Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1ª Fase | Ensino Secundário | 2021

1.

1.1. Para que a reta seja perpendicular à reta EF o produto escalar do seu vetor diretor com o vetor diretor da reta EF tem de ser igual a 0.

$(A):(2,-3,0).(-3,-2,2)=0$
$(B):(0,3,-3).(-3,-2,2)=-12$
$(C):(0,3,3).(-3,-2,2)=0$
$(D):(2,0,-3).(-3,-2,2)=-12$

Concluímos que só poderá ser a opção(A) ou a opção(C).

Vamos averiguar se o ponto E pertence à reta definida na opção(A):

$(7,2,15)=(7,-3,3)+k(2,-3,0);\quad k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7=7+2k\\2=-3-3k\,;\\15=3+0k\end{cases}\quad k\in\mathbb{R}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}k=0\\k=-\frac{5}{3}\\12=0\end{cases}$$

Concluímos que o ponto E não pertence à reta definida na opção(A).

Vamos averiguar se o ponto E pertence à reta definida na opção(C):

$(7,2,15)=(7,-10,3)+k(0,3,3);\quad k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7=7+0k\\2=-10+3k\,;\\15=3+3k\end{cases}\quad k\in\mathbb{R}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}7=7\\k=4\\k=4\end{cases}$$

Concluímos que o ponto E pertence à reta definida na opção(C).

Opção(C)

1.2. Através da condição que define a reta EF, sabemos que o seu vetor diretor tem coordenadas $(-3,-2,2)$.

Como o plano FGB é perpendicular à reta EF, o vetor $(-3,-2,2)$ é um vetor normal do plano. Assim a equação do plano é da forma: $-3x-2y+2z+d=0$.

Como o ponto G pertence ao plano FGB, substituindo as coordenadas do ponto G na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$-3x-2y+2z+d=0 \;\Leftrightarrow\; -3\times 6-2\times 10+2\times 13+d=0 \;\Leftrightarrow\; d=12$$

Logo, $FGB: -3x-2y+2z+12=0$.

Sabendo que o ponto B pertence ao eixo Oy, então tem coordenadas $(0,y,0)$.

Como o ponto B pertence ao plano FGB, substituindo as coordenadas do ponto B na equação do plano conseguimos determinar a sua ordenada:

$$-3\times 0-2y+2\times 0+12=0 \;\Leftrightarrow\; y=6$$

O ponto B tem coordenadas $(0,6,0)$.

O raio da superfície esférica é igual à distância entre os pontos E e G:

$$d(EG)=\sqrt{(7-6)^2+(2-10)^2+(15-13)^2}=\sqrt{69}$$

A equação da superfície esférica de centro no ponto B e que passa no ponto D é:

$$x^2+(y-6)^2+z^2=69$$

2. Observando a figura, temos que:

$$A_{[ABC]}=A_{[AOC]}+A_{[OCB]}$$

Vamos aplicar as razões trigonométricas cosseno e seno ao triângulo retângulo $[OCB]$:

- $\cos(\pi-\alpha)=\frac{c.adjacente}{hipotenusa} \Leftrightarrow \cos(\pi-\alpha)=\frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow -\cos\alpha=\frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow \overline{OC}=-3\cos\alpha$

- $\sin(\pi-\alpha) = \frac{c.oposto}{hipotenusa} \Leftrightarrow \sin(\pi-\alpha) = \frac{\overline{BC}}{3} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{3} \Leftrightarrow \overline{BC} = 3\sin\alpha$

Calculando a área do triângulo $[OCB]$:

$$A_{[OCB]} = \frac{b\times h}{2} = \frac{\overline{OC}\times\overline{BC}}{2} = \frac{-3\cos\alpha\times 3\sin\alpha}{2} = \frac{-9\cos\alpha\sin\alpha}{2}$$

Seja A' o pé da perpendicular do ponto A ao eixo das abcissas.

