Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1ª Fase | Ensino Secundário | 2018

Caderno 1

1.

1.1. A experiência repete-se várias vezes e de forma independente, logo a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial.

Número de repetições da experiência: $n = 10$
Probabilidade de sair a face com o número 3: $p = \frac{1}{4} = 0,25$
Probabilidade de não sair a face com o número 3: $q = 1 - p = 1 - 0,25 = 0,75$

Usando a fórmula do modelo binomial temos:

P(sair exatamente 6 vezes a face com o número 3)$= P(X = 6) = {}^{10}C_6 \, 0,25^6 \, 0,75^4 \approx$

$\approx 0,016$

Opção(B)

1.2. A função f é diferenciável no intervalo $[0, 2]$, logo é contínua no mesmo intervalo.

Sabendo que $f(0) = 1$ e que $\forall x, \in [0, 2]$ $0 < f'(x) < 9$, aplicando o Teorema de Lagrange, temos que:

$0 < f'(x) < 9 \Leftrightarrow 0 < \frac{f(2)-f(0)}{2-0} < 9 \Leftrightarrow 0 < \frac{f(2)-1}{2} < 9 \Leftrightarrow 0 < f(2) - 1 < 18 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 < f(2) < 19$

Opção(B)

2.

2.1. Como [PQ] e [QR] são arestas de uma das bases do prisma vem que:

$$||\overrightarrow{QP}|| = ||\overrightarrow{QR}|| = 4$$

A base do prisma é um hexágono regular, que pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros.

Portanto cada ângulo interno do hexágono regular tem o dobro da amplitude de um ângulo interno do triângulo equilátero, logo:

$$R\hat{Q}P = 60 \times 2 = 120^o$$

Usando a fórmula do produto escalar temos que:

$$\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QR} = \cos(\overrightarrow{QP}\,\hat{}\,\overrightarrow{QR}) \times ||\overrightarrow{QP}|| \times ||\overrightarrow{QR}|| = \cos(120^o) \times 4^2 = -\frac{1}{2} \times 16 = -8$$

2.2. Para calcular a área lateral do prisma precisamos de saber as coordenadas do ponto P.

Sabendo as coordenadas do ponto S e um vetor diretor da reta PS, uma equação vetorial da reta PS é:

$$(x, y, z) = (14, 5, 0) + k(2, 3, -1), \quad k \in \mathbb{R}$$

Logo as coordenadas genéricas do ponto P são $(14 + 2k, 5 + 3k, -k)$.

Como o ponto P pertence ao plano PQR, substituindo as coordenadas do ponto P na equação do plano conseguimos calcular a constante k:

$$2x + 3y - z - 15 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2(14 + 2k) + 3(5 + 3k) - (-k) - 15 = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 28 + 4k + 15 + 9k + k - 15 = 0 \;\Leftrightarrow\; 14k = -28 \;\Leftrightarrow\; k = -\frac{28}{14} \;\Leftrightarrow\; k = -2$$

Logo as coordenadas do ponto P são $(10, -1, 2)$.

Com as coordenadas dos pontos S e P podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{SP}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{SP} = P - S = (10, -1, 2) - (14, 5, 0) = (-4, -6, 2)$$

$$||\overrightarrow{SP}|| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{56}$$

A área lateral do prisma é igual a:

$$A_{lateral} = \overline{SP} \times \overline{PQ} \times 6 = \sqrt{56} \times 4 \times 6 \approx 179,6$$

2.3. De acordo com a figura 2, o prisma tem duas bases com 6 vértices cada uma, sendo que o número de conjuntos de 2 vértices que podem ser escolhidos em cada face corresponde a ${}^6C_2 \times {}^6C_2$ (número de casos possíveis).

O número de casos favoráveis é igual a 6, visto que o prisma tem 6 faces laterais com quatro vértices cada.

Usando a Regra de Laplace vem que:

P("4 vértices escolhidos pertencerem a uma mesma face lateral do prisma")= $\frac{6}{{}^6C_2 \times {}^6C_2} \approx 0,03$

3.

