

## Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

## Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2021

1.

- 1.1. Sabendo que o plano  $\alpha$  é perpendicular à reta BE então o vetor normal ao plano  $\alpha$  tem de ser colinear com o vetor  $\overrightarrow{BE}$ .

O vetor normal ao plano da opção A, de coordenadas  $(-1, 6, 2)$ , é colinear com o vetor  $\overrightarrow{BE}$ . Da mesma forma o vetor normal ao plano da opção C, de coordenadas  $(1, -6, -2)$  também é colinear com o vetor  $\overrightarrow{BE}$ .

Como os vetores normais aos planos da opções B e D não são colineares com o vetor  $\overrightarrow{BE}$  excluimos estas duas opções.

Vamos verificar se o ponto de coordenadas  $(1, 0, 1)$  pertence ao plano da opção A:

$$-x + 6y + 2z = 0 \Leftrightarrow -1 + 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \quad (\text{Não pertence})$$

Só pode ser a opção C mas vamos confirmar que o ponto de coordenadas  $(1, 0, 1)$  pertence ao plano da opção C:

$$x - 6y - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + 0 - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad (\text{Pertence})$$

**Opção(C)**

- 1.2. Com as coordenadas do ponto E e do vetor  $\overrightarrow{BE}$  conseguimos calcular as coordenadas do ponto B:

$$\overrightarrow{BE} = E - B \Leftrightarrow B = (-2, 6, 2) - (-1, 6, 2) \Leftrightarrow B = (-1, 0, 0)$$

Através da fórmula do volume da pirâmide vamos determinar a área da base quadrada da pirâmide:

$$V_{[ABCDE]} = \frac{A_b \times h}{3} \Leftrightarrow 20 = \frac{A_b \times 6}{3} \Leftrightarrow A_b = 10$$

Como  $A_b = 10$  então aresta  $_{base} = d(AB) = \sqrt{10}$ .

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo [OAB], vamos determinar a distância do ponto  $O$  ao ponto  $A$ :

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2 \Leftrightarrow (\sqrt{10})^2 = 1^2 + d^2(OA) \Leftrightarrow d^2(OA) = 9 \Leftrightarrow d(OA) = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d(OA) = 3$$

Ou seja o ponto  $A$  tem coordenadas  $(0,0,3)$ .

Calculando as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AB}$ :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 0, 0) - (0, 0, 3) = (-1, 0, -3)$$

2. Vamos começar por considerar o ângulo  $\alpha = \widehat{POT}$ .

Observando a figura sabemos que o ponto  $A$  tem coordenadas  $A(r, 0)$  e o ponto  $B$  tem coordenadas  $B(0, r)$ .

Usando as razões trigonométricas no triângulo [TOP] concluímos que o ponto  $P$  tem coordenadas  $P(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ .

$$\overline{BS} + \overline{AT} = y_B - y_P + x_A - x_P = r - r \sin \alpha + r - r \cos \alpha = 2r - r \sin \alpha - r \cos \alpha = \\ = r(2 - \sin \alpha - r \cos \alpha)$$

Usando uma regra de três simples e sabendo que o perímetro de uma circunferência igual a  $2\pi r$ , conseguimos escrever  $\alpha$  em função de  $d$  e de  $r$ :

Perímetro	Ângulo
$2\pi r$	————— $2\pi$
$d$	————— $\alpha$

Logo vem que  $\alpha = \frac{d}{r}$

$$\overline{BS} + \overline{AT} = r(2 - \sin \alpha - r \cos \alpha) = r\left(2 - \sin\left(\frac{d}{r}\right) - r \cos\left(\frac{d}{r}\right)\right)$$

3. Existem ao todo  $11 \times 11 = 121$  pontos que pertencem a esta região e cujas coordenadas são números inteiros.

Substituindo, na equação da reta, o  $x$  (abscissa) por  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  podemos determinar quais deste 121 pontos pertencem à reta  $y = x + 7$ :

Se  $x = 0, y = 7$

O ponto  $(0, 7)$  pertence à reta

Se  $x = 1, y = 8$

O ponto  $(1, 8)$  pertence à reta

Se  $x = 2, y = 9$

O ponto  $(2, 9)$  pertence à reta

Se  $x = 3, y = 10$

O ponto  $(3, 10)$  pertence à reta

Se  $x = 4, y = 11$

O ponto  $(4, 11)$  não pertence à reta

Concluimos que nesta região só existem 4 pontos pertencentes à reta de equação  $y = x + 7$ .

