

**Resolução - Probabilidades**

1. Como  $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$

Recorrendo à fórmula da probabilidade total:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,6 = P(A) + 1 - 0,6 - 0 \Leftrightarrow P(A) = 0,2$$

Sabemos que  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \Leftrightarrow P(\bar{A}) = 0,8$

**Opção(D)**

2022, 1ª fase

2. Consideremos os acontecimentos:

S: Jogar Semáforo

R: Jogar Rastros

Como metade dos alunos jogou Semáforo vem que:

$$P(S) = \frac{1}{2}$$

Sabemos também que um quarto dos alunos não jogou Rastros:

$$P(\bar{R}) = \frac{1}{4}$$

Um quinto dos alunos que não jogaram Rastros jogou Semáforo o que equivale a:

$$P(S|\bar{R}) = \frac{1}{5}$$

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

	$S$	$\bar{S}$	
$R$	$P(R \cap S)$	$P(R \cap \bar{S})$	$P(R)$
$\bar{R}$	$P(\bar{R} \cap S)$	$P(\bar{R} \cap \bar{S})$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$P(S|\bar{R}) = \frac{P(\bar{R} \cap S)}{P(\bar{R})} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{P(\bar{R} \cap S)}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow P(\bar{R} \cap S) = \frac{1}{20}$$

De acordo com a tabela acima, temos que:

$$P(\bar{R} \cap \bar{S}) = P(\bar{R}) - P(\bar{R} \cap S) = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

A probabilidade de um aluno que participou no torneio, escolhido ao acaso, não ter jogado Semáforo e ter jogado Rastros é igual a:

$$P(R \cap \bar{S}) = P(\bar{S}) - P(\bar{R} \cap \bar{S}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

2022, 1ª fase

3. Consideremos os acontecimentos:

V: O passageiro já viajou de avião

F: O passageiro já esteve em Faro

Como 70% nunca tinham viajado de avião vem que:

$$P(\bar{V}) = \frac{1}{2}$$

Sabemos também que  $\frac{2}{5}$  dos passageiros já tinham estado em Faro:

$$P(F) = \frac{2}{5} = 0,4$$

Metade dos que já tinham estado em Faro já tinha viajado de avião o que equivale a:

$$P(V|F) = 0,5$$

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$$P(V|F) = \frac{P(V \cap F)}{P(F)} \Leftrightarrow 0,5 = \frac{P(V \cap F)}{0,4} \Leftrightarrow P(V \cap F) = 0,2$$

	V	$\bar{V}$	
F	0,2		0,4
$\bar{F}$		?	0,6
	0,3	0,7	1

$$P(F \cap \bar{V}) = 0,4 - 0,2 = 0,2$$

$$P(\bar{V} \cap \bar{F}) = 0,7 - 0,2 = 0,5$$

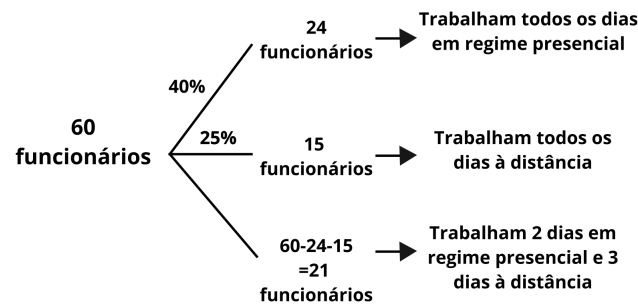
Sabendo que o primeiro passageiro a sair do avião nunca tinha estado em Faro, a

probabilidade de esta ter sido a primeira viagem de avião deste passageiro é igual a:

$$P(\bar{V}|\bar{F}) = \frac{P(\bar{V} \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{0,5}{0,6} = \frac{5}{6}$$

2022, 2ª fase

4. A situação descrita no enunciado pode ser representada através do seguinte esquema:



A probabilidade de serem selecionados, no máximo, três funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana é igual ao contrário da probabilidade de selecionar quatro funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana.

Assim sendo o número de casos favoráveis é igual ao contrário de selecionar quatro funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana. Temos ao todo  $24+21=45$  funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana, assim o número de casos favoráveis é igual a  ${}^{60}C_4 - {}^{45}C_4$ .

O número de casos possíveis é igual ao número de grupos que é possível formar ao selecionar quatro funcionários, ao acaso, dos sessenta funcionários, isto é,  ${}^{60}C_4$ .

Usando a Regra de Laplace que dita que a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de

casos possíveis, a probabilidade de serem selecionados, no máximo, três funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana é:

$$\frac{\text{nr de casos favoráveis}}{\text{nr de casos possíveis}} = \frac{{}^{60}C_4 - {}^{45}C_4}{{}^{60}C_4}$$

2022, Época especial

$$\begin{aligned} 5. P(B) + P(A) \times (1 - P(B|A)) &= P(B) + P(A) \times \left(1 - \frac{P(B \cap A)}{P(A)}\right)_{(*_1)} = \\ &= P(B) + P(A) \times \left(1 - \frac{P(B) \times P(A)}{P(A)}\right)_{(*_2)} = P(B) + P(A) \times (1 - P(B)) = \\ &= P(B) + P(A) - P(A) \times P(B) = P(B)(1 - P(A)) + P(A) = P(B) \times P(\bar{A})_{(*_3)} + P(A) = \\ &= P(A) + P(B) \times P(\bar{A}) \end{aligned}$$

$$(*_1) P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \text{ Definição de probabilidade condicionada}$$

$$(*_2) P(B \cap A) = P(B) \times P(A) \text{ porque } A \text{ e } B \text{ são acontecimentos independentes}$$

$$(*_3) 1 - P(A) = P(\bar{A}) \text{ porque } A \text{ e } \bar{A} \text{ são acontecimentos contrários}$$