Aplicando a razão trigonométrica seno ao triângulo retângulo $[AA'O]$ conseguimos determinar $\overline{AA'}$:

- $\sin(\pi-\alpha) = \frac{c.oposto}{hipotenusa} \Leftrightarrow \sin(\pi-\alpha) = \frac{\overline{AA'}}{3} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\overline{AA'}}{3} \Leftrightarrow \overline{AA'} = 3\sin\alpha$

Calculando a área do triângulo $[AOC]$:

$$A_{[AOC]} = \frac{b\times h}{2} = \frac{\overline{OC}\times\overline{AA'}}{2} = \frac{-3\cos\alpha\times 3\sin\alpha}{2} = \frac{-9\cos\alpha\sin\alpha}{2}$$

Assim vem que:

$$A_{[ABC]} = \frac{-9\cos\alpha\sin\alpha}{2} + \frac{-9\cos\alpha\sin\alpha}{2} = \frac{-18\cos\alpha\sin\alpha}{2} = -9\cos\alpha\sin\alpha \qquad \text{c.q.d.}$$

3. Consideremos os acontecimentos:

   R: Ser rapariga
   E: Ser estrangeiro

   Como 60% dos alunos são raparigas vem que:

   $P(R) = 0,6$
   $P(\overline{R}) = 0,4$

   Sabemos também que 15% dos alunos são rapazes estrangeiros:

   $P(\overline{R}\cap E) = 0,15$

	$\overline{R}$	R	
$\overline{E}$			
E	$0,15$		
	$0,4$	$0,6$	

De acordo com a tabela acima, temos que:

$P(\overline{E} \cap \overline{R}) = 0,4 - 0,15 = 0,25$

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$P(\overline{E}|\overline{R}) = \frac{P(\overline{E} \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{0,25}{0,4} = 0,625 = 62,5\%$

Opção(D)

4. Sabemos que os dois condutores são dirigentes, o número de maneiras de escolher dois dos três dirigentes é igual a ${}^3C_2$ mas como eles podem permutar entre si temos ${}^3C_2 \times 2!$ de hipóteses.

   No automóvel, vão dois jogadores de cada sexo, ou seja, temos de escolher duas das cinco raparigas e dois dos cinco rapazes sendo que também eles podem permutar entre si (diferentes lugares no carro) logo temos ${}^5C_2 \times {}^5C_2 \times 4!$ possibilidades.

   Das restantes 8 pessoas vamos distribuí-las pelos 8 lugares que sobram, por isso temos 8! hipóteses.

   O número de maneiras diferentes de distribuir os catorze elementos da comitiva pelos catorze lugares disponíveis, sabendo-se que os dois condutores são dois dos dirigentes e que, no automóvel, vão dois jogadores de cada sexo é igual a:

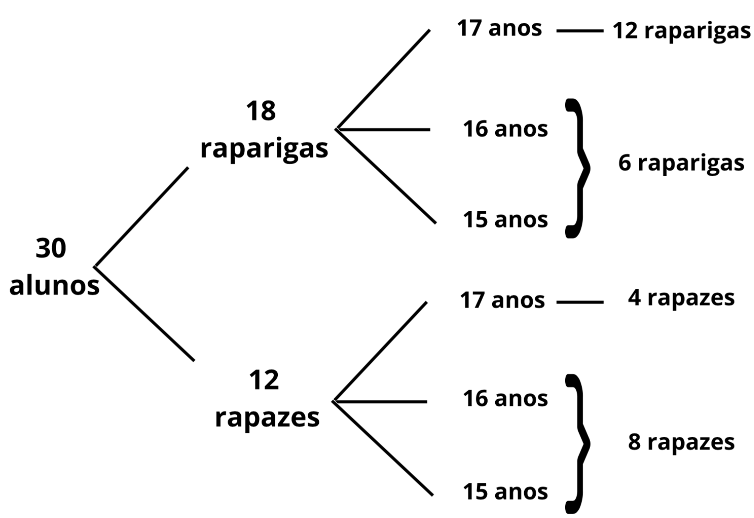
$$ {}^3C_2 \times 2! \times {}^5C_2 \times {}^5C_2 \times 4! \times 8! $$

5. Como 60% dos 30 alunos são raparigas, então existem na turma $0,6 \times 30 = 18$ raparigas e $30 - 18 = 12$ rapazes.

Dos 12 rapazes, um terço tem 17 anos, o que corresponde a $\frac{1}{3} \times 12 = 4$ rapazes. Assim temos $12 - 4 = 8$ rapazes com 16 ou 15 anos.

Um terço das raparigas tem 15 ou 16 anos, ou seja, $\frac{1}{3} \times 18 = 6$ raparigas. O que significa que temos $18 - 6 = 12$ raparigas com 17 anos.

