Resolução - Propriedades dos logaritmos

1. Tendo em atenção as propriedades dos logarítmos:

   $\ln(a^2 - b^2) - 2\ln(a+b) = \ln[(a+b)(a-b)] - \ln(a+b)^2 = \ln(a+b) + \ln(a-b) - \ln[(a+b)(a+b)] =$

   $= \ln(a+b) + \ln(a-b) - [\ln(a+b) + \ln(a+b)] = \ln(a+b) + \ln(a-b) - \ln(a+b) - \ln(a+b) = \ln(a-b) - \ln(a+b)$

   Substituindo $a+b = 2(a-b)$, vem que:

   $\ln(a-b) - \ln(a+b) = \ln(a-b) - \ln[2(a-b)] =$

   $= \ln(a-b) - [\ln 2 + \ln(a-b)] = \ln(a-b) - \ln 2 - \ln(a-b) = -\ln 2 \approx -0,7$

   Notas:

   $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ (Caso notável)

   $2\ln(a+b) = \ln(a+b)^2$ (Propriedade dos logarítmos)

   $\ln[(a+b)(a+b)] = \ln(a+b) + \ln(a+b)$ (Propriedade dos logarítmos)

   Opção(C)

   2019, 1ª fase, caderno 1

2. Usando as propriedades dos logarítmos temos que:

$$\ln b = 4\ln a \Leftrightarrow \ln b = \ln a^4 \Leftrightarrow b = a^4$$

Resolvendo a inequação:

$a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \;\Leftrightarrow\; a^x \geq (a^4)^{\frac{1}{x}} \;\Leftrightarrow\; a^x \geq a^{4\times\frac{1}{x}} \;\Leftrightarrow\; a^x \geq a^{\frac{4}{x}} \;\Leftrightarrow\; x \geq \frac{4}{x} \;\Leftrightarrow\; x - \frac{4}{x} \geq 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \frac{x^2-4x}{x} \geq 0$

Seja f uma função tal que $f(x) = \frac{x^2-4x}{x}$.

Calculando os zeros de $f(x)$:

$$\frac{x^2-4x}{x} = 0 \;\wedge x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; x = -2 \vee x = 2$$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
x^2-4	+	0	-	n.d.	-	0	+
x	-	-	-	n.d.	+	+	+
$f(x)$	-	0	+	n.d.	-	0	+

C.S= $[-2, 0[\cup [2, +\infty[$

2018, 1ª fase, caderno 2

3. Usando as propriedades dos logarítmos vamos resolver a inequação:

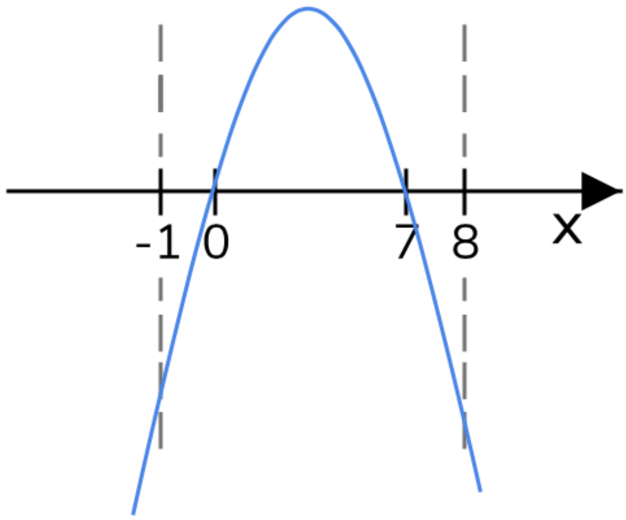
$\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x) \;\wedge\; x+1 > 0 \;\wedge\; 8-x > 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \log_2(x+1) \leq \log_2 2^3 - \log_2(8-x) \;\wedge\; x > -1 \;\wedge\; x < 8 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \log_2(x+1) \leq \log_2(\frac{8}{8-x}) \;\wedge\; x \in]-1, 8[\;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \log_2(x+1) - \log_2(\frac{8}{8-x}) \leq 0 \;\wedge\; x \in]-1, 8[\;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ \log_2(\frac{(x+1)(8-x)}{8}) \leq 0 \ \wedge \ x \in]-1,8[\ \Leftrightarrow \ \log_2(\frac{8x-x^2+8-x}{8}) \leq 0 \ \wedge \ x \in]-1,8[\ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ \log_2(\frac{-x^2+7x+8}{8}) \leq 0 \ \wedge \ x \in]-1,8[\ \Leftrightarrow \ \frac{-x^2+7x+8}{8} \leq 2^0 \ \wedge \ x \in]-1,8[\ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ \frac{-x^2+7x+8}{8} \leq 1 \ \wedge \ x \in]-1,8[\ \Leftrightarrow \ -x^2+7x+8 \leq 8 \ \wedge \ x \in]-1,8[\ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ -x^2+7x \leq 0 \ \wedge \ x \in]-1,8[$

Calculando os zeros da parábola $-x^2+7x$, temos:

$$-x^2+7x=0 \ \Leftrightarrow \ x(-x+7)=0 \ \Leftrightarrow \ x=0 \ \vee -x+7=0 \ \Leftrightarrow \ x=0 \ \vee x=7$$

Sabendo que a parábola tem concavidade voltada para baixo pois o coeficiente de 2ºgrau é negativo, podemos representar a parábola na reta real no intervalo $]-1,8[$:



Logo, C.S.$=]-1,0] \cup [7,8[$

2018, 2ª fase, caderno 2

4. Usando as propriedades dos logaritmos temos:

$4 + log_a(5^{ln\,a}) = 4 + ln\,a \times log_a 5 = 4 + \frac{log_a a}{log_a e} \times log_a 5 = 4 + \frac{1}{log_a e} \times log_a 5 = 4 + \frac{log_a 5}{log_a e} =$
$= 4 + ln5 = ln\,e^4 + ln5 = ln(5e^4)$

2017, Época especial, grupo I

5. Usando as propriedades dos logaritmos temos:

$log_a(ab^3) = 5 \;\Leftrightarrow\; log_a a + log_a b^3 = 5 \;\Leftrightarrow\; 1 + 3log_a b = 5 \;\Leftrightarrow\; 3log_a b = 4 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow log_a b = \frac{4}{3}$

Assim temos que:

$$log_b a = \frac{log_a a}{log_a b} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

Opção(B)

2016, 2ª fase, grupo I

6. Fazendo a substituição $a = b^3$ temos:

$log_a b + log_b a = \frac{log_b b}{log_b a} + log_b b^3 = \frac{1}{log_b b^3} + 3 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$

Opção(C)

2016, Época especial, grupo I

7. Usando as propriedades dos logaritmos e as regras das potências temos:

$$log_3 \frac{3^k}{9} = log_3 \frac{3^k}{3^2} = log_3 3^{k-2} = (k-2) log_3 3 = (k-2) \times 1 = k-2$$

Opção(B)

2015, 1ª fase, grupo I

8. Usando as propriedades dos logaritmos vem que:

$$log_a (a^2 b) = log_a a^2 + log_a b = 2 log_a a + \frac{log_b b}{log_b a} = 2 \times 1 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 2 + 3 = 5$$

Opção(D)

2015, 2ª fase, grupo I