3.1. Existem 2 possibilidades para dispor os doze alunos, de modo que os alunos da mesma disciplina fiquem juntos:

$$\underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \ \underline{E}\ \underline{E}\ \underline{E}\ \underline{E} \quad \text{ou} \quad \underline{E}\ \underline{E}\ \underline{E}\ \underline{E}\ \ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}\ \underline{I}$$

Tendo em conta que os 4 alunos de Espanhol podem trocar de lugar entre si, logo temos 4! maneiras de os dispor lado a lado em linha reta.

Da mesma forma, os 8 alunos de Inglês também podem trocar de lugar entre si, logo temos 8! maneiras de os dispor lado a lado em linha reta.

Portanto o número de maneiras que se podem dispor os doze alunos, de modo que os alunos da mesma disciplina fiquem juntos é igual a:

$$2 \times 4! \times 8! = 1935360$$

Opção(D)

3.2. Consideremos os acontecimentos:

E: O aluno estuda espanhol
I: O aluno estuda inglês

Como o número de alunos que estudam Espanhol é igual ao número de alunos que estudam Inglês, vem que:

$$P(E) = P(I) = 0,5$$

O número de alunos que estudam, pelo menos, uma das duas línguas é o quádruplo do número de alunos que estudam as duas línguas corresponde à equação:

$$P(E \cup I) = 4 \times P(E \cap I) = 4P(E \cap I)$$

Logo, temos que:

$$P(E \cup I) = P(E) + P(I) - P(E \cap I) \;\Leftrightarrow\; 4P(E \cap I) = 0,5 + 0,5 - P(E \cap I) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 5P(E \cap I) = 1 \;\Leftrightarrow\; P(E \cap I) = \frac{1}{5} \;\Leftrightarrow\; P(E \cap I) = 0,2$$

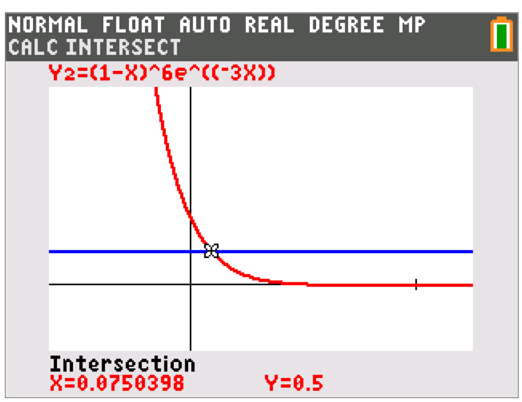
Usando a fórmula da probabilidade condicionada temos:

$$P(I|E) = \frac{P(I \cap E)}{P(E)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4 = 40\%$$

4. Sabendo que a potência da luz transmitida é igual a metade da potência da luz incidente e que o coeficiente de reflexão, R, e o coeficiente de absorção, m, têm o mesmo valor numérico, vem que:

$$L = I(1-R)^6\, e^{-3\lambda} \;\Leftrightarrow\; \frac{I}{2} = I(1-R)^6\, e^{-3R} \;\Leftrightarrow\; \frac{\frac{I}{2}}{I} = (1-R)^6\, e^{-3R} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} = (1-R)^6\, e^{-3R}$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



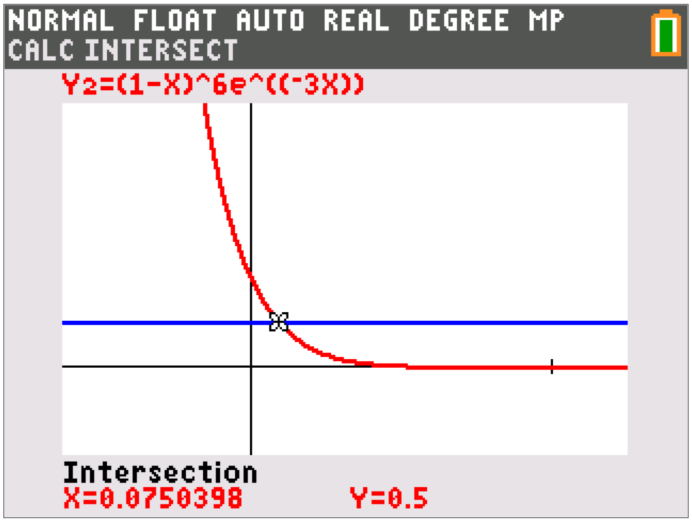
Assim temos que $R = \lambda \approx 0,075$.