2022, Época especial

6. Consideremos os acontecimentos:

R: Ser rapariga

E: Ser estrangeiro

Como 60% dos alunos são raparigas vem que:

$$P(R) = 0,6$$

$$P(\bar{R}) = 0,4$$

Sabemos também que 15% dos alunos são rapazes estrangeiros:

$$P(\bar{R} \cap E) = 0,15$$

De acordo com a tabela acima, temos que:

	$\bar{R}$	$R$	
$\bar{E}$			
$E$	0,15		
	0,4	0,6	

$$P(\bar{E} \cap \bar{R}) = 0,4 - 0,15 = 0,25$$

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$$P(\bar{E}|\bar{R}) = \frac{P(\bar{E} \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{0,25}{0,4} = 0,625 = 62,5\%$$

**Opção(D)**

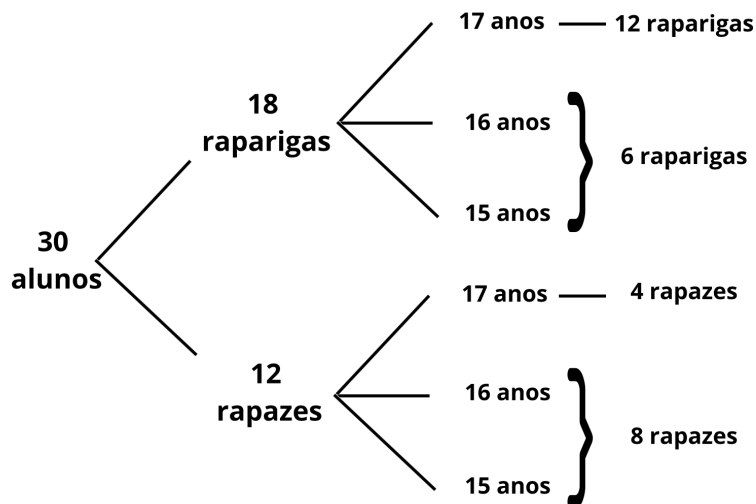
2021, 1ª fase

7. Como 60% dos 30 alunos são raparigas, então existem na turma  $0,6 \times 30 = 18$  raparigas e  $30 - 18 = 12$  rapazes.

Dos 12 rapazes, um terço tem 17 anos, o que corresponde a  $\frac{1}{3} \times 12 = 4$  rapazes. Assim temos  $12 - 4 = 8$  rapazes com 16 ou 15 anos.

Um terço das raparigas tem 15 ou 16 anos, ou seja,  $\frac{1}{3} \times 18 = 6$  raparigas. O que significa que temos  $18 - 6 = 12$  raparigas com 17 anos.

O esquema em árvore ajuda a compreender:



O número de casos possíveis é igual ao número total de maneiras de escolher cinco alunos da turma composta por 30 alunos:  ${}^{30}C_5 = 142506$ .

Considerando que o André e a Beatriz já foram escolhidos e que ambos têm 16 anos, então ficamos com 7 rapazes com 16 ou 15 anos e 5 raparigas com 16 ou 15 anos.

Dos 16 alunos com 17 anos vamos escolher dois e dos 12 alunos com 16 ou 15 anos vamos escolher um, ou seja, o número de casos favoráveis é igual a  ${}^{16}C_2 \times {}^{12}C_1 = 1440$ .

A probabilidade de o grupo constituído por cinco alunos ser formado pelo André, pela Beatriz, por dois jovens com 17 anos e por outro com 15 ou 16 anos, arredondado às centésimas, é igual a:

$$\frac{1440}{142506} \approx 0,01$$

2021, 1ª fase

8. Consideremos os acontecimentos:

M: O sócio é mulher

B: O sócio pratica badminton

$P(M)$  é a probabilidade do sócio, selecionado ao acaso, ser mulher que é igual a 0,65.

$P(B|\overline{M})$  é a probabilidade do sócio praticar badminton sabendo que é homem que é igual a  $\frac{1}{7}$ .

$P(M|B)$  é a probabilidade do sócio ser mulher sabendo que pratica badminton que é igual a  $\frac{5}{6}$ .

Queremos determinar  $P(M \cap \overline{B})$  que é probabilidade de o sócio escolhido ser uma mulher que pratica ténis.

