Resolução - Produto escalar

1. Observando a figura sabemos que:

$$|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| = \text{raio} = 3$$

De modo a calcular o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ vamos usar uma regra de três simples:

Perímetro		Ângulo
2π	——	α
$2\pi \times 3$	——	2π

$\alpha = \overrightarrow{CA}\,\hat{}\,\overrightarrow{CB} = \frac{2\pi \times 2\pi}{6\pi} = \frac{2\pi}{3}$

Usando a fórmula do produto escalar vem que:

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \times |\overrightarrow{CB}| \times \cos(\overrightarrow{CA}\,\hat{}\,\overrightarrow{CB}) = 3 \times 3 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 9 \times -\frac{1}{2} = -\frac{9}{2}$

2022, 1ª fase

2. Sabendo as coordenadas dos pontos A (2,1,0) e V $(3,-1,2)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AV}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AV} = V - A = (3,-1,2) - (2,1,0) = (1,-2,2)$$

$$||\overrightarrow{AV}|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Com as coordenadas dos pontos A (2,1,0) e C$(0,-1,2)$ podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,-1,2) - (2,1,0) = (-2,-2,2)$$

$$||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{AV}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AV}.\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AV}|| \times ||\overrightarrow{AC}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AV}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}) = \frac{(1,-2,2).(-2,-2,2)}{3 \times 2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AV}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}) =$

$= \frac{-2+4+4}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AV}\hat{\ }\overrightarrow{AC}) = \frac{6}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AV}\hat{\ }\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow V\hat{A}C \approx 55^o$

2019, 1ª fase, caderno 1

3. Como [PQ] e [QR] são arestas de uma das bases do prisma vem que:

$$||\overrightarrow{QP}|| = ||\overrightarrow{QR}|| = 4$$

A base do prisma é um hexágono regular, que pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros.

Portanto cada ângulo interno do hexágono regular tem o dobro da amplitude de um ângulo interno do triângulo equilátero, logo:

$$R\hat{Q}P = 60 \times 2 = 120^o$$

Usando a fórmula do produto escalar temos que:

$\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QR} = \cos(\overrightarrow{QP}\hat{\ }\overrightarrow{QR}) \times ||\overrightarrow{QP}|| \times ||\overrightarrow{QR}|| = \cos(120^o) \times 4^2 = -\frac{1}{2} \times 16 = -8$

2018, 1ª fase, caderno 1

4. Sabendo as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e C $(1, 2, -1)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{OC} = C - O = (1, 2, -1) - (0, 0, 0) = (1, 2, -1)$$

$$||\overrightarrow{OC}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Com as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e A$(1, 2, 1)$ podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (1, 2, 1) - (0, 0, 0) = (1, 2, 1)$$

$$||\overrightarrow{OA}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{OC} \hat{} \overrightarrow{OA}) = \frac{\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}}{||\overrightarrow{OC}|| \times ||\overrightarrow{OA}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OC} \hat{} \overrightarrow{OA}) = \frac{(1,2,-1).(1,2,1)}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OC} \hat{} \overrightarrow{OA}) =$
$= \frac{1+4-1}{6} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OC} \hat{} \overrightarrow{OA}) = \frac{4}{6} \Leftrightarrow A\hat{O}C = \cos^{-1}(\frac{2}{3}) \Leftrightarrow A\hat{O}C \approx 48^o$

2018, 2ª fase, caderno 1

5. O ponto R é o ponto de interseção da superfície esférica com o semieixo negativo das ordenadas logo as suas coordenadas são da forma (0,y,0) com y<0.

   Conseguimos determinar y, substituindo as coordenadas do ponto R na equação da superfície esférica:

$$0^2 + y^2 + 0^2 = 3 \Leftrightarrow y^2 = 3 \Leftrightarrow y = -\sqrt{3} \qquad \text{(y<0)}$$

   Assim sabemos que o ponto R tem coordenadas $(0, -\sqrt{3}, 0)$.

