

**Exame Final Nacional de Matemática A**  
**Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2023**

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

**Critérios de Classificação**

13 Páginas

---

## CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

### ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

### ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentem organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentem organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Linguagem científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentem organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção cujos critérios se apresentem organizados por etapas:

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

**Nota 1** – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

**Nota 2** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... 12 pontos  
 Opção (C)

2. .... 14 pontos

Reconhecer que os comprimentos dos segmentos da linha poligonal são termos consecutivos de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é  $\overline{AB}$  ..... 2 pontos

Identificar a razão dessa progressão ..... 2 pontos

Escrever o 100.º termo da progressão em função de  $\overline{AB}$  ..... 2 pontos

Escrever uma expressão para o comprimento da linha poligonal

$\left(\frac{\overline{AB} + \overline{AB} + 99 \times 2}{2} \times 100, \text{ ou equivalente}\right)$  ..... 3 pontos

Igualar a expressão anterior a 10 400 ..... 3 pontos

Obter o valor pedido (5 cm) ..... 2 pontos

3. .... 14 pontos

Determinar  $f''(x)$  (ver nota 1) ..... 3 pontos

Escrever  $f''(x) = 0$  ..... 1 ponto

Determinar os zeros de  $f''$  ..... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de  $f''$  e de sentido das concavidades do gráfico de  $f$  (ou equivalente) ..... 4 pontos

Apresentar os intervalos em que a concavidade do gráfico de  $f$  é voltada para cima e os intervalos em que é voltada para baixo (ver nota 2) ..... 2 pontos

Indicar as abscissas dos pontos de inflexão  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ou equivalente}\right)$  .... 1 ponto

**Notas:**

1. Se for evidente a intenção de determinar a segunda derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2. Se for referido que o gráfico da função  $f$  tem concavidade voltada para cima em

$\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$  e  $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$ , em vez de  $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$  e  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$ , e voltada

para baixo em  $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ , em vez de  $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ , esta etapa deve ser

considerada cumprida.

4.1. .... 14 pontos

Reconhecer que a função  $g$  é contínua em  $x = 1$  se

$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$  ..... 2 pontos

Determinar  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$  ..... 2 pontos

Reconhecer que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (7 \times 3^{x-1} - 3)$  ..... 1 ponto

Obter  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 4$  ..... 1 ponto

Determinar  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$  ..... 8 pontos

Reconhecer que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x - 4}{e^{x-1} - 1}$  ..... 1 ponto

Obter  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x - 4}{e^{x-1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4(x - 1)}{e^{x-1} - 1}$  ..... 1 ponto

Obter  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4(x - 1)}{e^{x-1} - 1} = 4 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{e^{x-1} - 1}$  ..... 1 ponto

Obter  $4 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{e^{x-1} - 1} = 4 \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{e^y - 1}$  ..... 2 pontos

Obter  $4 \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{e^y - 1} = 4 \lim_{y \rightarrow 0^-} \left( \frac{e^y - 1}{y} \right)^{-1}$  (ou equivalente)..... 1 ponto

Reconhecer que  $\lim_{y \rightarrow 0^-} \left( \frac{e^y - 1}{y} \right)^{-1} = \left( \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y} \right)^{-1}$  ..... 1 ponto

Obter  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 4$  ..... 1 ponto

Referir que  $g(1) = 4$  ..... 1 ponto

Concluir que a função  $g$  é contínua em  $x = 1$  ..... 1 ponto

4.2. .... 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Indicar o domínio da condição ou referir que  $g(x) > 0$  em  $[1, +\infty[$  ..... 2 pontos

Escrever  $\log_3(7 \times 3^{x-1} - 3) = x + \log_3 2$  ..... 1 ponto

Escrever  $\log_3(7 \times 3^{x-1} - 3) = \log_3(3^x) + \log_3 2$  ..... 2 pontos

Escrever  $\log_3(7 \times 3^{x-1} - 3) = \log_3(3^x \times 2)$  ..... 2 pontos

Escrever  $7 \times 3^{x-1} - 3 = 3^x \times 2$  ..... 1 ponto

Reconhecer que  $7 \times 3^{x-1} = \frac{7}{3} \times 3^x$  ..... 1 ponto

Obter  $3^x = 9$  ..... 3 pontos

Obter a solução da equação (2) ..... 2 pontos

## 2.º Processo

- Indicar o domínio da condição ou referir que  $g(x) > 0$  em  $[1, +\infty[$  ..... 2 pontos
- Escrever  $\log_3(7 \times 3^{x-1} - 3) = x + \log_3 2$  ..... 1 ponto
- Escrever  $7 \times 3^{x-1} - 3 = 3^{x+\log_3 2}$  ..... 2 pontos
- Escrever  $7 \times 3^{x-1} - 3 = 3^x \times 3^{\log_3 2}$  ..... 2 pontos
- Reconhecer que  $7 \times 3^{x-1} = \frac{7}{3} \times 3^x$  ..... 1 ponto
- Reconhecer que  $3^{\log_3 2} = 2$  ..... 1 ponto
- Obter  $3^x = 9$  ..... 3 pontos
- Obter a solução da equação (2) ..... 2 pontos