O esquema em árvore ajuda a compreender:



O número de casos possíveis é igual ao número total de maneiras de escolher cinco alunos da turma composta por 30 alunos: ${}^{30}C_5 = 142506$.

Considerando que o André e a Beatriz já foram escolhidos e que ambos têm 16 anos, então ficamos com 7 rapazes com 16 ou 15 anos e 5 raparigas com 16 ou 15 anos.

Dos 16 alunos com 17 anos vamos escolher dois e dos 12 alunos com 16 ou 15 anos vamos escolher um, ou seja, o número de casos favoráreis é igual a ${}^{16}C_2 \times {}^{12}C_1 = 1440$.

A probabilidade de o grupo constituído por cinco alunos ser formado pelo André, pela Beatriz, por dois jovens com 17 anos e por outro com 15 ou 16 anos, arrendondado às centésimas, é igual a:

$$\frac{1440}{142506} \approx 0,01$$

6. Como (v_n) é uma progressão geométrica de razão r então temos que:

$$v_8 = v_5 \times r^3 \Leftrightarrow 108 = 4 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{108}{4} \Leftrightarrow r^3 = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow r = 3$$

Assim temos que $v_6 = v_5 \times r = 4 \times 3 = 12$

Opção(A)

7. Considerando que n é um número ímpar então $u_n = 2 + \frac{1}{n}$

   Vamos determinar quantos termos de ordem ímpar da sucessão u_n pertencem ao intervalo $\left[\frac{83}{41}, \frac{67}{33}\right]$:

   $\frac{83}{41} \leq u_n \leq \frac{67}{33} \Leftrightarrow \frac{83}{41} \leq 2 + \frac{1}{n} \leq \frac{67}{33} \Leftrightarrow \frac{83}{41} - 2 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{67}{33} - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{41} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{33} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{41} \wedge \frac{1}{n} \leq \frac{1}{33} \Leftrightarrow n \leq 41 \wedge n \geq 33 \Leftrightarrow 33 \leq n \leq 41$

   Existem 5 termos de ordem ímpar da sucessão u_n que pertencem ao intervalo $\left[\frac{83}{41}, \frac{67}{33}\right]$.

8. w é um dos vértices de um polígono regular com centro na origem do referencial.

   $w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{3\pi}{28}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{28}\right)} = e^{i\frac{4\pi}{28}} = e^{i\frac{2\pi}{14}} = e^{i\frac{\pi}{7}}$

   O mesmo polígono tem outro vértice sobre o semieixo real positivo que pode ser representado pelo número complexo $z = e^{i0}$

   Se este polígono tiver 7 vértices então o ângulo entre dois vértices consecutivos é igual a $\frac{2\pi}{7}$, ou seja, se andarmos no sentido positivo do círculo trigonométrico o vértice consecutivo ao vértice representado por z é representado pelo número complexo $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ o que ultrapassa o vértice representado por w, por isso esta não é a opção correta pois o afixo de w não poderá ser nenhum dos vértices do polígono.

   Se este polígono tiver 14 vértices então o ângulo entre dois vértices consecutivos é igual a $\frac{2\pi}{14} = \frac{\pi}{7}$, ou seja, se andarmos no sentido positivo do círculo trigonométrico o vértice consecutivo ao vértice representado por z é representado pelo número complexo $z_1 = e^{i\frac{\pi}{7}} = w$, esta é a opção correta.

   Opção(B)

9. Vamos começar por determinar na forma algébrica o número complexo w:

$$w = \frac{z_1 \times z_2}{z_3} = \frac{(-3+2i)(1+2i)}{2-i} = \frac{-3-6i+2i-4}{2-i} = \frac{-7-4i}{2-i} = \frac{(-7-4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-14-7i-8i+4}{2^2+1^2} = \frac{-10-15i}{5} =$$

$$= -2-3i$$

Calculando o módulo de w: $|w| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ c.q.d.

O afixo do número complexo w pertence ao 3º quadrante e como $Re(w) > Im(w)$ então $\frac{5\pi}{4} < Arg(w) < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} < Arg(w) < -\frac{\pi}{2}$ c.q.d.

10.