   Sabendo as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e R $(0, -\sqrt{3}, 0)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OR}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{OR} = R - O = (0, -\sqrt{3}, 0) - (0,0,0) = (0, -\sqrt{3}, 0)$$

$$||\overrightarrow{OR}|| = \sqrt{0^2 + (-\sqrt{3})^2 + 0^2} = \sqrt{3}$$

   Com as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e P(1, 1, 1) podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (1,1,1) - (0,0,0) = (1,1,1)$$

$$||\overrightarrow{OP}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

   Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

   $\cos(\overrightarrow{OR} \hat{} \overrightarrow{OP}) = \frac{\overrightarrow{OR}.\overrightarrow{OP}}{||\overrightarrow{OR}|| \times ||\overrightarrow{OP}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OR} \hat{} \overrightarrow{OP}) = \frac{(0,-\sqrt{3},0).(1,1,1)}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OR} \hat{} \overrightarrow{OP}) =$
   $= -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow R\hat{O}P \approx 125^o$

   2018, Época especial, caderno 1

6. Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$$\cos(\overrightarrow{UP} \wedge \overrightarrow{RS}) = \frac{\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS}}{||\overrightarrow{UP}|| \times ||\overrightarrow{RS}||}$$

De acordo com a figura 3, os vetores $\overrightarrow{UP}$ e $\overrightarrow{RS}$ têm a mesma direção e sentidos contrários, ou seja, o ângulo formado pelos dois vetores tem amplitude π e $||\overrightarrow{UP}|| = ||\overrightarrow{RS}|| = 3$.

Assim temos que:

$$\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS} = \cos(\overrightarrow{UP} \wedge \overrightarrow{RS}) \times ||\overrightarrow{UP}|| \times ||\overrightarrow{RS}|| = \cos(\pi) \times 3 \times 3 = -9$$

2017, 1ª fase, grupo II

7. De acordo com a figura 4, a base [EFGH] tem aresta igual a 2 e sabendo as coordenadas dos pontos A e D conseguimos perceber que o ponto P tem coordenadas (1,5,z), sendo que z é igual ao valor da altura da pirâmide regular de base [EFGH].

   Através da fórmula do volume da pirâmide vamos determinar a cota do ponto P:

   $V_{pirâmide} = \frac{1}{3}A_{base} \times altura \;\Leftrightarrow\; 4 = \frac{1}{3} \times 2^2 \times z \;\Leftrightarrow\; 4 = \frac{4}{3} \times z \;\Leftrightarrow\; z = \frac{4}{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow\; z = 3$

   Assim, P tem coordenadas (1,5,5).

   Sabendo que G(2,6,2) e P(1,5,5) podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GP}$ e a sua norma:

   $$\overrightarrow{GP} = P - G = (1,5,5) - (2,6,2) = (-1,-1,3)$$

   $$||\overrightarrow{GP}|| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

   Com as coordenadas dos pontos G e O (O é a origem do referencial) podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GO}$ e a sua norma:

   $$\overrightarrow{GO} = O - G = (0,0,0) - (2,6,2) = (-2,-6,-2)$$

   $$||\overrightarrow{GO}|| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{44}$$

   Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{GO}\hat{}\overrightarrow{GP}) = \frac{\overrightarrow{GO}.\overrightarrow{GP}}{||\overrightarrow{GO}||\times||\overrightarrow{GP}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{GO}\hat{}\overrightarrow{GP}) = \frac{(-2,-6,-2).(-1,-1,3)}{\sqrt{44}\times\sqrt{11}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{GO}\hat{}\overrightarrow{GP}) = \frac{2+6-6}{\sqrt{44\times 11}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{GO}\hat{}\overrightarrow{GP}) = \frac{2}{\sqrt{484}} \Leftrightarrow O\hat{G}P = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{484}}\right) \Leftrightarrow O\hat{G}P \approx 85^o$

2017, 2ª fase, grupo II

8. Através da condição que define a reta r, sabemos que o seu vetor diretor tem coordenadas $(1, 1, -1)$.

   Como o plano α é perpendicular à reta r, o vetor $(1, 1, -1)$ é um vetor normal do plano α. Assim temos que $\alpha : x + y - z + d = 0$.

   Substituindo as coordenadas do ponto A (que pertence ao plano α) na equação do plano α, conseguimos determinar a constante d:

$$x + y - z + d = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 - 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

   Logo, $\alpha : x + y - z - 3 = 0$.