5.1. .... 12 pontos

Opção (B)

5.2. .... 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

Designemos por  $A$  o acontecimento «o jovem respondeu que praticava *surf*» e por  $B$  o acontecimento «o jovem respondeu que praticava *skate*».

## 1.º Processo

- Escrever  $P(A) = 0,65$  ..... 1 ponto
- Escrever  $P(B \cap \bar{A}) = 0,2$  ..... 1 ponto
- Escrever  $P(B|A) = \frac{4}{5}$  ..... 2 pontos
- Identificar o valor pedido com  $P(A|\bar{B})$  ..... 2 pontos
- Obter  $P(A \cap B)$  (0,52) ..... 2 pontos
- Obter  $P(B)$  (0,72) ..... 2 pontos
- Obter  $P(\bar{B})$  (0,28) ..... 1 ponto
- Obter  $P(A \cap \bar{B})$  (0,13) ..... 1 ponto
- Obter o valor pedido  $\left(\frac{13}{28}\right)$  ..... 2 pontos

## 2.º Processo

Apresentar uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam:

$A$ e $\bar{A}$ ; $B$ e $\bar{B}$ .....	1 ponto
Preencher a célula da tabela relativa a $P(A)$ (0,65) .....	1 ponto
Preencher a célula da tabela relativa a $P(B \cap \bar{A})$ (0,2) .....	1 ponto
Preencher a célula da tabela relativa a $P(A \cap B)$ (0,52) .....	3 pontos
Preencher a célula da tabela relativa a $P(A \cap \bar{B})$ (0,13) .....	1 ponto
Preencher a célula da tabela relativa a $P(B)$ (0,72) .....	2 pontos
Identificar o valor pedido com $P(A \bar{B})$ .....	2 pontos
Obter $P(\bar{B})$ (0,28) .....	1 ponto
Obter o valor pedido $\left(\frac{13}{28}\right)$ .....	2 pontos

5.3. .... 14 pontos

Designemos por  $n$  o número de jovens com 13 anos.

Identificar o número de jovens com 14 anos com  $70 - n$  ..... 1 ponto

Identificar o número de casos possíveis com  ${}^{70}C_2$  (ou com  ${}^{70}A_2$ ) (**ver nota 1**) 4 pontos

Identificar o número de casos favoráveis em função de  $n$  com  $n(70 - n)$   
(ou, tendo em conta a etapa anterior, com  $2n(70 - n)$ ) (**ver nota 2**) ..... 3 pontos

Escrever a equação  $\frac{n(70 - n)}{{}^{70}C_2} = \frac{16}{35}$  (ou equivalente) ..... 3 pontos

Obter as soluções da equação (24 e 46) ..... 2 pontos

Apresentar o valor pedido (24) ..... 1 ponto

### Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a  ${}^{70}C_2$  (ou a  ${}^{70}A_2$ ), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada não for equivalente a  $n(70 - n)$  (ou, tendo em conta a etapa anterior, a  $2n(70 - n)$ ), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

6.1. .... 12 pontos

Opção (B)

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

### 1.º Processo

Reconhecer que a reta $AC$ é perpendicular ao plano $BCD$ .....	1 ponto
Identificar o vetor de coordenadas $(0, 4, 3)$ como vetor normal ao plano $BCD$ .....	1 ponto
Obter as coordenadas de um ponto do plano $BCD$ .....	2 pontos
Obter uma equação do plano $BCD$ .....	4 pontos
Escrever $4y + 3z + d = 0$ (ou equivalente) .....	2 pontos
Escrever $4 \times 12,5 + 3 \times 0 + d = 0$ .....	1 ponto
Obter o valor de $d$ ( $-50$ ) .....	1 ponto
Reconhecer que as coordenadas do ponto $C$ são da forma $(10, 4k, 3k)$ .....	2 pontos
Obter $16k + 9k - 50 = 0$ .....	2 pontos
Obter o valor de $k$ (2) .....	1 ponto
Obter o pedido $((10, 8, 6))$ .....	1 ponto