5. $z = (\cos x + i\sin x)^{10} = (e^{ix})^{10} = e^{ix\times 10} = e^{i10x} = \cos(10x) + i\sin(10x)$

Sabendo que o número complexo z verifica a condição $Im(z) = \frac{1}{3}Re(z)$, vem que:

$$Im(z) = \frac{1}{3}Re(z) \ \Leftrightarrow \ \sin(10x) = \frac{1}{3}\cos(10x)$$

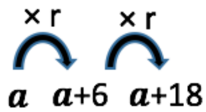
Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Tendo em conta que $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, temos que $x =\approx 0,03$.

Opção(B)

6. Seja u_n uma progressão geométrica.



Logo temos que:

- $a + 6 = a \times r \ \Leftrightarrow \ r = \frac{a+6}{a}$
- $a + 18 = (a+6) \times r \ \Leftrightarrow \ r = \frac{a+18}{a+6}$

Resolvendo a equação abaixo, vamos calcular o número real a:

$\frac{a+6}{a} = \frac{a+18}{a+6} \Leftrightarrow (a+6)^2 = a(a+18) \Leftrightarrow a^2+12a+36 = a^2+18a \Leftrightarrow 36 = 18a-12a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a = \frac{36}{6} \Leftrightarrow a = 6$

Assim temos que $r = \frac{a+6}{a} = \frac{6+6}{6} = 2$.

Conhecendo o valor da soma dos sete primeiros termos da progressão geométrica, conseguimos determinar o primeiro termo da progressão:

$S_7 = u_1 \times \frac{1-r^7}{1-r} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{1-2^7}{1-2} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{1-128}{-1} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times 127 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow u_1 = \frac{381}{127} \Leftrightarrow u_1 = 3$

7. Na Figura 4, está representada uma circunferência de centro na origem e raio igual a 2, visto que o ponto A pertence à circunferência e tem abcissa igual a 2.

   Os pontos do plano que pertencem à zona representada a sombreado são os pontos que pertecem ao círculo de centro na origem e raio igual a 2 e que têm abcissa menor ou igual a -1 ou abcissa maior ou igual a 1 ($x \leq -1 \vee x \geq 1$).

   Logo a condição que define o domínio plano representado a sombreado é:

$$x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ |x| \geq 1$$

   Opção(C)

Caderno 2

8.

8.1. A reta r é definida pela condição:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1} \ \wedge \ z=3 \ \Leftrightarrow \ \frac{x-(-1)}{2}=\frac{y-2}{-1} \ \wedge \ z=3$$

Portanto um vetor diretor da reta r tem coordenadas $(2,-1,0)$. Logo conseguimos excluir as opções de resposta B e C.

Qualquer ponto pertence à reta r tem coordenadas da forma $(x,y,3)$.

Opção(A)

8.2. $\arcsin(1)$ corresponde ao arco cujo o seno é igual a 1, ou seja, $\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$.

$\arccos(-\frac{1}{2})$ corresponde ao arco cujo o cosseno é igual a $-\frac{1}{2}$.

Como $\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$ e $\cos x$ é negativo no 2º e 3º quadrantes, então $\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=$ $=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}$, ou seja, $\arccos(-\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3}$.

Assim temos que:

$$\arcsin(1)+\arccos(-\tfrac{1}{2})=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{6}$$

Opção(A)

9. Vamos começar por simplificar e escrever o número complexo w na forma algébrica.

$w=1+\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}i^5}{1+2i}=1+\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}i}{1+2i}=1+\frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{3}i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=1+\frac{2\sqrt{3}-4\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i^2}{1^2+2^2}=1-\frac{5\sqrt{3}i}{5}=$ $=1-\sqrt{3}i$

Escrevendo o número complexo w na forma trigonométrica:

$$\begin{cases} tg\ \theta=-\frac{\sqrt{3}}{1} \\ \theta\in 4^o Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta=-\sqrt{3} \\ \theta\in 4^o Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \ \theta=-\frac{\pi}{3} \ \text{ e } \ |w|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$$

Logo, $w = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Sabendo que w é uma raiz quarta de um certo complexo z, vem que:

$$z = w^4 = (2\,e^{-i\frac{\pi}{3}})^4 = 2^4\,e^{-i\frac{4\pi}{3}} = 16\,e^{-i\frac{4\pi}{3}}$$

