Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2020

1.

1.1. Sabendo as coordenadas dos pontos O (0,0,0) e B $(0,2,4)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BO}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{BO} = O - B = (0,0,0) - (0,2,4) = (0,-2,-4)$$

$$||\overrightarrow{BO}|| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$$

Com as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BE}$ podemos calcular a sua norma:

$$\overrightarrow{BE} = (2,2,-2)$$

$$||\overrightarrow{BE}|| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{BO} \hat{} \overrightarrow{BE}) = \frac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BE}}{||\overrightarrow{BO}|| \times ||\overrightarrow{BE}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BO} \hat{} \overrightarrow{BE}) = \frac{(0,-2,-4).(2,2,-2)}{\sqrt{20} \times \sqrt{12}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BO} \hat{} \overrightarrow{BO}) =$

$= \frac{0-4+8}{\sqrt{240}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BO} \hat{} \overrightarrow{BE}) = \frac{4}{\sqrt{240}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BO} \hat{} \overrightarrow{BE}) = \frac{4}{\sqrt{240}} \Leftrightarrow O\hat{B}E \approx 75^o$

1.2. Vamos começar por determinar as coordenadas do ponto E:

$$\overrightarrow{BE} = E - B \Leftrightarrow (2,2,-2) = E - (0,2,4) \Leftrightarrow E = (2,4,2)$$

Sabendo as coordenadas dos pontos O (0,0,0) e E $(2,4,2)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OE}$

$$\overrightarrow{OE} = E - O = (2,4,2)$$

Como o plano α é perpendicular à reta OE, o vetor $(2,4,2)$ é um vetor normal do plano. Assim a equação do plano é da forma: $2x + 4y + 2z + d = 0$.

Pela observação da figura sabemos que o ponto G tem coordenadas $(0,2,2)$.

Como o ponto G pertence ao plano α, substituindo as coordenadas do ponto G na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$2x+4y+2z+d=0 \;\Leftrightarrow\; 2\times 0+4\times 2+2\times 2+d=0 \;\Leftrightarrow\; d=-12$$

Logo, $\alpha : 2x+4y+2z-12=0$.

Consideremos os pontos P, Q e R os pontos do plano α que pertencem aos eixos coordenados x, y e z respectivamente:

$$P(x,0,0) \qquad Q(0,y,0) \qquad R(0,0,z)$$

O ponto P pertence ao plano α, substituindo na equação do plano α os valores da ordenada e cota podemos calcular o valor da abcissa do ponto P:

$$2x+0+0-12=0 \;\Leftrightarrow\; x=6$$

O ponto P tem coordenadas $(6,0,0)$.

O ponto Q também pertence ao plano α, substituindo na equação do plano α os valores da abcissa e cota podemos calcular o valor da ordenada do ponto Q:

$$0+4y+0-12=0 \;\Leftrightarrow\; y=3$$

O ponto Q tem coordenadas $(0,3,0)$

O ponto R também pertence ao plano α, substituindo na equação do plano α os valores da abcissa e cota podemos calcular o valor da ordenada do ponto R:

$$0+0+2z-12=0 \;\Leftrightarrow\; z=6$$

O ponto R tem coordenadas $(0,0,6)$

Calculando o volume da pirâmide:

$$V_{[OPQR]}=\frac{A_b\times altura}{3}=\frac{\frac{\overline{OP}\times\overline{OQ}}{2}\times\overline{OR}}{3}=\frac{\frac{6\times 3}{2}\times 6}{3}=\frac{54}{3}=18$$

2. O hexágono regular $[MNPQRS]$ pode ser decomposto em 6 triângulos.

   Calculando o ângulo interno de um dos triângulos, por exemplo o ângulo $M\hat{O}N$ do triângulo MON:

$$M\hat{O}N = \frac{360}{6} = 60^o$$

Concluímos que cada um destes 6 triângulos são equiláteros.