### 2.º Processo

Reconhecer que as coordenadas do ponto $A$ são $(10, 0, 0)$ .....	1 ponto
Reconhecer que as coordenadas do ponto $B$ são $(10; 12,5; 0)$ .....	1 ponto
Reconhecer que as coordenadas do ponto $C$ são da forma $(10, 4k, 3k)$ .....	2 pontos
Reconhecer que os vetores $\vec{AC}$ e $\vec{BC}$ são perpendiculares .....	1 ponto
Obter as coordenadas de $\vec{AC}$ em função de $k$ .....	1 ponto
Obter as coordenadas de $\vec{BC}$ em função de $k$ .....	1 ponto
Escrever $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$ .....	2 pontos
Obter $25k^2 - 50k = 0$ .....	2 pontos
Obter o valor de $k$ (2) .....	2 pontos
Obter o pedido $((10, 8, 6))$ .....	1 ponto



### 3.º Processo

Reconhecer que as coordenadas do ponto $A$ são $(10, 0, 0)$ .....	1 ponto
Reconhecer que as coordenadas do ponto $B$ são $(10; 12,5; 0)$ .....	1 ponto
Reconhecer que as coordenadas do ponto $C$ são da forma $(10, 4k, 3k)$ .....	2 pontos
Reconhecer que o ponto $C$ pertence à superfície esférica definida pela equação $(x - 10)^2 + \left(y - \frac{25}{4}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2$ .....	4 pontos
Escrever $0^2 + \left(4k - \frac{25}{4}\right)^2 + (3k)^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2$ .....	2 pontos
Obter o valor de $k$ (2) .....	3 pontos
Obter o pedido $((10, 8, 6))$ .....	1 ponto

7. .... 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

#### 1.º Processo

Reconhecer que o ponto $Q$ tem coordenadas $(2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha)$ .....	3 pontos
Reconhecer que a ordenada do ponto $P$ é $-2 \sin \alpha$ .....	3 pontos
Obter as coordenadas de $\overrightarrow{OP}$ .....	1 ponto
Obter as coordenadas de $\overrightarrow{OQ}$ .....	1 ponto
Obter $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 4 \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \alpha$ .....	3 pontos
Reconhecer que $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos(2\alpha)$ .....	2 pontos
Obter o valor pedido $\left(\frac{3}{4}\right)$ .....	1 ponto

#### 2.º Processo

Reconhecer que $\widehat{POQ} = \alpha - (2\pi - \alpha)$ .....	4 pontos
Reconhecer que $\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OA} = 2$ .....	1 ponto
Escrever $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 2 \times 2 \times \cos(2\alpha - 2\pi)$ (ou equivalente) .....	3 pontos
Reconhecer que $\cos(2\alpha - 2\pi) = \cos(2\alpha)$ .....	4 pontos
Escrever $4 \cos(2\alpha) = 3$ (ou equivalente) .....	1 ponto
Obter o valor pedido $\left(\frac{3}{4}\right)$ .....	1 ponto

8. .... 14 pontos

- Identificar a distância percorrida pelo foguete durante os 3 segundos com  $a(t+3) - a(t)$  ..... 3 pontos
- Apresentar a equação  $a(t+3) - a(t) = 25$  (ou equivalente) (**ver nota 1**) ..... 2 pontos
- Representar o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 2**) ..... 5 pontos
- Assinalar o ponto relevante ..... 2 pontos
- Apresentar o valor pedido (1,8 s) ..... 2 pontos

**Notas:**

- Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, desde que seja inequívoco que correspondem à resolução da equação que traduz corretamente o problema.
- Se não for apresentado um referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

9. .... 14 pontos

Tópicos de resposta

- Justifica que a proposição I é falsa: Dado que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x + 1) = 0$ , a reta de equação  $y = 2x - 1$  é assíntota oblíqua ao gráfico de  $f$  em  $+\infty$ , pelo que não existe assíntota horizontal ao gráfico de  $f$  em  $+\infty$ .
- Justifica que a proposição II é falsa: Dado que a reta de equação  $y = 2x - 1$  é tangente ao gráfico da função  $g$  no ponto de abcissa 1,  $g(1) = 1$  e, como  $g$  é diferenciável e, por conseguinte, contínua,  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$ .
- Justifica que a proposição III é falsa: Dado que o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para cima e o gráfico de  $g$  tem concavidade voltada para baixo,  $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  e  $g''(x) \leq 0, \forall x \in ]0, +\infty[$ , pelo que  $f''(x) \geq g''(x), \forall x \in ]0, +\infty[$ .