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:



$$P(B|\overline{M}) = \frac{P(B \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} \Leftrightarrow \frac{1}{7} = \frac{P(B \cap \overline{M})}{0,35} \Leftrightarrow P(B \cap \overline{M}) = 0,05$$

	$B$	$\overline{B}$	
$M$			0,65
$\overline{M}$	0,05	0,3	0,35
			1

De acordo com a tabela acima, temos que:

$$P(B) = P(M \cap B) + P(\overline{M} \cap B)$$

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$$P(M|B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \frac{P(M \cap B)}{P(M \cap B) + P(\overline{M} \cap B)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6P(M \cap B) = 5P(M \cap B) + 5P(\overline{M} \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(M \cap B) = 5P(\overline{M} \cap B) \Leftrightarrow P(M \cap B) = 5 \times 0,05 \Leftrightarrow P(M \cap B) = 0,25$$

A probabilidade de o sócio escolhido ser uma mulher que pratica ténis é igual a:

$$P(M \cap \overline{B}) = 0,65 - 0,25 = 0,40 = 40\%$$

9. Existem ao todo  $11 \times 11 = 121$  pontos que pertencem a esta região e cujas coordenadas são números inteiros.

Substituindo, na equação da reta, o  $x$  (abscissa) por  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  podemos determinar quais deste 121 pontos pertencem à reta  $y = x + 7$ :

Se  $x = 0, y = 7$

O ponto  $(0, 7)$  pertence à reta

Se  $x = 1, y = 8$

O ponto  $(1, 8)$  pertence à reta

Se  $x = 2, y = 9$

O ponto  $(2, 9)$  pertence à reta

Se  $x = 3, y = 10$

O ponto  $(3, 10)$  pertence à reta

Se  $x = 4, y = 11$

O ponto  $(4, 11)$  não pertence à reta

Concluimos que nesta região só existem 4 pontos pertencentes à reta de equação  $y = x + 7$ .

A probabilidade do ponto pertencer à reta de equação  $y = x + 7$  é igual a:

$$\frac{4}{121} \approx 0,033$$

**Opção(B)**

2021, Época especial

10. Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{P(A)}{2}$$

Aplicando as leis de morgan e sabendo que  $P(B) = \frac{3P(A)}{2}$ :

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = \\ &= 1 - \left[ P(A) + \frac{3P(A)}{2} - \frac{P(A)}{2} \right] = 1 - [P(A) + P(A)] = 1 - 2P(A) \end{aligned}$$

Assim vem que:

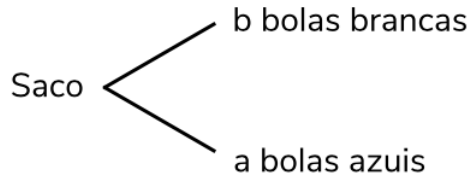
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) + 2P(A) = 1 - 2P(A) + 2P(A) = 1$$

2021, Época especial

11.

11.1. Inicialmente existiam  $a$  bolas azuis e  $b$  bolas brancas no saco, ou seja, no total haviam  $a + b$  bolas no saco.

Consideremos os acontecimentos:



$A$ : A primeira bola retirada é azul

$B$ : A segunda bola retirada é branca

$P(B|A)$  é a probabilidade da segunda bola retirada do saco ser branca sabendo que a primeira bola retirada é azul.

O número de casos possíveis é igual ao número de bolas que ficaram no saco após o acontecimento  $A$ . Como foi retirada uma bola azul sem reposição ficamos com  $a - 1 + b$  bolas no saco.

O número de casos favoráveis é igual ao número de bolas brancas que estão no saco sabendo que a primeira bola retirada é azul, ou seja, é igual a  $b$ .

Assim temos que:

$$P(B|A) = \frac{b}{a-1+b}$$

Por outro lado, também conseguimos determinar  $P(B|A)$  usando a fórmula da probabilidade condicionada:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}P(A)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

Ficamos com a igualdade:

$$\frac{b}{a-1+b} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3b = a - 1 + b \Leftrightarrow 2b = a - 1 \Leftrightarrow a = 2b + 1$$

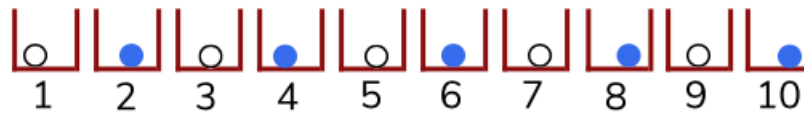
$\forall b \in \mathbb{N}$ ,  $2b$  é um número par.

$\forall b \in \mathbb{N}$ ,  $2b + 1$  é um número ímpar.

Logo inicialmente existia um número ímpar de bolas azuis no saco.

11.2. O saco agora tem 8 bolas azuis e sete bolas brancas.

Começamos por colocar uma bola branca em cada caixa com o número ímpar e uma bola azul em cada caixa com número par.



O saco fica com três bolas azuis e duas bolas brancas.

Como cada caixa só pode ter, no máximo, duas bolas vamos distribuir as três bolas azuis pelas dez caixas disponíveis e depois as duas bolas brancas pelas restantes sete caixas :

$${}^{10}C_3 \times {}^7C_2 = 120 \times 21 = 2520$$

**Opção(B)**

2020, 1ª fase

12. Para que o plano definido pelos três vértices escolhidos contenha uma das faces do cubo, esses três vértices têm de pertencer à mesma face.

O cubo tem seis faces com quatro vértices cada uma, sendo que o número de conjuntos de três vértices que podem ser escolhidos em cada face corresponde a  $6 \times {}^4C_3$  (número de casos favoráveis).

O número de hipóteses possíveis na escolha de três dos oito vértices do cubo é igual a  ${}^8C_3$ .