A probabilidade do ponto pertencer à reta de equação  $y = x + 7$  é igual a:

$$\frac{4}{121} \approx 0,033$$

### Opção(B)

4. Consideremos um conjunto de doze objetos constituído por cinco livros e sete canetas.

A Fernanda vai oferecer três livros e três canetas a um dos netos e os restantes objetos ao outro, ou seja, a ordem de escolha dos objetos não interessa e este conjunto pode ficar com um neto ou com o outro, o que equivale a:

$${}^5C_3 \times {}^7C_3 \times 2 = 700$$

Ou então, a Fernanda vai dar quatro livros e duas canetas a um dos netos, mais uma vez a ordem de escolha dos objetos não interessa e este conjunto pode ficar com um neto ou com o outro, que equivale a:

$${}^5C_4 \times {}^7C_2 \times 2 = 210$$

Logo a Fernanda tem  ${}^5C_3 \times {}^7C_3 \times 2 + {}^5C_4 \times {}^7C_2 \times 2 = 910$  maneiras diferentes de repartir os doze objetos pelos seus dois netos.

5. Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{P(A)}{2}$$

Aplicando as leis de morgan e sabendo que  $P(B) = \frac{3P(A)}{2}$ :

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = \\ &= 1 - [P(A) + \frac{3P(A)}{2} - \frac{P(A)}{2}] = 1 - [P(A) + P(A)] = 1 - 2P(A) \end{aligned}$$

Assim vem que:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) + 2P(A) = 1 - 2P(A) + 2P(A) = 1$$

6. Calculando o limite da sucessão:

$$\lim u_n = \lim (2n^2 - n) = \lim n^2 \left(2 - \frac{1}{n}\right) = +\infty$$

$$\lim f\left(\frac{1}{u_n}\right) = f\left(\frac{1}{\lim u_n}\right) = f\left(\frac{1}{+\infty}\right) = f(0^+) = +\infty$$

O gráfico da função  $f$  que verifica a condição  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  é o gráfico da opção A.

### Opção(A)

7. Consideremos a sucessão  $u_n = 2n + 1$ .

Calculando os primeiros termos de ordem ímpar da sucessão ( $u_n$ ):

$$u_1 = 3, \quad u_3 = 7, \quad u_5 = 11, \quad u_7 = 15, \dots$$

Conseguimos perceber que os termos de ordem ímpar da sucessão  $u_n = 2n + 1$  são os termos de uma progressão aritmética em que o primeiro termo é igual 3 e razão 4.

Vamos escrever o termo geral da progressão aritmética  $(r_n)$  em que o primeiro termo é igual 3 e razão 4:

$$r_n = 3 + (n - 1) \times 4 = 4n - 1$$

Assim vem que,  $r_{200} = 4 \times 200 - 1 = 799$

Calculando o valor da soma dos duzentos primeiros termos da progressão aritmética  $(r_n)$ :

A soma dos primeiros duzentos termos de ordem ímpar da sucessão  $(u_n)$  é igual à soma dos primeiros duzentos termos da progressão aritmética  $(r_n)$ :

$$S_{200} = \frac{u_1 + u_{200}}{2} \times 200 = \frac{3 + 799}{2} \times 200 = 80200$$

8. Vamos escrever os números complexos  $z_1$  e  $z_2$  na forma algébrica:

$$z_1 = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$z_2 = 2e^{i(\theta+\pi)} = 2(\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)) = 2(-\cos \theta - i \sin \theta) = -2 \cos \theta - 2i \sin \theta$$

$$z_1 + z_2 = \cos \theta + i \sin \theta - 2 \cos \theta - 2i \sin \theta = -\cos \theta - i \sin \theta$$

Logo o afixo do número complexo  $z_1 + z_2$  tem coordenadas  $(-\cos \theta, -\sin \theta)$ .

Como  $\theta$  pertence ao primeiro quadrante então  $\cos \theta > 0$  e  $\sin \theta > 0$ , ou seja,  $-\cos \theta < 0$  e  $-\sin \theta < 0$ . Concluimos que o afixo do número complexo  $z_1 + z_2$  pertence ao terceiro quadrante.

### Opção(C)

$$9. (z_1)^2 = \left(\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = \frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$(\bar{z}_2)^3 = (\bar{z}_2)^2 \times \bar{z}_2 = (-2i)^2 \times (-2i) = 4i^2 \times (-2i) = 8i = 8 e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Resolvendo a equação:

$$iz^2 + z_1^2 \times (\bar{z}_2)^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow iz^2 + \frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{2}} \times 8 e^{i\frac{\pi}{2}} - 2 = 0 \Leftrightarrow iz^2 + 2e^{i\pi} - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow iz^2 - 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow iz^2 = 4 \Leftrightarrow z^2 = \frac{4}{i} \Leftrightarrow z^2 = \frac{4}{i} \times \frac{i}{i} \Leftrightarrow z^2 = -4i \Leftrightarrow z^2 = 4e^{i\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{4}e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right)}, \quad k \in \{0, 1\}$$

Os números complexos  $z_0$  e  $z_1$ , escritos na forma trigonométrica, que são solução da equação:

Para  $k = 0$ , ,  $z_0 = 2 e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Para  $k = 1$ , ,  $z_1 = 2 e^{i\frac{3\pi}{4}}$

10.