Parâmetros	Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
A Conteúdos	5	Apresenta, de forma completa, as três justificações.	12
	4	Apresenta, de forma completa, duas justificações e, de forma incompleta, uma justificação.	10
	3	Apresenta, de forma completa, apenas duas justificações. OU	8
		Apresenta, de forma completa, uma justificação e, de forma incompleta, duas justificações.	
	2	Apresenta, de forma completa, apenas uma justificação e, de forma incompleta, apenas outra justificação. OU	5
1	Apresenta, de forma completa, apenas uma justificação. OU	3	
B Linguagem científica	2	Utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	2
	1	Utiliza, embora com uma ou mais falhas, o vocabulário específico da Matemática.	1

10. .... 12 pontos

Opção (C)

11. .... 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Substituir  $i^{17}$  por  $i$  ..... 1 ponto

Obter  $e^{i\frac{5\pi}{6}} - i = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$  ..... 3 pontos

Obter  $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  ..... 2 pontos

Obter  $w = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  ..... 2 pontos

Obter  $e^{i\frac{\pi}{3}}$  e  $e^{i\frac{4\pi}{3}}$  como soluções da equação  $z^2 = w$  ..... 4 pontos

Obter os valores pedidos  $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ e } -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$  ..... 2 pontos

**2.º Processo**

Substituir  $i^{17}$  por  $i$  ..... 1 ponto

Obter  $e^{i\frac{5\pi}{6}} - i = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$  ..... 3 pontos

Obter  $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  ..... 2 pontos

Escrever  $(a + bi)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  ..... 2 pontos

Obter  $a^2 - b^2 = -\frac{1}{2} \wedge 2ab = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ..... 2 pontos

Obter os valores de  $a$  e de  $b$  ..... 2 pontos

Apresentar os valores pedidos  $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ e } -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$  ..... 2 pontos

12.1. .... 12 pontos

Opção (D)

12.2. .... 14 pontos

- Equacionar o problema ( $f(x) = -x + 2$ , ou equivalente) ..... 2 pontos
- Considerar a função  $g$ , definida por  $g(x) = f(x) + x - 2$  ..... 2 pontos
- Referir que a função  $g$  é contínua em  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$  (ver notas 1 e 2)..... 2 pontos
- Determinar  $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$  ..... 2 pontos
- Determinar  $g\left(\frac{\pi}{3}\right)$  ..... 2 pontos
- Concluir que  $g\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0 < g\left(\frac{\pi}{3}\right)$  (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Concluir o pretendido ..... 2 pontos

**Notas:**

1. Se apenas for referido que a função  $g$  é contínua, esta etapa é considerada como cumprida.
2. Se for referido que a função  $g$  é contínua em  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ , a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

13. .... 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

- Reconhecer que, como  $f$  é uma função quadrática, a reta é tangente ao gráfico de  $f$  se a equação  $ax^2 + bx = ax + b$  tiver apenas uma solução ..... 3 pontos
- Reconhecer que a equação anterior tem apenas uma solução se  $(b - a)^2 + 4ab = 0$  ..... 3 pontos
- Concluir que  $b = -a$  ..... 2 pontos
- Substituir  $b$  por  $-a$  na equação  $ax^2 + bx = ax + b$  ..... 2 pontos
- Obter a solução da equação anterior ..... 2 pontos
- Obter o pedido  $((1,0))$  ..... 2 pontos

**2.º Processo**

- Determinar  $f'(x)$  (ver nota) ..... 2 pontos
- Obter a solução da equação  $f'(x) = a$  em função de  $a$  e de  $b$  ..... 2 pontos
- Obter as coordenadas do ponto de tangência em função de  $a$  e de  $b$  ..... 3 pontos
- Substituir, na equação  $y = ax + b$ ,  $x$  e  $y$ , respetivamente, pela abcissa e pela ordenada do ponto de tangência ..... 2 pontos
- Concluir que  $b = -a$  ..... 3 pontos
- Obter o pedido  $((1,0))$  ..... 2 pontos

**Nota:** Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

## COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	3.	4.1.	5.1.	5.3.	6.1.	6.2.	8.	9.	10.	12.1.	13.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	14	12	14	12	14	14	14	12	12	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.	4.2.	5.2.	7.	11.	12.2.	Subtotal						
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos						42						
<b>TOTAL</b>													<b>200</b>