As quatro raízes quartas de z são:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16\,e^{-i\frac{4\pi}{3}}} = \sqrt[4]{16}\,e^{i\frac{-\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}} = 2\,e^{i\frac{-4\pi+6k\pi}{12}} = 2\,e^{i\frac{-2\pi+3k\pi}{6}},\ \ k \in \{0,1,2,3\}$$

Para $k = 0$, $z_1 = 2e^{i(\frac{-2\pi}{6})} = 2e^{i(\frac{-\pi}{3})}$ $(-\frac{\pi}{3} \notin]0, \frac{\pi}{2}[)$

Para $k = 1$, , $z_2 = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ $(\frac{\pi}{6} \in]0, \frac{\pi}{2}[)$

Assim temos que a raiz quarta de z, cuja representção geométrica pertence ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$ é $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

10.

10.1. Seja X a variável aleatória «produto dos números saídos»

Construindo uma tabela de dupla entrada:

	0	1	2	3
0	-	0	0	0
1	-	-	2	3
2	-	-	-	6
3	-	-	-	-

Assim temos que:

$P(X = 0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$

Opção(D)

10.2. Calculando o limite de (u_n):

$$\lim(\frac{n+k}{n})^n = \lim(1+\frac{k}{n})^n = e^k$$

Sabendo que o limite de (u_n) é solução da equação, vem que:

$$\ln(\frac{e^k}{e}) = 3 \;\Leftrightarrow\; \ln(e^{k-1}) = 3 \;\Leftrightarrow\; k-1=3 \;\Leftrightarrow\; k=4$$

Opção(D)

11. Usando as propriedades dos logarítmos temos que:

$$\ln b = 4\ln a \;\Leftrightarrow\; \ln b = \ln a^4 \;\Leftrightarrow\; b = a^4$$

Resolvendo a inequação:

$a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \;\Leftrightarrow\; a^x \geq (a^4)^{\frac{1}{x}} \;\Leftrightarrow\; a^x \geq a^{4\times\frac{1}{x}} \;\Leftrightarrow\; a^x \geq a^{\frac{4}{x}} \;\Leftrightarrow\; x \geq \frac{4}{x} \;\Leftrightarrow\; x - \frac{4}{x} \geq 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \frac{x^2-4x}{x} \geq 0$

Seja f uma função tal que $f(x) = \frac{x^2-4x}{x}$.

Calculando os zeros de $f(x)$:

$$\frac{x^2-4x}{x} = 0 \;\wedge x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x^2-4=0 \;\Leftrightarrow\; x^2=4 \;\Leftrightarrow\; x=-2 \vee x=2$$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
x^2-4	$+$	0	-	n.d.	-	0	$+$
x	-	-	-	n.d.	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	-	0	$+$	n.d.	-	0	$+$

C.S= $[-2,0[\cup [2,+\infty[$

12.

12.1. Calculando os zeros da função g, ou seja, resolvendo a equação $g(x)=0$:

$$\begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{4x}=0, & se\ x<0 \\ \frac{1}{2-\sin(2x)}=0, & se\ 0\leq x\leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x}-1=0\ \wedge\ 4x\neq 0, & se\ x<0 \\ 1=0_{\ c.i.}\ \wedge\ 2-\sin(2x)\neq 0, & se\ 0\leq x\leq\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x}=1\ \wedge\ x\neq 0, & se\ x<0 \\ ------------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0\ \wedge\ x\neq 0, & se\ x<0 \\ ------------- \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x}=1\ \wedge\ x\neq 0, & se\ x<0 \\ ------------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\ \wedge\ x\neq 0, & se\ x<0 \\ ------------- \end{cases}$$

Concluímos que a função g não tem zeros.

Opção(A)

12.2. Calculando o valor da função g no ponto $x=0$: $g(0)=\frac{1}{2-\sin 0}=\frac{1}{2}$

Calculando o valor dos limites laterais da função g no ponto $x=0$:

► $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2-\sin(2x)}=\frac{1}{2-\sin 0}=\frac{1}{2}$

► $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{4x}=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}=\frac{2}{4}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x}=(*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y=2x$ $(y\to 0^-$ quando $x\to 0^-)$

$(*_1)=\frac{1}{2}\lim\limits_{y\to 0^-}\frac{e^{y}-1}{y}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$ (Limite notável)

Como $g(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$, então a função g é contínua em $x=0$.