10.1. Como a função  $f$  é contínua em  $x = 1$  então temos que ter:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1).$$

Calculando os valores do limites laterais da função  $f$  no ponto  $x = 1$ :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{\sin(x-1)}{1-x^2} + k \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x-1)}{(1-x)(1+x)} + k = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x-1)}{(1-x)(1+x)} + k = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x-1)}{(1-x)} \times \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1+x} + k = - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)} \times \frac{1}{2} + k = (*_1) \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável:  $y = x - 1$  ( $y \rightarrow 0^+$  quando  $x \rightarrow 1^+$ )

$$(*_1) = - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} \times \frac{1}{2} + k = -\frac{1}{2} + k \quad (\text{Limite notável})$$

$$\bullet f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [x - 2 + \ln(3 - 2x)] = -1$$

Calculando o valor de  $k$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + k = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

10.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função  $f$  no intervalo  $] - \infty, 1[$ :

$$f'(x) = [x - 2 + \ln(3 - 2x)]' = 1 - \frac{2}{3-2x}$$

Os extremos relativos de  $f$  correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{3-2x} = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{3-2x} \Leftrightarrow 3 - 2x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Logo,  $f'(x)$  tem um zero em  $x = \frac{1}{2}$ .

$$f'(0) = 1 - \frac{2}{3-2 \times 0} = \frac{1}{3} > 0$$

$$f'(0,8) = 1 - \frac{2}{3-2 \times 0,8} < 0$$

De modo a estudarmos a monotonia da função  $f$  vamos construir um quadro de sinal:

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	+	0	-	n.d.
$f(x)$	$\nearrow$	máximo	$\searrow$	n.d.

O gráfico de  $f$  é crescente no intervalo  $]-\infty, \frac{1}{2}]$  e é decrescente no intervalo  $[\frac{1}{2}, 1[$ .

$$f(0) = \frac{1}{2} - 2 + \ln\left(3 - 2 \times \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \ln 2$$

A função  $f$  tem um máximo relativo em  $x = \frac{1}{2}$  igual a  $-\frac{3}{2} + \ln 2$ .

$$\begin{aligned} 11. \quad g(x) &= \log_2(1 - \cos x) + \log_2(1 + \cos x) + 2 \log_2(2 \cos x) = \\ &= \log_2[(1 - \cos x)(1 + \cos x)] + 2 \log_2(2 \cos x) = \log_2(1 - \cos^2 x) + 2 \log_2(2 \cos x) = \\ &= \log_2(\sin^2 x) + 2 \log_2(2 \cos x) = 2 \log_2(\sin x) + 2 \log_2(2 \cos x) = \\ &= 2[\log_2(\sin x) + \log_2(2 \cos x)] = 2 \log_2(2 \sin x \cos x) = 2 \log_2(\sin(2x)) \end{aligned}$$

12.

12.1. Com o decorrer do tempo, o número de bactérias vivas existentes no tubo tende para:

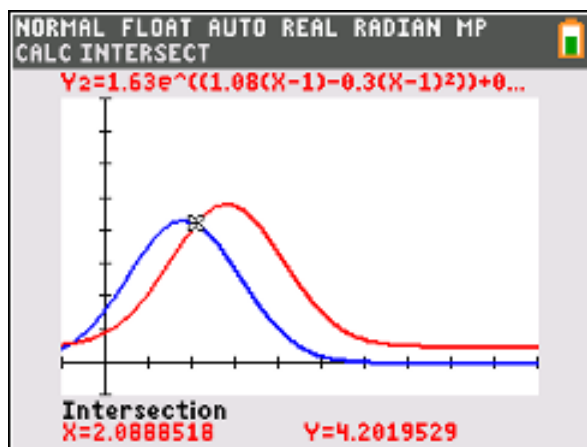
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N_0 e^{1,08t - 0,3t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} N_0 e^{t^2 \left( \frac{1,08}{t} - 0,3 \right)} = N_0 e^{-\infty} = 0$$

**Opção(D)**

12.2. Num certo instante,  $t_1$ , havia, no tubo de ensaio, mais meio milhar de bactérias vivas do que uma hora antes desse instante, o que corresponde à equação:

$$N(t_1) = N(t_1 - 1) + 0,5 \Leftrightarrow 1,63 e^{1,08t_1 - 0,3t_1^2} = 1,63 e^{1,08(t_1 - 1) - 0,3(t_1 - 1)^2} + 0,5$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Considerando  $I$  o ponto de interseção visualizado na máquina, as suas coordenadas arredondadas às milésimas são:  $I(2,089; 4,202)$

O instante  $t_1$ , em minutos, com três casas decimais é igual a 2,089, o que corresponde a 2 horas e 5 minutos.