10.1. Calculando o valor da função f no ponto $x = 1$:

$$f(1) = -1^2(1+2\ln 1) = -1(1+0) = -1$$

Calculando o valor dos limites laterais da função f no ponto $x = 1$:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} -x^2(1+2\ln x) = -1^2(1+2\ln 1) = -1(1+0) = -1$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} = 5 \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1-e^{x-1}}{x^2+3x-4} = -5 \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{(x-1)(x+4)} =$

  $= -5 \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{e^{x-1}-1}{x-1} \times \frac{1}{x+4}\right) = -5 \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \times \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x+4} =$

  $= -5 \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \times \frac{1}{5} = -\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \quad (*_1)$

  Fazendo a mudança de variável: $y = x-1$ ($y \to 0^+$ quando $x \to 1^+$)

  $(*_1) = -\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{e^y-1}{y} = -1$ (Limite notável)

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$, então a função f é contínua em $x = 1$.

10.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f no intervalo $]0,1[$:

$f'(x) = [-x^2(1+2\ln x)]' = -2x(1+2\ln x) + \frac{2}{x} \times -x^2 = -2x(1+2\ln x) - 2x =$

$= -2x(1+2\ln x + 1) = -2x(2+2\ln x)$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x(2+2\ln x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \vee 2+2\ln x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee \ln x = -1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = e^{-1} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{e}$

Logo, $f'(x)$ tem um zero em $]0,1[$ igual a $\frac{1}{e}$.

$f'(0,1) > 0$

$f'(0,5) < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$f'(x)$	n.d.	$+$	0	-	n.d.
$f(x)$	n.d.	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	n.d.

O gráfico de f é crescente no intervalo $\left]0,\frac{1}{e}\right]$ e é decrescente no intervalo $\left[\frac{1}{e},1\right[$.

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\left(\frac{1}{e}\right)^2\left[1+2\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right] = -\frac{1}{e^2}[1+2\times -1] = \frac{1}{e^2}$

A função f tem um máximo relativo em $x = \frac{1}{e}$ igual a $\frac{1}{e^2}$.

11. Se existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$, temos que:

$$\exists\, c \in \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\text{ tal que } g'(c) = -\frac{1}{2}$$

Vamos começar por determinar a expressão da primeira derivada da função $g(x)$:

$g'(x) = \cos x + (-\sin x) \times x + \cos x = \cos x - x \sin x + \cos x = 2\cos x - x \sin x$

Sabemos que $g'(x)$ é uma função contínua em $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ pois resulta da diferença de duas funções contínuas, o produto de uma função constante com uma trigonométrica e o produto de uma função polinomial com uma função trigonométrica.

- $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

- $g'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{3\pi}{2}\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

Como $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) < -\frac{1}{2} < g'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, pelo Teorema de Bolzano $\exists\, c \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ tal que $g'(c) = -\frac{1}{2}$.

Logo a equação $g'(x) = -\frac{1}{2}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Assim, existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$.

12. A função h só está definida em $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$, logo vamos averiguar a existência de uma única assíntota oblíqua quando $x \to +\infty$.

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{2x^2-\ln x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^3 - x\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3\left(2-\frac{\ln x}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2-\frac{\ln x}{x^2}} =$
$= \frac{1}{2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}} = \frac{1}{2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \times \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = \frac{1}{2-0\times 0} = \frac{1}{2}$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[h(x) - \frac{1}{2}x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{2x^2-\ln x} - \frac{x}{2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3-(2x^3-x\ln x)}{4x^2-2\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{4x^2-2\ln x} =$
$= \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{2x^2-\ln x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{x^2\left(2-\frac{\ln x}{x^2}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}{2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}{2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} =$
$= \frac{1}{2} \times \frac{0}{2-0\times 0} = \frac{1}{2} \times \frac{0}{2} = \frac{1}{2} \times 0 = 0$

Concluímos que $h(x)$ tem uma assíntota oblíqua de equação $y = \frac{1}{2}x$ quando $x \to +\infty$.

13.