A probabilidade de os três vértices escolhidos definir um plano que contem uma das faces do cubo é igual a:

$$\frac{6 \times {}^4C_3}{{}^8C_3} = \frac{6 \times 4}{56} = \frac{3}{7}$$

### Opção(B)

2020, 2ª fase

13. Vamos começar por aplicar as leis de Morgan:

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$

Assim temos que:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,9 = 1 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,1$$

Logo vem que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,4 - 0,1 = 0,6$$

Usando a fórmula da probabilidade condicionada temos:

$$P(A|(A \cup B)) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0,3}{0,6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2020, 2ª fase

14.

14.1. Consideremos os acontecimentos:

E: O hóspede participa na caminhada na serra da Estrela

Z: O hóspede participa na descida do rio Zêzere

$P(E)$  é a probabilidade do hóspede, selecionado ao acaso, participar na caminhada na serra da Estrela que é igual a 0,8.

$P(Z)$  é a probabilidade do hóspede, selecionado ao acaso, participar na descida do rio Zêzere que é igual a 0,5.

$P(\bar{E}|Z)$  é a probabilidade do hóspede, selecionado ao acaso, não ter participado na caminhada na serra da Estrela sabendo que participou na descida do rio Zêzere que é igual a 0,3.

Queremos determinar  $P(E \cap \bar{Z})$  que é probabilidade de esse hóspede ter participado na caminhada na serra da Estrela e não ter participado na descida do rio Zêzere.

	$Z$	$\bar{Z}$	
$E$	$P(E \cap Z)$	?	0,8
$\bar{E}$	$P(\bar{E} \cap Z)$		
	0,5		

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$$P(\bar{E}|Z) = \frac{P(\bar{E} \cap Z)}{P(Z)} \Leftrightarrow 0,3 = \frac{P(\bar{E} \cap Z)}{0,5} \Leftrightarrow P(\bar{E} \cap Z) = 0,3 \times 0,5 \Leftrightarrow P(\bar{E} \cap Z) = 0,15$$

De acordo com a tabela acima, temos que:

$$P(E \cap Z) = 0,5 - 0,15 = 0,35$$

Logo vem que:

$$P(E \cap \bar{Z}) = 0,8 - 0,35 = 0,45$$

A probabilidade do hóspede, selecionado ao acaso, ter participado na caminhada na serra da Estrela e não ter participado na descida do rio Zêzere é igual a 45%.

- 14.2. Considerando que apenas os hóspedes dinamarqueses podem conduzir as 4 motos, o número de possibilidades de os distribuir pelas quatro motos (a ordem interessa porque as motos têm diferentes cores) é igual a  $4! = 24$



Agora falta distribuir os restantes 3 hóspedes suecos pelos lugares que sobram, ou seja, 1 lugar em cada mota. Por isso, o número de possibilidades de distribuir os 3 hóspedes suecos pelos quatro lugares que sobram (a ordem interessa porque as motas têm diferentes cores) é igual a  ${}^4A_3 = 24$ .

O número total de maneiras distintas de distribuir os sete hóspedes pelas quatro motos sabendo que apenas os hóspedes dinamarqueses podem conduzir é igual a  $24 \times 24 = 576$ .

### Opção(D)

2020, Época especial

15.

15.1. Consideremos os acontecimentos:

A: "A bola retirada não é amarela"

B: "A bola retirada não tem logotipo desenhado"

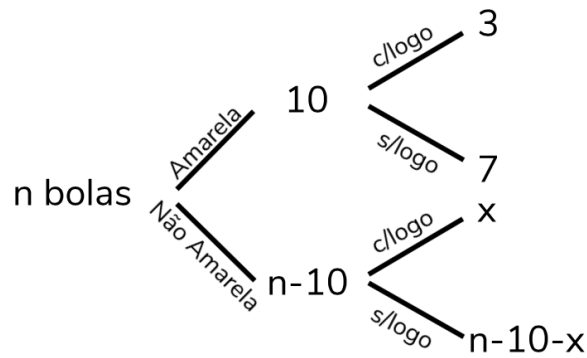
Sabendo que a probabilidade de a bola retirada não ser amarela ou de não ter um logotipo desenhado é igual a  $\frac{15}{16}$ , vem que:

$$P(A \cup B) = \frac{15}{16}$$

Pela observação da árvore acima temos que:

$$P(A) = \frac{n-10}{n}$$

$$P(B) = \frac{7+n-10-x}{n}$$



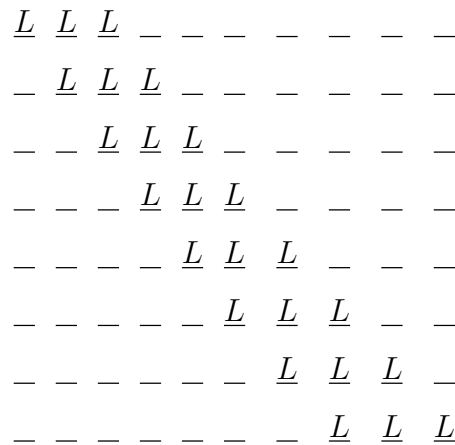
$$P(A \cap B) = \frac{n-10-x}{n}$$

Logo, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{15}{16} = \frac{n-10}{n} + \frac{7+n-10-x}{n} - \frac{n-10-x}{n} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{15}{16} = \frac{n-10+7+n-10-x-n+10+x}{n} \Leftrightarrow \frac{15}{16} = \frac{n-3}{n} \Leftrightarrow 15n = 16n - 48 \Leftrightarrow n = 48$$

A caixa contém 48 bolas.

