Resolução - Números complexos

1. O ponto W é o afixo de um número complexo w tal que $Im(w) = -Re(w)$ então w escrito na forma trigonométrica é da forma:

$$w = |w|e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

$w^2 = (|w|e^{i\frac{7\pi}{4}})^2 = |w|^2 e^{i\frac{7\pi}{4}\times 2} = |w|^2 e^{i\frac{7\pi}{2}}$

$-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Calculando $-iw^2$:

$$-iw^2 = e^{i\frac{3\pi}{2}} \times |w|^2 e^{i\frac{7\pi}{2}} = |w|^2 e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{7\pi}{2}\right)} = |w|^2 e^{i\frac{10\pi}{2}} = |w|^2 e^{i5\pi}$$

Opção(C)

2022, 1ªfase

2. Vamos começar por escrever os números complexos $-\sqrt{3}+i$ e $\sqrt{2}i$ na forma trigonométrica:

$\begin{cases} tg\ \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \theta \in 2\ ^{o}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = -\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \theta \in 2\ ^{o}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow\ \theta = \frac{5\pi}{6}$ e $|-\sqrt{3}+i| = \sqrt{4} = 2$

$-\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$\sqrt{2}i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

Calculando z^3 :

$z^3 = \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}i}\right)^6 = \left(\frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^6 = \left[\frac{2}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2})}\right]^6 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\frac{6\pi}{3}} = 8e^{i2\pi}$

As soluções da equação $z^3 = 8e^{i2\pi}$ são:

$$z = \sqrt[3]{8\,e^{i2\pi}} = 2\,e^{i\frac{2\pi+2k\pi}{3}},\ \ k \in \{0,1,2\}$$

Para $k = 0$, $z_0 = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}\ \notin$ 3ºquadrante

Para $k = 1$, $z_1 = 2\,e^{i\frac{4\pi}{3}}\ \in$ 3ºquadrante

O número complexo que é solução da equação e cujo afixo, no plano complexo, pertence ao terceiro quadrante é $z_1 = 2\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Escrevendo z_1 na forma algébrica:

$z_1 = 2\,e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = 2\big(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\big) = -1 - \sqrt{3}i$

2022, 1ªfase

3. Substituindo na condição $z = x + yi$:

$z \times \overline{z} = 4 \Leftrightarrow (x+yi)(x-yi) = 4 \Leftrightarrow x^2 - (yi)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$

Esta condição equivale a uma circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a 2.

Opção(A)

2022, 2ªfase

4. Vamos começar por determinar o número complexo z:

$z = \frac{4}{1-i} + 4i^{18} = \frac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)} + 4i^2 = \frac{4+4i}{2} - 4 = 2 + 2i - 4 = -2 + 2i$

Escrevendo z na forma trigonométrica:

$\begin{cases} tg\ \theta = \frac{2}{-2} \\ \theta \in 2\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = -1 \\ \theta \in 2\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$ e $|-2+2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Logo $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Como o número complexo z é uma das raízes cúbicas de um número complexo w, então existem outras duas raízes de w que têm o mesmo módulo de z e o seu argumento difere $\frac{2\pi}{3}$ do $arg(z)$.

As outras duas raízes cúbicas de w na forma trigonométrica são:

$$z_0 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{e} \quad z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

2022, 2ªfase

5. O número complexo z já está na forma trigonométrica logo sabemos o seu módulo e o ser argumento:

$$|z| = e \quad \wedge \quad arg(z) = e.$$

Como $e \approx 2,7$ e $\pi \approx 3,14$ então $\frac{\pi}{2} < arg(z) < \pi$

Opção(A)

2022, Época especial

6. Vamos escrever o número complexo z_1 na forma algébrica:

$$z_1 = (1+i)^2 \times (2+i) + i^7 = (1+2i+i^2) \times (2+i) + i^3 = 2i(2+i) - i = 4i + 2i^2 - i = -2+3i$$

Calculando z_2 na forma algébrica:

$$z_1 \times z_2 = 3+2i \Leftrightarrow (-2+3i) \times z_2 = 3+2i \Leftrightarrow z_2 = \frac{3+2i}{-2+3i} \Leftrightarrow z_2 = \frac{(3+2i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{-6-9i-4i-6i^2}{4+9} \Leftrightarrow z_2 = \frac{-13i}{13} \Leftrightarrow z_2 = -i$$