   Como o ponto P pertence ao plano α, substituindo na equação do plano α os valores da abcissa e ordenada podemos calcular o valor da cota do ponto P:

$$x + y - z - 3 = 0 \Leftrightarrow 2 + 2 - z - 3 = 0 \Leftrightarrow z = 1$$

   O ponto P tem coordenadas $(2, 2, 1)$.

   Sabendo que O$(0, 0, 0)$ e P$(2, 2, 1)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (2, 2, 1) - (0, 0, 0) = (2, 2, 1)$$

$$||\overrightarrow{OP}|| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

   Com as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e C podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OC}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{OC} = C - O = (1, 2, 3) - (0, 0, 0) = (1, 2, 3)$$

$$||\overrightarrow{OC}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{OP}\,\hat{}\,\overrightarrow{OC}) = \frac{\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OC}}{||\overrightarrow{OP}|| \times ||\overrightarrow{OC}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OP}\,\hat{}\,\overrightarrow{OC}) = \frac{(2,2,1).(1,2,3)}{3 \times \sqrt{14}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OP}\,\hat{}\,\overrightarrow{OC}) =$
$= \frac{2+4+3}{3\sqrt{14}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OP}\,\hat{}\,\overrightarrow{OC}) = \frac{9}{3\sqrt{14}} \Leftrightarrow P\hat{O}C = \cos^{-1}(\frac{3}{\sqrt{14}}) \Leftrightarrow P\hat{O}C \approx 37^o$

2017, Época especial, grupo II

9. Como o triângulo $[ABC]$ é isósceles $B\hat{A}C = B\hat{C}A = 75^o$.

   Portanto $a\hat{B}C = 180 - 75 - 75 = 30^o$.

   Recorrendo à fórmula do produto escalar:

   $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \cos(\overrightarrow{BA}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC}) \times ||\overrightarrow{BA}|| \times ||\overrightarrow{BC}|| = \cos 30 \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$

   Opção(C)

   2016, 1ª fase, grupo I

10. O ponto A pertence ao semieixo positivo Ox por isso tem ordenada e cota nulas, substituindo na equação do plano α os valores da ordenada e cota podemos calcular o valor da abcissa do ponto A:

$$3x + 2y + 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow x + 0 + 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 12$$

   Logo o ponto A tem coordenadas $(2, 0, 0)$.

   O ponto B pertence ao semieixo positivo Oy por isso tem abcissa e cota nulas, substituindo na equação do plano α os valores da abcissa e cota podemos calcular o valor da ordenada do ponto B:

$$3x + 2y + 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow 0 + 2y + 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow y = 6$$

   Assim, o ponto B tem coordenadas $(0, 6, 0)$.

   Como o ponto P pertence ao eixo Oz então tem abcissa e ordenada nulas, assim as coordenadas do ponto P são:

$$\text{P}(0,0,z), \quad \text{onde } z \in R\backslash\{0\}$$

As coordenadas do vetor $\overrightarrow{PA}$ são:

$$\overrightarrow{PA} = A - P = (2,0,0) - (0,0,z) = (2,0,-z)$$

As coordenadas do vetor $\overrightarrow{PB}$ são:

$$\overrightarrow{PB} = B - P = (0,6,0) - (0,0,z) = (0,6,-z)$$

Calculando o produto escalar dos dois vetores vem que:

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = (2,0,-z).(0,6,-z) = 0 + 0 + (-z)^2 = z^2 > 0 \qquad , \forall z \in R\backslash\{0\}$$

Como o produto escalar dos vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ é positivo então o ângulo APB é agudo.

2016, 2ª fase, grupo II

11. De acordo com a figura 7 e sabendo que o ponto P tem cota igual a 1 e pertence à aresta [BG], as suas coordenadas são $(-2,2,1)$.

    Como R é o simétrico do ponto P relativamente à origem então tem coordenadas $(2,-2,-1)$.