13. Vamos verificar a existência de assíntotas horizontais do gráfico da função  $f$ :



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$y = 1$  é assíntota horizontal do gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow -\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-2}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-2}} = e^2 \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}} - \frac{1}{+\infty} = 0$$

$y = 0$  é assíntota horizontal do gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$ .

$$14. e^{-x}(4 + 3^{2x}) \geq 5 \Leftrightarrow 4e^{-x} + e^x \geq 5 \Leftrightarrow \frac{4}{e^x} + e^x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 4 \geq 0 \wedge e^x \neq 0$$

Fazendo a mudança de variável  $y = e^x$ , ficamos com a inequação  $y^2 - 5y + 4 \geq 0$ .

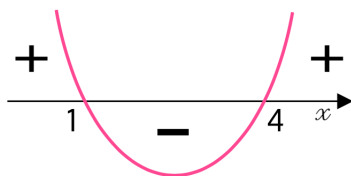
Consideremos a equação  $y^2 - 5y + 4 = 0$

$$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 4$$

Usando a fórmula resolvente temos:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{5+3}{2} \vee y = \frac{5-3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 1 \vee y = 4$$



Calculando na variável original  $x$  vem que:

$$1 = e^x \vee 4 = e^x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \ln 4$$

Como  $-2 \leq x \leq 2$  então C.S. =  $]-\infty, 0] \cup [\ln 4, +\infty[ \cap [-2, 2] = [-2, 0] \cup [\ln 4, 2]$

15. Seja  $t$  a reta não horizontal de equação  $y = mx + b$  que é tangente, simultaneamente, ao gráfico de  $f$  e ao gráfico de  $g$ .

Como o ponto  $A$  pertence ao gráfico de  $f$  tem coordenadas  $(x_A, 2x_A^2)$ , da mesma forma, o ponto  $B$  pertence ao gráfico de  $g$  logo tem coordenadas  $(x_B, -(x_B - 1)^2)$ .

A reta  $t$  passa nos pontos  $A$  e  $B$  então o seu declive é igual a:

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2x_A^2 - (-(x_B - 1)^2)}{x_A - x_B} = \frac{2x_A^2 + (x_B - 1)^2}{x_A - x_B}$$

Sabendo que  $A$  é o ponto de tangência da reta  $t$  com o gráfico de  $f$  e  $B$  é o ponto de tangência dessa mesma reta com o gráfico de  $g$  vem que:

$$m = f'(x_A) \quad \text{e} \quad m = g'(x_B)$$

Calculando a expressão da primeira derivada das funções  $f$  e  $g$ :

$$f'(x) = 4x$$

$$g'(x) = -2(x - 1) = -2x + 2$$

$$\text{Portanto } f'(x_A) = g'(x_B) \Leftrightarrow 4x_A = -2x_B + 2 \Leftrightarrow x_B = -2x_A + 1$$

O declive da reta  $t$  em função de  $x_A$  é:

$$m = \frac{2x_A^2 + (x_B - 1)^2}{x_A - x_B} = \frac{2x_A^2 + (-2x_A + 1 - 1)^2}{x_A - (-2x_A + 1)} = \frac{6x_A^2}{3x_A - 1}$$

Resolvendo a equação  $m = f'(x_A)$  conseguimos determinar  $x_A$ :

$$m = f'(x_A) \Leftrightarrow \frac{6x_A^2}{3x_A - 1} = 4x_A \Leftrightarrow \frac{6x_A^2}{3x_A - 1} - 4x_A = 0 \wedge 3x_A - 1 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6x_A^2 + 4x_A}{3x_A - 1} \wedge x_A \neq \frac{1}{3} \Leftrightarrow -6x_A^2 + 4x_A = 0 \wedge x_A \neq \frac{1}{3} \Leftrightarrow x_A = 0 \vee x_A = \frac{2}{3} \wedge x_A \neq \frac{1}{3}$$

Observando o gráfico sabemos que  $x_A > 0$ , assim temos que  $x_A = \frac{2}{3}$ .

Com o valor de  $x_A$ , vamos calcular o valor de  $x_B$ :

$$x_B = -2x_A + 1 = -2 \times \frac{2}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$$