12.3. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g no intervalo $]0,\pi]$:

$$g'(x)=\left(\frac{1}{2-\sin(2x)}\right)'=\frac{0-[2-\sin(2x)]'\times 1}{[2-\sin(2x)]^2}=\frac{2\cos(2x)}{[2-\sin(2x)]^2}$$

Os extremos relativos de g correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$g'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{2\cos(2x)}{[2-\sin(2x)]^2} = 0 \ \Leftrightarrow \ 2\cos(2x) = 0 \ \wedge \ [2-\sin(2x)]^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ \cos(2x) = 0 \ \wedge \ 2 - \sin(2x) \neq 0 \ _{(cond.\ universal)} \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \ \ k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0, \ \ x = \frac{\pi}{4} \ \ \in \,]0, \pi]$

Para $k = -1, \ \ x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} \ \ \notin \,]0, \pi]$

Para $k = 1, \ \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \ \ \in \,]0, \pi]$

Para $k = 2, \ \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2} = \frac{5\pi}{4} \ \ \notin \,]0, \pi]$

Logo, $g'(x)$ tem dois zeros em $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{3\pi}{4}$ no intervalo $]0, \pi]$.

$g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\left[2-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^2} = \frac{2\times\frac{1}{2}}{\left[2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2} > 0$

$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\cos(\pi)}{[2-\sin(\pi)]^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} < 0$

$g'(\pi) = \frac{2\cos(2\pi)}{[2-\sin(2\pi)]^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

De modo a estudarmos a monotonia da função g vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$g'(x)$	n.d.	+	0	-	0	+	$\frac{1}{2}$
$g(x)$	n.d.	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	Mínimo	$\nearrow$	Máximo

O gráfico de g é crescente no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ e é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1$

$g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2-\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{1}{3}$

$g(\pi) = \frac{1}{2-\sin(2\pi)} = \frac{1}{2}$

A função g dois máximos relativos iguais a 1 e $\frac{1}{2}$ e um mínimo relativo igual a $\frac{1}{3}$.

13. Como $D_f =]0, \pi[$, as únicas possíveis assímptotas verticais do gráfico da função f, são as retas $x = 0$ e $x = \pi$.

► $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$ (Limite notável)

Concluímos que a reta definida $x = 0$ não é assíntota vertical do gráfico de f.

► $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \pi^-} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi^-}{\sin \pi^-} = \frac{\pi^-}{0^+} = +\infty$

Concluímos que a reta definida $x = \pi$ é assíntota vertical do gráfico de f.

Opção(B)

14. De acordo com a figura 5, as coordenadas dos ontos P e Q são, respetivamente:

$$\mathrm{P}\left(a, \frac{\ln a}{a}\right) \text{ e } \mathrm{Q}\left(2a, \frac{\ln(2a)}{2a}\right)$$

Com as coordenadas dos pontos P e Q podemos calcular o declive da reta PQ:

$$m = \frac{\frac{\ln(2a)}{2a} - \frac{\ln a}{a}}{2a-a} = \frac{\frac{\ln(2a)-2\ln a}{2a}}{a} = \frac{\ln(2a)-\ln a^2}{2a^2} = \frac{\ln\left(\frac{2a}{a^2}\right)}{2a^2} = \frac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2}$$

O triângulo retângulo, da figura 5, é isósceles quando dois dos ângulos internos são iguais a 45^o.

Portanto vem que:

$$m = \tan 45^o \Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2} = \tan 45^o \Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2} = 1$$

Seja f a função $f(x) = \frac{\ln(\frac{2}{x})}{2x^2}$. Sabemos que f é uma função contínua em $[\frac{1}{2}, 1]$ pois resulta de operações de funções contínuas neste intervalo.

- $f(\frac{1}{2}) = \frac{\ln 4}{\frac{1}{2}} = 2\ln 4$
- $f(1) = \frac{\ln 2}{2}$

Como $f(\frac{1}{2}) < 1 < f(1)$, pelo Teorema de Bolzano existe $a \in]\frac{1}{2}, 1[$ tal que $f(a) = 1$.