A inclinação da reta MN é igual a:

$$180 - 60 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Sabendo inclinação da reta MN conseguimos calcular o seu declive:

$$m = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow m = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

A equação da reta MN é da forma: $y = -\sqrt{3}x + b$

Como o ponto M de coordenadas $(1, 0)$ pertence à reta MN podemos substituir as coordenadas deste ponto na equação da reta para calcularmos a ordenada na origem b:

$$y = -\sqrt{3}x + b \Leftrightarrow 0 = -\sqrt{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \sqrt{3}$$

A equação da reta MN é:

$$y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

Opção(A)

3. De foma a obtermos um número par, menor do que 5000 e capicua, a última posição do número tem de ser preenchida pelos algarismos 2 ou 4 logo temos duas hipóteses para a última posição do número.

   Como o número é capicua (sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número), o algarismo na última posição tem de ser igual ao algarismo que está na primeira posição por isso só há uma única hipótese para a escolha do algarismo na primeira posição do número.

   $\underline{1} \times \_ \times \_ \times \underline{2}$

   As restantes duas posições têm de ser preenchidas pelo mesmo algarismo de entre os 6 algarismos existentes nas faces do dado. Por isso para uma das posições temos 6 hipóteses e para a outra posição temos apenas uma única hipótese.

   $\underline{1} \times \underline{6} \times \underline{1} \times \underline{2}$

   Como o dado tem 6 faces ou seja 6 algarismos e é lançado 4 vezes, a quantidade de números que podem ser obtidos tendo em conta que os algarismos podem ser repetidos, é igual a $6^4 = 1296$.

A probabilidade de esse número ser par, menor do que 5000 e capicua é igual a:

$$\frac{12}{1296} = \frac{6}{648} = \frac{3}{324} = \frac{1}{108}$$

. **Opção(C)**

4.

4.1. Consideremos os acontecimentos:

E: O hóspede participa na caminhada na serra da Estrela
Z: O hóspede participa na descida do rio Zêzere

$P(E)$ é a probabilidade do hóspede, selecionado ao acaso, participar na caminhada na serra da Estrela que é igual a 0,8.

$P(Z)$ é a probabilidade do hóspede, selecionado ao acaso, participar na descida do rio Zêzere que é igual a 0,5.

$P(\overline{E}|Z)$ é a probabilidade do hóspede, selecionado ao acaso, não ter participado na caminhada na serra da Estrela sabendo que participou na descida do rio Zêzere que é igual a 0,3.

Queremos determinar $P(E \cap \overline{Z})$ que é probabilidade de esse hóspede ter participado na caminhada na serra da Estrela e não ter participado na descida do rio Zêzere.

	Z	$\overline{Z}$	
E	$P(E \cap Z)$	?	0,8
$\overline{E}$	$P(\overline{E} \cap Z)$		
	0,5		

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$$P(\overline{E}|Z) = \frac{P(\overline{E} \cap Z)}{P(Z)} \Leftrightarrow 0.3 = \frac{P(\overline{E} \cap Z)}{0.5} \Leftrightarrow P(\overline{E} \cap Z) = 0,3 \times 0.5 \Leftrightarrow P(\overline{E} \cap Z) = 0.15$$

De acordo com a tabela acima, temos que:

$$P(E \cap Z) = 0,5 - 0,15 = 0,35$$

Logo vem que:

$$P(E \cap \overline{Z}) = 0,8 - 0,35 = 0,45$$

A probabilidade do hóspede, selecionado ao acaso, ter participado na caminhada na serra da Estrela e não ter participado na descida do rio Zêzere é igual a 45%.

4.2. Considerando que apenas os hóspedes dinamarqueses podem conduzir as 4 motos, o número de possibilidades de os distribuir pelas quatro motas (a ordem interessa porque as motas têm diferentes cores) é igual a $4! = 24$

Agora falta distribuir os restantes 3 hóspedes suecos pelos lugares que sobram, ou seja, 1 lugar em cada mota. Por isso, o número de possibilidades de distribuir os 3 hóspedes suecos pelos quatro lugares que sobram (a ordem interessa porque as motas têm diferentes cores) é igual a ${}^4A_3 = 24$.

O número total de maneiras distintas de distribuir os sete hóspedes pelas quatro motos sabendo que apenas os hóspedes dinamarqueses podem conduzir é igual a $24 \times 24 = 576$.