15.2. Existem 8 possibilidades para dispor as 10 bolas amarelas, de modo que as bolas com o logotipo desenhado fiquem juntas:



Tendo em conta que as bolas amarelas com o logotipo desenhado são iguais entre

si e que , da mesma forma, as bolas amarelas sem o logotipo desenhado são iguais entre si então sabemos que, ao dispor as 10 bolas amarelas numa linha reta, a ordem pela qual vamos dispor as bolas com logotipo bem como a ordem pela qual vamos dispor as bolas sem logotipo não interessa.

Por isso, o número de hipóteses possíveis para dispor as 10 bolas amarelas é igual a  ${}^{10}C_3 \times {}^7C_7 = {}^{10}C_3$ .

Assim, a probabilidade de as três bolas com o logotipo desenhado ficarem juntas é igual a  $\frac{8}{{}^{10}C_3} = \frac{1}{15}$ .

### Opção(B)

2019, 1ª fase, caderno 1

16. Consideremos os acontecimentos:

R: O aluno é rapaz

B: O aluno frequenta o 10º ano

Sabe-se que:

$\frac{3}{5}$  dos alunos que frequentam o 10º ano são rapazes, logo vem que:

$$P(R|B) = \frac{3}{5}$$

$\frac{11}{21}$  dos alunos da escola são rapazes, o que corresponde à equação:

$$P(R) = \frac{11}{21}$$

$\frac{1}{7}$  dos alunos da escola são rapazes e frequentam o 10º ano, por isso temos que:

$$P(R \cap B) = \frac{1}{7}$$

Usando a fórmula da probabilidade condicionada temos:

$$P(R|B) = \frac{P(R \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(B) = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{21}$$

Logo, temos que:

$$P(R \cup B) = P(R) + P(B) - P(R \cap B) = \frac{11}{21} + \frac{5}{21} - \frac{1}{7} = \frac{16}{21} - \frac{3}{21} = \frac{13}{21}$$

Aplicando as leis de morgan:

$$P(\overline{R} \cap \overline{B}) = P(\overline{R \cup B}) = 1 - P(R \cup B) = 1 - \frac{13}{21} = \frac{8}{21} \approx 0,38$$

2019, 2ª fase, caderno 1

17. O número de casos possíveis é igual ao número de combinações da seleção de 4 dos 9 cartões do saco, ou seja,  ${}^9C_4 = 126$ .

Vamos considerar que as cartas com os números 3 e 8 já estão escolhidas, ou seja, só nos falta selecionar mais duas cartas do saco. Para o menor dos números saídos ser 3 e o maior ser 8, então quer dizer que já só podemos escolher as duas cartas que nos faltam das cartas com os números 4 a 7 (4 cartas). Portanto o número de casos favoráveis é igual a  ${}^4C_2 = 6$ .

Usando a regra de Laplace:

$$P(\text{"Menor dos números saídos ser 3 e o maior ser 8"}) = \frac{6}{126} = \frac{1}{21}$$

**Opção(B)**

2019, Época especial, caderno 1

18. Consideremos os acontecimentos:

R: O aluno é rapariga

Q: O aluno está matriculado na disciplina de Química

Como o número de raparigas é o dobro do número de alunos matriculados na disciplina de Química, vem que:

$$P(R) = 2P(Q)$$

Um terço dos alunos matriculados na disciplina de Química são raparigas, corresponde à equação:

$$P(R|Q) = \frac{1}{3}$$

Metade dos rapazes não estão matriculados na disciplina de Química, equivale à equação:

$$P(\bar{Q}|\bar{R}) = \frac{1}{2}$$

Sabemos que,  $P(Q) = P(R \cap Q) + P(\bar{R} \cap Q)$

Usando a fórmula da probabilidade condicionada temos:

$$P(R|Q) = \frac{P(R \cap Q)}{P(Q)} \Leftrightarrow \frac{P(R \cap Q)}{P(Q)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(R \cap Q) = \frac{P(Q)}{3}$$

Da mesma forma temos:

$$P(\bar{R}|Q) = \frac{P(\bar{R} \cap Q)}{P(Q)}$$

Agora temos de relacionar  $P(\bar{R} \cap Q)$  com a  $P(\bar{R} \cap \bar{Q})$  de forma a conseguirmos usar a equação  $P(\bar{Q}|\bar{R}) = \frac{1}{2}$ :

$$P(\bar{Q}|\bar{R}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{Q} \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(\bar{Q} \cap \bar{R}) = \frac{P(\bar{R})}{2} \Leftrightarrow P(\bar{Q} \cap \bar{R}) = \frac{1-2P(Q)}{2}$$

Observando a tabela abaixo é mais fácil perceber:

	$R$	$\bar{R}$	
$Q$	$\frac{P(Q)}{3}$	$P(\bar{R} \cap Q)$	$P(Q)$
$\bar{Q}$		$\frac{1-2P(Q)}{2}$	$P(\bar{Q})$
	$P(R) = 2P(Q)$	$P(\bar{R}) = 1 - 2P(Q)$	1

$$P(\bar{R} \cap Q) = P(\bar{R}) - P(\bar{R} \cap \bar{Q}) = 1 - 2P(Q) - \left(\frac{1-2P(Q)}{2}\right) = \frac{1}{2} - P(Q)$$