Logo vem que $\sin\theta + i\cos\theta = -i \ \wedge \ \theta \in [0, 2\pi[\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\theta = 0 \ \wedge \ \cos\theta = -1 \ \wedge \ \theta \in [0, 2\pi[\ \Leftrightarrow \theta = \pi$

2022, Época especial

7. w é um dos vértices de um polígono regular com centro na origem do referencial.

$$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{3\pi}{28}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{28}\right)} = e^{i\frac{4\pi}{28}} = e^{i\frac{2\pi}{14}} = e^{i\frac{\pi}{7}}$$

O mesmo polígono tem outro vértice sobre o semieixo real positivo que pode ser representado pelo número complexo $z = e^{i0}$

Se este polígono tiver 7 vértices então o ângulo entre dois vértices consecutivos é igual a $\frac{2\pi}{7}$, ou seja, se andarmos no sentido positivo do círculo trigonométrico o vértice consecutivo ao vértice representado por z é representado pelo número complexo $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ o que ultrapassa o vértice representado por w, por isso esta não é a opção correta pois o afixo de w não poderá ser nenhum dos vértices do polígono.

Se este polígono tiver 14 vértices então o ângulo entre dois vértices consecutivos é igual a $\frac{2\pi}{14} = \frac{\pi}{7}$, ou seja, se andarmos no sentido positivo do círculo trigonométrico o vértice consecutivo ao vértice representado por z é representado pelo número complexo $z_1 = e^{i\frac{\pi}{7}} = w$, esta é a opção correta.

Opção(B)

2021, 1ªfase

8. Vamos começar por determinar na forma algébrica o número complexo w:

$$w = \frac{z_1 \times z_2}{z_3} = \frac{(-3+2i)(1+2i)}{2-i} = \frac{-3-6i+2i-4}{2-i} = \frac{-7-4i}{2-i} = \frac{(-7-4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-14-7i-8i+4}{2^2+1^2} = \frac{-10-15i}{5} =$$

$$= -2-3i$$

Calculando o módulo de w: $|w| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ c.q.d.

O afixo do número complexo w pertence ao 3º quadrante e como $Re(w) > Im(w)$ então $\frac{5\pi}{4} < Arg(w) < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} < Arg(w) < -\frac{\pi}{2}$ c.q.d.

2021, 1ªfase

9. Vamos começar por escrever o número complexo i na forma trigonométrica:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Calculando o número complexo w na forma trigonométrica:

$z \times w = i \Leftrightarrow e^{i\frac{3\pi}{5}} \times w = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow w = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{3\pi}{5}}} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{5}\right)} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{10}}$

$arg(w) = -\frac{\pi}{10} \Leftrightarrow arg(w) = -\frac{\pi}{10} + 2\pi \Leftrightarrow arg(w) = \frac{19\pi}{10}$

Opção(A)

2021, 2ªfase

10. Considerando $z = x + yi$ vamos determinar a equação da reta:

$(1-2i)z + (1-2i)\overline{z} + 10 = 0 \Leftrightarrow (1-2i)(x+yi) + (1-2i)(x-yi) + 10 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + yi + 2xi - 2y + x - yi - 2xi - 2y + 10 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y + 10 = 0 \Leftrightarrow 4y = 2x + 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$

O número complexo cujos afixos pertencem a esta reta e que tem menor módulo é o número complexo mais proximo da origem do referencial, ou seja, é o ponto resultante da interseção da reta $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ com a reta perpendicular a esta e que passa na origem do referencial.

Vamos calcular o declive da reta perpendicular à reta $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ e que passa na origem do referencial:

$$m = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

Assim sabemos que a reta perpendicular à reta $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ e que passa na origem do referencial tem equação:

$$y = -2x$$

Através de um sistema conseguimos calcular as coordenadas do ponto resultante da interseção das duas retas:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \\ \rule{2cm}{0.4pt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x = x + 5 \\ \rule{2cm}{0.4pt} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

O número complexo cujos afixos pertencem à reta $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ e que tem menor módulo é $-1 + 2i$.