Opção(D)

5. Consideremos a progressão geométrica u_n de razão r:

$$u_1 \xrightarrow{\times r} u_2 \xrightarrow{\times r} u_3 \xrightarrow{\times r} u_4 \xrightarrow{\times r} u_5 \xrightarrow{\times r} u_6 \xrightarrow{\times r} u_7 \xrightarrow{\times r} u_8 \xrightarrow{\times r} u_9 \xrightarrow{\times r} u_{10} \xrightarrow{\times r} u_{11} \xrightarrow{\times r} u_{12} \xrightarrow{\times r} u_{13} \xrightarrow{\times r} u_{14} \xrightarrow{\times r} u_{15} \xrightarrow{\times r} u_{16} \xrightarrow{\times r} u_{17} \xrightarrow{\times r} u_{18} \xrightarrow{\times r} u_{19} \xrightarrow{\times r} u_{20}$$

Temos que:

$u_{18} = u_3 \times r^{15} = \frac{r^{15}}{12}$

$u_{20} = u_3 \times r^{17} = \frac{r^{17}}{12}$

Sabendo que $u_{18} = 4u_{20}$, conseguimos determinar a razão da progressão geométrica:

$$u_{18} = 4u_{20} \Leftrightarrow \frac{r^{15}}{12} = \frac{4r^{17}}{12} \Leftrightarrow r^{15} = 4r^{17} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{r^{17}}{r^{15}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = r^2 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$$

$r < 0$ porque (u_n) não é monótona

Calculando o primeiro termo da progressão:

$u_3 = u_1 \times r^2 \Leftrightarrow \frac{1}{12} = u_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{3}$

A expressão do termo geral de (u_n) é:

$u_n = u_1 \times r^{n-1} = \frac{1}{3} \times (-\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times -2 = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

6. Vamos determinar os primeiros quatro termos desta sucessão:

$v_1 = 2$

$v_2 = \frac{1}{v_1} = \frac{1}{2}$

$v_3 = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$v_4 = \frac{1}{v_3} = \frac{1}{2}$

Podemos concluir que a sucessão (v_n) não é monótona.

Como $\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_3}{v_2}$ a sucessão (v_n) não é uma progressão geométrica.

Como $v_2 - v_1 \neq v_3 - v_2$ a sucessão (v_n) não é uma progressão aritmética.

Opção(D)

7.

7.1. Sabendo que o numero complexo $z_1 = -1 - i$ é solução da equação, vem que:

$$\frac{a}{{z_1}^2} + b{z_1}^4 = -2 + i \Leftrightarrow \frac{a}{(-1-i)^2} + b(-1-i)^4 = -2 + i$$

$(-1 - i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$

$(-1 - i)^4 = (-1 - i)^2(-1 - i^2) = 2i \times 2i = -4$

Vamos determinar as constantes a e b:

$\frac{a}{(-1-i)^2} + b(-1-i)^4 = -2+i \Leftrightarrow \frac{a}{2i} + b \times -4 = -2+i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{a}{2i} \times \frac{-2i}{-2i} - 4b = -2+i \Leftrightarrow \frac{-2ai}{-4i^2} - 4b = -2+i \Leftrightarrow \frac{-2ai}{4} - 4b = -2+i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4b - \frac{a}{2}i = -2+i \Leftrightarrow -4b = -2 \wedge -\frac{a}{2} = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} \wedge a = -2$

7.2. O ponto F é a imagem geométrica do número complexo $z_1 = |z_1|e^{\theta i}$.

Como o triângulo $[OFG]$ é equilátero então $G\hat{O}F = \frac{\pi}{3}$, ou seja, G é a imagem geométrica do número complexo $|z_1|e^{\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)i}$.

Como o ponto G é a imagem geométrica do número complexo $z_1 \times z_2$, vem que:

$z_1 \times z_2 = |z_1|e^{\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)i} \Leftrightarrow |z_1|e^{\theta i} \times z_2 = |z_1|e^{\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)i} \Leftrightarrow z_2 = \frac{|z_1|e^{\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)i}}{|z_1|e^{\theta i}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_2 = e^{\left(\theta+\frac{\pi}{3}-\theta\right)i} \Leftrightarrow z_2 = e^{\frac{\pi}{3}i} \Leftrightarrow z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)i \Leftrightarrow z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Opção(B)

8.