Assim conseguimos determinar  $P(Q)$ :

$$\begin{aligned} P(Q) &= P(R \cap Q) + P(\bar{R} \cap Q) \Leftrightarrow P(Q) = \frac{P(Q)}{3} + \frac{1}{2} - P(Q) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6P(Q) = 2P(Q) + 3 - 6P(Q) \Leftrightarrow 10P(Q) = 3 \Leftrightarrow P(Q) = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

2019, Época especial, caderno 1

19. Recorrendo às Leis de Morgan temos que:

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A \cap B}) = \frac{8}{9}$$

Como  $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$ , então  $P(A \cap B) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

$A$  e  $B$  são acontecimentos equiprováveis e independentes logo temos que:

$$P(A) = P(B) \quad \text{e} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{9} = [P(A)]^2 \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3} \vee P(A) = -\frac{1}{3}$$

Como qualquer probabilidade está sempre entre 0 e 1,  $P(A) = \frac{1}{3}$ .

### Opção(C)

2019, Época especial, caderno 2

20. Consideremos os acontecimentos:

E: O aluno estuda espanhol

I: O aluno estuda inglês

Como o número de alunos que estudam Espanhol é igual ao número de alunos que estudam Inglês, vem que:

$$P(E) = P(I) = 0,5$$

O número de alunos que estudam, pelo menos, uma das duas línguas é o quádruplo do número de alunos que estudam as duas línguas corresponde à equação:

$$P(E \cup I) = 4 \times P(E \cap I) = 4P(E \cap I)$$

Logo, temos que:

$$\begin{aligned} P(E \cup I) &= P(E) + P(I) - P(E \cap I) \Leftrightarrow 4P(E \cap I) = 0,5 + 0,5 - P(E \cap I) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5P(E \cap I) = 1 \Leftrightarrow P(E \cap I) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(E \cap I) = 0,2 \end{aligned}$$

Usando a fórmula da probabilidade condicionada temos:

$$P(I|E) = \frac{P(I \cap E)}{P(E)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4 = 40\%$$

2018, 1ª fase, caderno 1

21. Seja  $X$  a variável aleatória «produto dos números saídos»

Construindo uma tabela de dupla entrada:

	0	1	2	3
0	-	0	0	0
1	-	-	2	3
2	-	-	-	6
3	-	-	-	-

Assim temos que:

$$P(X = 0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$$



**Opção(D)**

2018, 1ª fase, caderno 2

22. Consideremos os acontecimentos:

A: O atleta pratica basquetebol

B: O atleta pratica futebol

Sabemos que:

$$P(A) = \frac{1}{5} \quad P(B) = \frac{2}{5} \quad P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{3}{4}$$

Usando a fórmula da probabilidade condicionada vem que:

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{P(\overline{A}\overline{B})}{1 - \frac{2}{5}} \Leftrightarrow P(\overline{A}\overline{B}) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(\overline{A}\overline{B}) = \frac{9}{20}$$

Recorrendo às Leis de Morgan temos que:

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = \frac{9}{20}$$

Como  $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$ , então  $P(A \cup B) = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$

Calculando a probabilidade da interseção dos dois acontecimentos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{11}{20} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{5} - \frac{11}{20} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

Concluimos que  $P(A \cap B) > 0$  logo existe pelo menos um atleta do clube que pratica as duas modalidades desportivas.

2018, 2ª fase, caderno 1

23. A e B são acontecimentos equiprováveis e independentes logo temos que:

$$P(A) = P(B) \quad \text{e} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) &\Leftrightarrow 0,64 = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,64 = P(A) + P(A) - P(A) \times P(A) &\Leftrightarrow -[P(A)]^2 + 2P(A) - 0,64 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\text{usando a fórmula resolvente}) &\Leftrightarrow P(A) = 1,6 \vee P(A) = 0,4 \end{aligned}$$

Como qualquer probabilidade está sempre entre 0 e 1,  $P(A) = 0,4$ .

### Opção(B)

2018, Época especial, caderno 1

$$\begin{aligned} 24. P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) &\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,6 + 0,7 - P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A \cup B) = 1,3 - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Qualquer probabilidade está sempre entre 0 e 1 por isso temos que:

$$\begin{aligned} 0 \leq P(A \cup B) \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \leq 1,3 - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow -1,3 \leq -P(A \cap B) \leq -0,3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,3 \leq P(A \cap B) \leq 1,3 &\Leftrightarrow P(A \cap B) \geq 0,3 \end{aligned}$$

Pela definição de probabilidade condicionada temos que:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B|A) \geq \frac{0,3}{0,6} \Leftrightarrow P(B|A) \geq 0,5 \Leftrightarrow P(B|A) \geq \frac{1}{2}$$

2018, Época especial, caderno 1

25. Consideremos os acontecimentos:

A: O aluno escolhido é um rapaz

B: O aluno escolhido tem olhos verdes

Usando a fórmula da probabilidade condicionadas temos:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{10}}{P(A)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{4}{10} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{5}$$

Usando a regra de Laplace:

$$P(A) = \frac{nr \text{ de rapazes}}{nr \text{ total de alunos}} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{nr \text{ de rapazes}}{20} \Leftrightarrow nr \text{ de rapazes} = \frac{20 \times 2}{5} \Leftrightarrow nr \text{ de rapazes} = 8$$

**Opção(B)**

2017, 1ª fase, grupo I

26. No contexto da situação descrita,  $P(\overline{A} \cup B)$  é a probabilidade de retirar ao acaso uma bola do saco com número par ou superior a seis.