    Sabendo que $\text{A}(0,2,0)$ e $\text{R}(2,-2,-1)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AR}$ e a sua norma:

    $$\overrightarrow{AR} = R - A = (2,-2,-1) - (0,2,0) = (2,-4,-1)$$

    $$||\overrightarrow{AR}|| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$$

    Com as coordenadas dos pontos A e P podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AP}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (-2,2,1) - (0,2,0) = (-2,0,1)$$

$$||\overrightarrow{AP}|| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{AR}\,\hat{}\,\overrightarrow{AP}) = \frac{\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AP}}{||\overrightarrow{AR}|| \times ||\overrightarrow{AP}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AR}\,\hat{}\,\overrightarrow{AP}) = \frac{(2,-4,-1).(-2,0,1)}{\sqrt{21} \times \sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AR}\,\hat{}\,\overrightarrow{AP}) = \frac{-4+0-1}{\sqrt{21 \times 5}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AR}\,\hat{}\,\overrightarrow{AP}) = -\frac{5}{\sqrt{105}} \Leftrightarrow R\hat{A}P = \cos^{-1}(-\frac{5}{\sqrt{105}}) \Leftrightarrow R\hat{A}P \approx 119^o$

2016, Época especial, grupo II

12. Com as coordenadas dos pontos A e B podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4,0,0) - (0,0,2) = (4,0,-2)$$

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

Sabendo que A$(0,0,2)$ e P$(4,y,0)$ com $y \in \mathbb{R}^+$, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AP}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (4,y,0) - (0,0,2) = (4,y,-2)$$

$$||\overrightarrow{AP}|| = \sqrt{4^2 + y^2 + (-2)^2} = \sqrt{20 + y^2}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AP}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}}{||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AP}||} \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{(4,0,-2).(4,y,-2)}{\sqrt{20} \times \sqrt{20+y^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{16+0+4}{\sqrt{20 \times (20+y^2)}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{20}{\sqrt{400+20y^2}} \Leftrightarrow \sqrt{400 + 20y^2} = 40 \Leftrightarrow (\sqrt{400 + 20y^2})^2 = (40)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 400 + 20y^2 = 1600 \Leftrightarrow y^2 = \frac{576-400}{20} \Leftrightarrow y^2 = \frac{1600-400}{20} \Leftrightarrow y^2 = 60 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{60} \Leftrightarrow y = \sqrt{60} \Leftrightarrow y = 2\sqrt{15}, \quad y \in \mathbb{R}^+$

2015, 1ª fase, grupo II

13. Cada lado de um hexágono regular de perímetro 12 é igual a $\frac{12}{nr\ de\ lados} = \frac{12}{6} = 2$.

Logo temos que $||\overrightarrow{BA}|| = ||\overrightarrow{BC}|| = 2$.

Podemos decompor um hexágono regular em seis triângulos equiláteros, sendo que o valor do ângulo interno de um hexágono regular é igual ao dobro da amplitude de um triângulo equilátero, logo temos que:

$$A\hat{B}C = 2 \times 60 = 120^o$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = cos(\overrightarrow{BA}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC}) \times ||\overrightarrow{BA}|| \times ||\overrightarrow{BC}|| = \cos(120) \times 2 \times 2 = -\frac{1}{2} \times 4 = -2$

Opção(B)

2015, Época especial, grupo I

14. O ponto B pertence ao eixo Ox logo tem ordenada e cota nula.

    Como o ponto B pertence ao plano β, substituindo na equação do plano β os valores da ordenada e cota podemos calcular o valor da abcissa do ponto B:

$$2x - y + z - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x - 0 + 0 - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2$$

    Logo o ponto B tem coordenadas $(2, 0, 0)$.

    O ponto C é simétrico do ponto B relativamente ao plano yOz, ou seja, as coordenadas do ponto C são $(-2, 0, 0)$.

    Com as coordenadas dos pontos A e B podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 0, 0) - (1, 2, 3) = (1, -2, -3)$$

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

    Sabendo que A$(1, 2, 3)$ e C$(-2, 0, 0)$, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2,0,0) - (1,2,3) = (-3,-2,-3)$$

$$||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}}{||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \frac{(1,-2,-3).(-3,-2,-3)}{\sqrt{14} \times \sqrt{22}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) =$
$= \frac{-3+4+9}{\sqrt{14 \times (22)}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \frac{10}{\sqrt{308}} \Leftrightarrow B\hat{A}C = \cos^{-1}(\frac{10}{\sqrt{308}}) \Leftrightarrow B\hat{A}C \approx 55^o$

2015, Época especial, grupo II