8.1. Pela observação da figura sabemos que:

$\overline{AB} = f(0) = 3,4$ m

$\overline{CD} = f(21) = 0,0001 \times (21)^4 - 0,005 \times (21)^3 + 0,11 \times (21)^2 - 21 + 3,4 = 4,0531$ m

O valor absoluto, em metros arredondado às décimas, da diferença entre as alturas das duas paredes da rampa de skate é igual a:

$$|f(0) - f(21)| = |3,4 - 4,0531| \approx 0,7$$

Opção(B)

8.2. Vamos começar por determinar a distância do solo a que se encontram os dois jovens:

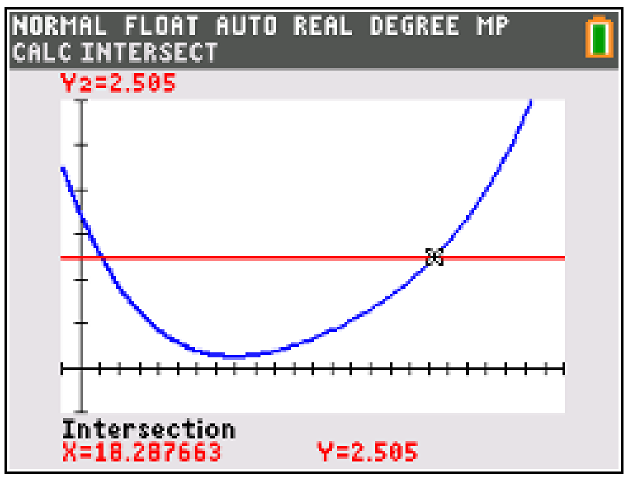
$$f(1) = 2,505$$

Seja d a distância a que se encontra da parede representada por $[CD]$ o jovem que dela está mais próximo e $x_1 = 21 - d$.

Sabendo que, num certo instante, os dois jovens estão à mesma distância do solo conseguimos determinar x_1 resolvendo a equação:

$$f(x_1) = 2,505$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Os valores, aproximados às centésimas, das coordenadas do ponto de interseção com maior abcissa são I$(18,288; 2,505)$.

Portanto $x_1 \approx 18,288$ m

A distância d, arredondada às décimas, a que se encontra da parede representada por $[CD]$ o jovem que dela está mais próximo é igual a:

$$d = 21 - x_1 \approx 21 - 18,288 \approx 2,7 \text{ m}$$

9. Como $D_f = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a função f não tem assíntotas horizontais nem oblíquoas. As únicas possíveis assíntotas verticais do gráfico da função f, são as retas $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}-1}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}-1}{2x} \times \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x}{\tan x} = (*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$ $\quad (y \to 0^+ \quad \text{quando} \quad x \to 0^+)$

$(*_1) = \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{e^{y}-1}{y} \times \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = 1 \times \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} \times \lim\limits_{x\to 0^+} 2\cos x =$

$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}} \times 2 = \frac{1}{1} \times 2 = 2$ (Limite notável)

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{e^{2x}-1}{\tan x} = \frac{e^{\frac{2\pi}{2}}-1}{\tan \frac{\pi}{2}^-} = \frac{e^{\pi}-1}{+\infty} = 0$

Concluímos que o gráfico da função f não tem assíntotas verticais.

10.

10.1. A função g é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ pois resulta do quociente entre funções polinomiais que são contínuas.