O número de casos possíveis é igual ao número de bolas que estão no saco, ou seja,  $n$ .

O número de casos favoráveis é igual ao número de bolas que estão no saco com um número superior a 6  $n - 6$ , mais o número de bolas com número par e inferior ou igual a seis, isto é, 3 bolas (bolas com os números: 2,4,6). Portanto o número de casos favoráveis é igual a  $n - 6 + 3 = n - 3$ .

Usando a Regra de LaPlace vem que:

$$P(\bar{A} \cup B) = \frac{n^{\circ} \text{ de casos favoráveis}}{n^{\circ} \text{ de casos possíveis}} = \frac{n-3}{n}$$

2017, 1ª fase, grupo II

27. Consideremos os acontecimentos:

A: O aluno escolhido é rapariga

B: O aluno escolhido frequenta o 10º ano

$P(\bar{A} \cup \bar{B})$  é a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz ou não frequentar o 10º ano que é igual a 0,82.

$P(B|A)$  é a probabilidade de o aluno escolhido frequentar o 10º ano, sabendo que é rapariga que é igual a  $\frac{1}{3}$ .

Usando as Leis de Morgan temos que:

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B).$$

Assim vem que:

$$1 - P(A \cap B) = 0,82 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,18$$

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{0,18}{P(A)} \Leftrightarrow P(A) = 0,18 \times 3 \Leftrightarrow P(A) = 0,54$$

2017, 2ª fase, grupo II

28. Consideremos os acontecimentos:

A: As bolas retiradas da caixa  $C_1$  têm a mesma cor

B: A bola retirada da caixa  $C_2$  é branca

No contexto da situação descrita,  $P(B|\bar{A})$  é a probabilidade da bola retirada da caixa  $C_2$  ser branca sabendo que as bolas retiradas da caixa  $C_1$  não têm a mesma cor.

O número de casos possíveis é igual ao número de bolas que estão na caixa  $C_2$  sabendo que foram lá postas mais 2 bolas da caixa  $C_1$ , ou seja, na caixa  $C_2$  temos  $7 + 2 = 9$  bolas no total.

O número de casos favoráveis é igual ao número de bolas brancas que estão na caixa  $C_2$  sabendo que foram lá postas mais 2 bolas da caixa  $C_1$  de cores diferentes, ou seja, uma branca e outra preta.

Sendo  $n$  o número de bolas brancas existentes na caixa  $C_2$  inicialmente, então o número de casos favoráveis é igual ao número total de bolas brancas existentes na caixa

$C_2$  contanto com a bola branca lá posta da caixa  $C_1$ , isto é,  $n + 1$ .

Assim vem que:

$$P(B|\bar{A}) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{n+1}{9} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow n + 1 = \frac{9 \times 2}{3} \Leftrightarrow n + 1 = 6 \Leftrightarrow n = 5$$

Logo temos que inicialmente na caixa  $C_2$  existiam 5 bolas brancas e 2 bolas pretas.

2017, Época especial, grupo II

29. Através da fórmula da probabilidade condicionada temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{60} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

Assim temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20} = \frac{8}{20} + \frac{6}{20} - \frac{1}{20} = \frac{13}{20}$$

**Opção(C)**

2016, 1ª fase, grupo I

30. Sabendo que  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6$  conseguimos calcular  $P(A \cup B)$ :

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0,6 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0,6 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,4$$

Calculando  $P(A \cap B)$ :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2 + 0,3 - 0,4 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,1$$

Usando a fórmula da probabilidade condicionada:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

### Opção(A)

2016, 2ª fase, grupo I

31. Consideremos os acontecimentos:

A: A soma dos números das fichas retiradas é igual a 10

B: O produto dos números das fichas retiradas é ímpar

No contexto da situação descrita,  $P(B|A)$  é a probabilidade do produto dos números das fichas retiradas ser ímpar sabendo que a soma dos números das fichas retiradas é igual a 10.

O número de casos possíveis é igual ao número de pares de fichas em que a soma dos números das fichas retiradas é igual a 10, ou seja, são 4 pares: (1,9);(2,8);(3,7) e (4,6).

O número de casos favoráveis é igual ao número de pares de fichas dos casos possíveis em que o produto dos números das fichas retiradas é ímpar: (1,9) e (3,7).

Assim usando a Regra de LaPlace:

$$P(B|A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2016, 2ª fase, grupo II



32. Vamos construir uma tabela de dupla entrada:

		Dado Cúbico					
		1	2	3	4	5	6
Dado Tetraédrico	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)

Deste modo conseguimos perceber todas as hipóteses possíveis para os lançamentos das duas pessoas.

nº de casos favoráveis = nº de entradas da tabela com pelo menos um nr 4 = 9

nº de casos possíveis = nº de entradas da tabela = 24

$$P(\text{"Pelo menos uma dessas pessoas registar o número 4"}) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

**Opção(A)**

2016, Época especial, grupo I

33.