2021, 2ªfase

11. Vamos escrever os números complexos z_1 e z_2 na forma algébrica:

$z_1 = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$z_2 = 2e^{i(\theta+\pi)} = 2(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)) = 2(-\cos\theta - i\sin\theta) = -2\cos\theta - 2i\sin\theta$

$z_1 + z_2 = \cos\theta + i\sin\theta - 2\cos\theta - 2i\sin\theta = -\cos\theta - i\sin\theta$

Logo o afixo do número complexo $z_1 + z_2$ tem coordenadas $(-\cos\theta, -\sin\theta)$.

Como θ pertence ao primeiro quadrante então $\cos\theta > 0$ e $\sin\theta > 0$, ou seja, $-\cos\theta < 0$ e $-\sin\theta < 0$. Concluímos que o afixo do número complexo $z_1 + z_2$ pertence ao terceiro quadrante.

Opção(C)

2021, Época especial

12. $(z_1)^2 = (\frac{1}{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}})^2 = \frac{1}{4}\, e^{i\frac{\pi}{2}}$

$(\overline{z_2})^3 = (\overline{z_2})^2 \times \overline{z_2} = (-2i)^2 \times (-2i) = 4i^2 \times (-2i) = 8i = 8\, e^{i\frac{\pi}{2}}$

Resolvendo a equação:

$iz^2 + z_1^2 \times (\overline{z_2})^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow iz^2 + \frac{1}{4}\, e^{i\frac{\pi}{2}} \times 8\, e^{i\frac{\pi}{2}} - 2 = 0 \Leftrightarrow iz^2 + 2\, e^{i\pi} - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow iz^2 - 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow iz^2 = 4 \Leftrightarrow z^2 = \frac{4}{i} \Leftrightarrow z^2 = \frac{4}{i} \times \frac{i}{i} \Leftrightarrow z^2 = -4i \Leftrightarrow z^2 = 4\, e^{i\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{4}\, e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)}, \quad k \in \{0, 1\}$

Os números complexos z_0 e z_1 , escritos na forma trigonométrica, que são solução da equação:

Para $k = 0,$, $z_0 = 2 \quad e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Para $k = 1,$, $z_1 = 2 \quad e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2021, Época especial

13.

13.1. Vamos considerar o número complexo z na forma trigonométrica:

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Fazendo o conjugado do número complexo z:

$$\overline{z} = |z|e^{-i\theta}$$

Resolvendo a equação:

$z^2 = \overline{z} \Leftrightarrow (|z|e^{i\theta})^2 = |z|e^{-i\theta} \Leftrightarrow |z|^2 e^{i2\theta} = |z|e^{-i\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|^2 = |z| \;\wedge\; 2\theta = -\theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow |z|^2 - |z| = 0 \;\wedge\; 3\theta = 2k\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|(|z| - 1) = 0 \;\wedge\; \theta = \frac{2k\pi}{3} \Leftrightarrow (|z| = 0 \quad (*_1) \;\vee\; |z| - 1 = 0) \;\wedge\; \theta = \frac{2k\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z| = 1 \;\wedge\; \theta = \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$(*_1)$ z é um número complexo não nulo logo $|z| \neq 0$

Como as soluções desta equação são os vértices de um polígono regular (polígono com todos os lados iguais) então $\theta \in [0, 2\pi[$.

Para $k = 0$, $z_1 = e^{i0}$ $\;(0 \in [0, 2\pi[)$

Para $k = 1$, $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $\;\left(\frac{2\pi}{3} \in [0, 2\pi[\right)$

Para $k = 2$, $z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ $\;\left(\frac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi[\right)$

Para $k = 3$, $z_4 = e^{i\frac{6\pi}{3}} = e^{i2\pi}$ $\;\left(2\pi \notin [0, 2\pi[\right)$

Assim temos que os afixos dos números complexos z_1, z_2 e z_3 são os vértices de um triângulo equilátero.