13.1. A altura do combustível no depósito no início do vazamento é igual a:

$$a(0) = 1,8 - (0,216 + 0,0039 \times 0)^{\frac{2}{3}} = 1,44 \text{ m}$$

A altura do combustível quando este ocupa metade da capacidade do depósito é igual a:

$$1,8 : 2 = 0,9 \text{ m}$$

A diferença entre a altura do combustível no depósito no início do vazamento e a altura do combustível quando este ocupa metade da capacidade do depósito, em metros é igual a:

$$1,44 - 0,9 = 0,54 \text{ m}$$

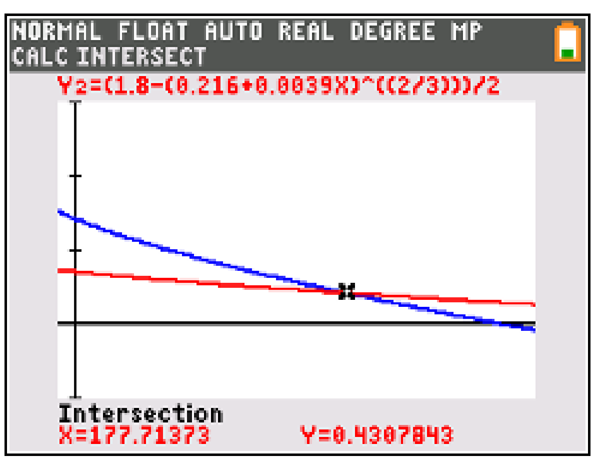
Opção(B)

13.2. Seja t_1 o tempo em minutos após o início do vazamento em que a altura do combustível no depósito é igual a um certo valor.

Passado igual período de tempo, a altura do combustível no depósito é igual a metade desse valor, o que corresponde à equação:

$$a(2t_1) = \frac{a(t_1)}{2} \Leftrightarrow 1,8 - (0,216 + 0,0039 \times 2t_1)^{\frac{2}{3}} = \frac{1,8-(0,216+0,0039\times t_1)^{\frac{2}{3}}}{2}$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Considerando I o ponto de interseção visualizado na máquina, as suas coordenadas arredondadas às centésimas são: $I(177,71;0,43)$

O instante t_1, em minutos, arredondado às centésimas é igual a $177,71$, o que corresponde a 2 horas e 58 minutos.

14. Vamos determinar o domínio da equação:

$(1-x)e^{x-1} > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0$ (porque $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x-1} > 0$) $\Leftrightarrow x < 1$

Ou seja, esta equação está definida em $]-\infty,1[$.

Resolvendo a equação:

$\ln\left[(1-x)e^{x-1}\right] = x \Leftrightarrow e^{\ln\left[(1-x)e^{x-1}\right.} = e^x \Leftrightarrow (1-x)e^{x-1} = e^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-x = \frac{e^x}{e^{x-1}} \Leftrightarrow 1-x = e^{x-(x-1)} \Leftrightarrow 1-x = e \Leftrightarrow x = 1-e$

$x = 1-e \in]-\infty,1[$, logo este é o único número real que é solução da equação.

15. A, B e C são os pontos de interseção dos gráficos de f e g, por isso as suas abcissas são as soluçoes da equação:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow k\sin 2x = k\cos x \Leftrightarrow \sin 2x = \cos x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x = \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Como $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ então a equação tem três soluções $x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{2}$

A é o ponto de menor abcissa e C o ponto de maior abcissa logo vem que:

$$A\big(-\tfrac{\pi}{2}, g\big(-\tfrac{\pi}{2}\big)\big) \qquad B\big(\tfrac{\pi}{6}, g\big(\tfrac{\pi}{6}\big)\big) \qquad C\big(\tfrac{\pi}{2}, g\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\big)$$

$$A\left(-\frac{\pi}{2},0\right) \qquad B\left(\frac{\pi}{6},k\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad C\left(\frac{\pi}{2},0\right)$$

Com as coordenadas dos pontos $A\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $B\left(\frac{\pi}{6},k\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $C\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ podemos calcular as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{BA} = A - B = \left(-\frac{2\pi}{3}, -k\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\overrightarrow{BC} = C - B = \left(\frac{\pi}{3}, -k\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Sabendo que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, vem que:

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{2\pi}{3}, -k\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\left(\frac{\pi}{3}, -k\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2\pi^2}{9} + k^2\,\frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow k^2 = \frac{\frac{2\pi^2}{9}}{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 = \frac{8\pi^2}{27} \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{8\pi^2}{27}} \Leftrightarrow k = \sqrt{\frac{8\pi^2}{27}}\ _{k>0} \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{8}\pi}{\sqrt{27}} \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{216}\pi}{27} \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{216}\pi}{27} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \frac{6\sqrt{6}\pi}{27} \Leftrightarrow k = \frac{2\sqrt{6}\pi}{9}$