33.1. O número de casos possíveis é igual ao o número de conjuntos diferentes de 3 bolas que podemos obter sabendo que estão n bolas no saco, ou seja,  ${}^n C_3$

No saco existem  $n$  bolas sendo  $n$  um número par maior do que 3, logo existem  $\frac{n}{2}$  bolas com números ímpares e  $\frac{n}{2}$  bolas com números pares.

Assim o número de casos favoráveis é igual a  ${}^{\frac{n}{2}}C_2 \times {}^{\frac{n}{2}}C_1 = {}^{\frac{n}{2}}C_2 \times \frac{n}{2}$ .

Usando a Regra de LaPlace:

$$P(\text{Duas das 3 bolas terem número par e uma ter número ímpar}) = \frac{{}^{\frac{n}{2}}C_2 \times \frac{n}{2}}{{}^nC_3}$$

33.2. Consideremos os acontecimentos:

A: A primeira bola extraída tem número par

B: A segunda bola extraída tem número par

No contexto da situação descrita,  $P(A \cap B)$  é a probabilidade de as duas bolas extraídas terem número par.

Calculando a probabilidade da primeira bola extraída ter número par, vem que:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

No caso de a extração ser feita com reposição, vamos calcular a probabilidade da segunda bola extraída ter número par sabendo que a primeira tem número par::

$$P(B|A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Logo,  $a = P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ .

No caso de a extração ser feita sem reposição, vamos calcular a probabilidade da segunda bola extraída ter número par sabendo que a primeira tem número par:

$$P(B|A) = \frac{3}{7}$$

$$\text{Logo, } b = P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}.$$

2016, Época especial, grupo II

34. Vamos começar por calcular  $P(B)$ :

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,7 = 0,3$$

Sabendo que  $P(A \cup B) = 0,5$ , vem que:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,5 = 0,4 + 0,3 - P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2 \end{aligned}$$

Segundo as leis de De Morgan:

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8$$

**Opção(C)**

2015, 1ª fase, grupo I

35.

35.1. Consideremos os acontecimentos:

C: O funcionário reside em Coimbra

M: O funcionário é mulher

Vamos contruir uma tabela de dupla entrada de modo a organizar os dados:

	$C$	$\bar{C}$	
$M$	$0,4 - 0,35 = 0,05$	$0,6 - 0,15 = 0,45$	0,5
$\bar{M}$	$0,5 - 0,15 = 0,35$	$0,3 \times 0,5 = 0,15$	0,5
	0,4	0,6	1

Queremos determinar a probabilidade de o funcionário escolhido ser mulher, sabendo que reside em Coimbra, usando a fórmula da probabilidade condicionada vem que:

$$P(M|C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0,05}{0,4} = \frac{1}{8}$$

35.2. A Regra de LaPlace diz que a probabilidade de um certo acontecimento é igual ao quociente do número de casos favoráveis a esse acontecimento pelo número de casos possíveis do mesmo acontecimento.

Neste caso, o número de casos possíveis é o número de grupos que podemos formar na escolha de 3 dos 80 funcionários da empresa sendo que a ordem de escolha não interessa, ou seja,  ${}^{80}C_3$ .

Considerando que a empresa tem 80 funcionários e sabendo que 40% deles residem em Coimbra, então 32 dos 80 funcionários residem em Coimbra.

Haver no máximo dois funcionários a residir em Coimbra é igual à diferença entre o número total de grupos de 3 funcionários que é  ${}^{80}C_3$  com o número de grupos formados por 3 funcionários que residem em Coimbra ou seja,  ${}^{32}C_3$ .

Assim, usando a Regra de Laplace, a probabilidade de haver no máximo dois funcionários a residir em Coimbra é igual a:

$$\frac{{}^{80}C_3 - {}^{32}C_3}{{}^{80}C_3}$$

2015, 1ª fase, grupo II

36. Considerando que a bola retirada do saco tem um número par então sabemos que a bola retirada só pode ser uma das bolas com os números: 2,4,6 ou 8. Destas bolas apenas 2 têm cor preta.

Usando a Regra de Laplace, a probabilidade de que, retirando ao acaso uma bola do saco, ela seja preta sabendo que tem um número par é igual a:

$$P(A|B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

### Opção(B)

2015, 2ª fase, grupo I

37. Vamos começar por calcular  $P(A)$ :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,7 = P(A) + 0,4 - 0,2 \Leftrightarrow P(A) = 0,5$$

Usando a fórmula da probabilidade condicionada, vem que:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$$

### Opção(D)

2015, Época especial, grupo I

38. O número de casos possíveis é igual ao número de arranjos completos da extração de 3 das 9 bolas do saco visto que as bolas são retiradas uma a uma e com reposição, ou seja,  ${}^9A'_3 = 729$ .

Para que produto dos números das três bolas retiradas ser igual a 2 tem de ser extraída 1 única bola com o número 2 e as restantes duas extrações da bola com o número 1. Como a ordem interessa temos de ver quantas hipóteses temos na extração destas 3 bolas:

1 2 1  
2 1 1  
1 1 2

Portanto temos 3 casos favoráveis.

Usando a regra de Laplace:

$$P(\text{Produto dos números das três bolas retiradas ser igual a 2}) = \frac{3}{729} = \frac{1}{243}$$

2015, Época especial, grupo II