Sejas A o afixo do número complexo z_1 que tem coordenadas $A(1,0)$

Escrevendo o número complexo z_2 na forma algébrica:

$$z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Seja B o afixo do número complexo z_2 que tem coordenadas $B\big(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\big)$

Calculando a distância entre os pontos A e B:

$$d(AB) = \sqrt{\Big[1 - \big(-\frac{1}{2}\big)\Big]^2 + \Big(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

O perímetro do triângulo equilátero é:

$P_{triângulo} = 3 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

13.2. Consideremos em $\mathbb{C}$ o número complexo $z = x + iy$.

$$Re(z) \times Im(z) = 1 \;\Leftrightarrow\; x \times y = 1 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{x}$$

Opção(D)

2020, 1ª fase

14.

14.1. Vamos considerar o número complexo z_2 na forma algébrica:

$$z_2 = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}^+$$

$|z_2| = \sqrt{5} \ \Leftrightarrow \ \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5} \ \Leftrightarrow \ a^2 + b^2 = 5 \ \ (3)$

Vamos simplificar e escrever o número complexo z_1 na forma algébrica:

$z_1 = \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^5} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{4}{i} = \frac{2+2i}{2} + \frac{4\times(-i)}{i\times(-i)} = 1 + i - 4i = 1 - 3i$

$z_1 \times z_2 = (1-3i)\times(a+bi) = a + bi - 3ai - 3bi^2 = a + 3b + (b-3a)i$

Sabendo que o afixo do numero complexo $z_1 \times z_2$ tem coordenadas iguais ficamos com a equação:

$$a + 3b = b - 3a \ \Leftrightarrow \ 4a = -2b \ \Leftrightarrow \ 2a = -b \ \Leftrightarrow \ b = -2a \ \ (4)$$

Resolvendo o sistema resultante das equações (3) e (4):

$\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ b=-2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+(2a)^2=5 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+4a^2=5 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2=5 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \vee a=-1 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$

Como o afixo do numero complexo $z_1 \times z_2$ tem coordenadas positivas então $a + 3b > 0 \wedge b - 3a > 0$, portanto $a = -1 \wedge b = 2$.

$z_2 = -1 + 2i$

14.2. Como $k+i$ é uma das raízes quadradas do número complexo $3-4i$, vem que:

$$k+i = \sqrt{3-4i} \;\Leftrightarrow\; (k+i)^2 = 3-4i \;\Leftrightarrow\; k^2+2ki+i^2 = 3-4i \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; k^2-1+2ki = 3-4i \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} k^2-1=3 \\ 2k=-4 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; k=-2$$

Opção(D)

2020, 2ª fase

15. Fazendo o conjugado de z temos: $\overline{z} = -1-2i$.

Ambas as partes real e imaginária de $\overline{z}$ são negativas logo o afixo de $\overline{z}$ pertence ao 3º quadrante. Como a parte real é maior que a parte imaginária então o arg(z) tem de ser maior que $\frac{5\pi}{4}$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).

Opção(D)

2019, 1ª fase, caderno 1

16. Vamos começar por simplificar e escrever o número complexo w na forma algébrica.

$$W = \frac{z_1+i^6+2\overline{z_1}}{z_1-z_2} = \frac{3+4i+i^2+2(3-4i)}{3+4i-(4+6i)} = \frac{3+4i-1+6-8i}{-1-2i} = \frac{8-4i}{-1-2i} = \frac{(8-4i)(-1+2i)}{(-1-2i)(-1+2i)} = \frac{-8+16i+4i-8i^2}{1+4} =$$

$= \frac{20i}{5} = 4i$

A condição $|z| = |w| \;\Leftrightarrow\; |z| = 4$ representa uma circunferência de centro na origem e raio 4.

A condição $Im(z) \geq 0$ representa o semiplano em que a parte imaginária é positiva ou igual a zero (1º e 2º quadrante) e a condição $Re(z) \geq 0$ representa o semiplano em que a parte real é positiva ou igual a zero (1º e 4º quadrante).

Assim, a interseção das três condições dá a linha da circunferência que está no 1º quadrante que é equivalente a $\frac{1}{4}$ do perímetro da circunferencia de raio 4.