Para que a função g seja contínua em $\mathbb{R}$ tem de ser contínua em $x = 1$, ou seja, temos que ter:

$$g(1) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x).$$

Calculando o valor da função g no ponto $x = 1$:

$g(1) = 1 - 10 + 8\ln 1 = -9$

Calculando o valor do limite à esquerda da função g no ponto $x = 1$:

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-x}{k-kx} = \frac{1}{k}\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x(x-1)}{1-x} = -\frac{1}{k}\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x(1-x)}{1-x} = -\frac{1}{k}\lim\limits_{x\to 1^-} x =$

$= -\frac{1}{k} \times 1 = -\frac{1}{k}$

Logo vem que:

$$-\frac{1}{k} = -9 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{k} = 9 \;\Leftrightarrow\; k = \frac{1}{9}$$

Opção(D)

10.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g:

$g'(x) = (x^2 - 10 + 8\ln x)' = 2x + \frac{8}{x}$

A expressão algébrica da segunda derivada da função g é:

$g''(x) = \left(2x + \frac{8}{x}\right) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2-8}{x^2}$

Os pontos de inflexão correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$g''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x^2-8}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 - 8 = 0 \;\wedge x^2 \neq 0 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; x^2 = 4 \;\wedge x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2 \;\vee x = -2 \;\wedge x \neq 0$

Logo, $g''(x)$ tem um zero em $x = 2$ no intervalo $]1, +\infty[$.

$g''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-8}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} < 0$

$g''(3) = \frac{2\times 3^2-8}{3^2} = \frac{10}{9} > 0$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

x	1		2	$+\infty$
$g''(x)$	n.d.	-	0	+
$g(x)$	n.d.	$\frown$	P.I.	$\smile$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]1, 2]$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[2, +\infty[$.

O ponto de inflexão da função g tem abcissa igual a 2.

10.3. $g(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 10 + 8\ln x = 0$

A função g é contínua em $]\sqrt{e}, e[$ pois resulta da soma de duas funções contínuas, uma função polinomial e uma função logarítmica.

- $g(\sqrt{e}) = (\sqrt{e})^2 - 10 + 8\ln\sqrt{e} = e - 10 + 8(\ln e)^{\frac{1}{2}} = e - 10 + 8 \times \frac{1}{2} = e - 6 \approx -3,28$

- $g(e) = e^2 - 10 + 8\ln e = e^2 - 10 + 8 = e^2 - 2 \approx 5,39$

Como $g(\sqrt{e}) < 0 < g(e)$, pelo Teorema de Bolzano existe $a \in]\sqrt{e}, e[$ tal que $g(a) = 0$. Logo a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]\sqrt{e}, e[$.

11.

11.1. $h(\frac{\pi}{6}) = \frac{5}{4+3\cos(\frac{2\pi}{6})} = \frac{5}{4+3\cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{5}{4+\frac{3}{2}} = \frac{5}{\frac{11}{2}} = \frac{10}{11}$

$h(\frac{7\pi}{6}) = \frac{5}{4+3\cos(\frac{14\pi}{6})} = \frac{5}{4+3\cos(\frac{7\pi}{3})} = \frac{5}{4+3\cos\left(\frac{6\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{5}{4+3\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)} =$

$= \frac{5}{4+3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{5}{4+\frac{3}{2}} = \frac{5}{\frac{11}{2}} = \frac{10}{11}$

A taxa média de variação da função h entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ é:

$$\frac{h\left(\frac{7\pi}{6}\right) - h\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{10}{11} - \frac{10}{11}}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0$$

Opção(C)

11.2. Resolvendo a equação:

$\frac{5}{4+3\cos(2x)} = 2 \Leftrightarrow 4 + 3\cos(2x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 3\cos(2x) = \frac{5}{2} - 4 \Leftrightarrow 3\cos(2x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{4\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$

Para $k = -1, \; x = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3} \; \in]-\pi, \pi[\vee x = \frac{2\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{3} \; \in]-\pi, \pi[$

Para $k = -2, \; x = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3} \; \notin]-\pi, \pi[\vee x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3} \; \notin]-\pi, \pi[$

Para $k=0$, $x=\frac{\pi}{3} \quad \in\,]-\pi,\pi[\ \vee\ x=\frac{2\pi}{3} \quad \in\,]-\pi,\pi[$

Para $k=1$, $x=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3} \quad \notin\,]-\pi,\pi[\ \vee\ x=\frac{2\pi}{3}+\pi=\frac{5\pi}{3} \quad \notin\,]-\pi,\pi[$

Logo, $x=\{-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\}$.

As abcissas dos pontos do gráfico da função h , pertencentes ao intervalo $]-\pi,\pi[$, cuja ordenada é 2 são $-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$.