, 1ª fase, grupo II

34. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = 3 + 4i$

Sabe-se que z é uma das raízes de índice 6 de um certo número complexo w

Considere, no plano complexo, o polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 6 desse número complexo w

Qual é o perímetro do polígono?

(A) 42 **(B)** 36 **(C)** 30 **(D)** 24

2016, 2ª fase, grupo I

35. Seja ρ um número real positivo, e seja θ um número real pertencente ao intervalo $]0,\pi[$

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \frac{-1+i}{(\rho cis\theta)^2}$ e $w = -\sqrt{2}i$

Sabe-se que $z = w$

Determine o valor de ρ e o valor de θ

2016, 2ª fase, grupo II

36. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$0 \leq arg(z) \leq \frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad 1 \leq Re z \leq 5$$

Esta condição define uma região no plano complexo.

Qual dos seguintes números complexos tem a sua imagem geométrica nesta região?

(A) $3+4i$ **(B)** $6+2i$ **(C)** $2cis\frac{13\pi}{6}$ **(D)** $cis\frac{\pi}{6}$

2016, Época especial, grupo I

37. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = \frac{2i}{1-i} + 2i^{23}$

Determine, sem recorrer à calculadora, os números complexos w tais que $w^3 = \overline{z}$

Apresente os valores pedidos na forma trigonométrica.

2016, Época especial, grupo II

38. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$|z+4-4i| = 3 \quad \wedge \quad \frac{\pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$$

No plano complexo, esta condição define uma linha.

Qual é o comprimento dessa linha?

(A) π

(B) 2π

(C) 3π

(D) 4π

2015, 1ª fase, grupo I

39. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \frac{-2+2i^{19}}{\sqrt{2}\, cis\theta}$

Determine os valores de θ pertencentes ao intervalo $]0, 2\pi[$, para os quais z é um número imaginário puro.

Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

2015, 1ª fase, grupo II

40. Na Figura 7, está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero $[OAB]$ Sabe-se que

- o ponto O é a origem do referencial;
- o ponto A pertence ao eixo real e tem abcissa igual a 1
- o ponto B pertence ao quarto quadrante e é a imagem geométrica de um complexo z

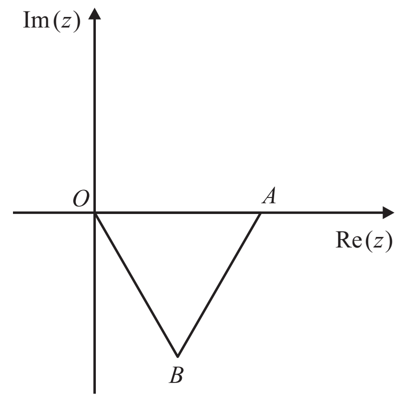


Figura 7

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $z = \sqrt{3} cis \frac{11\pi}{6}$
(B) $z = cis \frac{11\pi}{6}$
(C) $z = \sqrt{3} cis \frac{5\pi}{3}$
(D) $z = cis \frac{5\pi}{3}$

2015, 2ª fase, grupo I

41. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2} cis \frac{\pi}{12}}$
Determine os números complexos z que são solução da equação $z^4 = \overline{z_1}$, sem utilizar a calculadora.
Apresente esses números na forma trigonométrica.

2015, 2ª fase, grupo II

42. Na Figura 8, está representado, no plano complexo, um quadrado cujo centro coincide com a origem e em que cada lado é paralelo a um eixo.
Os vértices deste quadrado são as imagens geométricas dos complexos z_1, z_2, z_3 e z_4

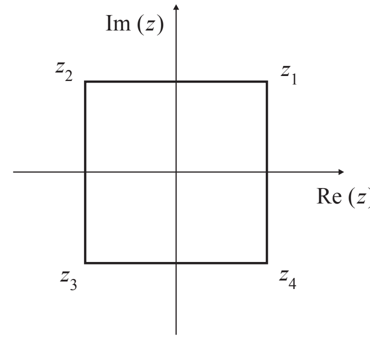


Figura 8

Qual das afirmações seguintes é falsa?

(A) $|z_3 - z_1| = |z_4 - z_2|$

(B) $z_1 + z_4 = 2\,Re(z_1)$

(C) $\frac{z_4}{i} = z_1$

(D) $-\overline{z_1} = z_2$

2015, Época especial, grupo I

43. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = (1+i)^6$ e $z_2 = \frac{8i}{cis(-\frac{6\pi}{5})}$

Sabe-se que as imagens geométricas dos complexos z_1 e z_2 são vértices consecutivos de um polígono regular de n lados, com centro na origem do referencial.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de n

2015, Época especial, grupo II