Logo, $\frac{1}{4}P_{circunferência} = \frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{1}{4} \times 2\pi \times 4 = 2\pi$

2019, 1ª fase, caderno 2

17. Vamos considerar que A é o afixo do número complexo $z = r\,e^{i\theta}$.

Sabendo que r é a medida do lado do quadrado, conseguimos calcular $\overline{DB}$:

$$\overline{DB}^2 = r^2 + r^2 \;\Leftrightarrow\; \overline{DB} = \sqrt{2}r \quad (r > 0)$$

De acordo com a figura 1 o ângulo que o afixo de B faz com o eixo Ox é igual a $\theta + \frac{\pi}{4}$, portanto B é o afixo do número complexo $\sqrt{2}r\,e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$.

$\sqrt{2}r\,e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} = (r\,e^{i\theta})(\sqrt{2}e^{i\,\frac{\pi}{4}}) = z(1+i)$

Opção(A)

2019, 2ª fase, caderno 1

18. Vamos começar por simplificar e escrever o número complexo w na forma algébrica.

$$w = \frac{3(2-3i)-i(1+2i)}{1+i^7} = \frac{6-9i-i+2}{1+i^3} = \frac{8-10i}{1-i} = \frac{(8-10i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{8+8i-10i+10}{2} = \frac{18-2i}{2} = 9-i$$

Escrevendo a equação da circunferência de centro no afixo de z_1 e raio igual a $\sqrt{53}$:

$$|z-(2-3i)| = \sqrt{53} \;\Leftrightarrow\; |z-2+3i| = \sqrt{53}$$

Substituindo o número complexo w na equação da circunferência vem que:

$$|9-i-2+3i| = \sqrt{53} \;\Leftrightarrow\; |7+2i| = \sqrt{53} \Leftrightarrow \sqrt{7^2+2^2} = \sqrt{53} \Leftrightarrow \sqrt{53} = \sqrt{53}$$

O número complexo w verifica a equação da circunferência logo ele pertence à circunferência de centro no afixo de z_1 e raio igual a $\sqrt{53}$.

2019, 2ª fase, caderno 2

19. Como o centro do quadrado coincide com a origem do referencial, todos os pontos A, B, C e D são equidistantes da origem, o que quer dizer que os números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 têm a mesma norma.

Os números complexos z_1 e z_3 diferem entre si 180^o, logo são simétricos por isso temos que $z_1 = -z_2$.

Usando o raciocínio anterior também sabemos que $z_2 = -z_4$

$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$

Opção(A)

2019, Época especial, caderno 1

20. Vamos começar por simplificar e escrever o número complexo z na forma algébrica.

$$w=\frac{5+(1+i)^4}{2+2i^{15}}-\frac{1}{2}=\frac{5+(1+i)^2(1+i)^2}{2+2i^3}-\frac{i}{2}=\frac{5+(1+2i+i^2)(1+2i+i^2)}{2+2(-i)}-\frac{i}{2}=\frac{5+2i\times 2i}{2-2i}-\frac{i}{2}=\frac{5+4i^2}{2-2i}-\frac{i}{2}=$$
$$=\frac{1}{2-2i}-\frac{i}{2}=\frac{2+2i}{(2-2i)(2+2i)}-\frac{i}{2}=\frac{2+2i}{8}-\frac{i}{2}=\frac{2+2i-4i}{8}=\frac{2-2i}{8}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$$

Escrevendo o número complexo z na forma trignométrica:

$$\begin{cases} tg\ \theta=-\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \\ \theta\in 4^{\text{o}}Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta=-1 \\ \theta\in 4^{\text{o}}Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \theta=-\frac{\pi}{4} \text{ e } |z|=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Logo, $z=\frac{\sqrt{2}}{4}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Calculando z^n, vem que:

$$z^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}$$

Para que z^n seja um número real negativo temos que ter:

$$-\frac{n\pi}{4}=\pi+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow n=-4-8k,\ \ k\in\mathbb{Z}$$

Para $k=0,\ \ n=-4\notin\mathbb{N}$

Para $k=1,\ \ n=-12\notin\mathbb{N}$

Para $k=-1,\ \ n=4\in\mathbb{N}$

Assim temos que o menor número natural n para o qual z^n é um número real negativo é 4.

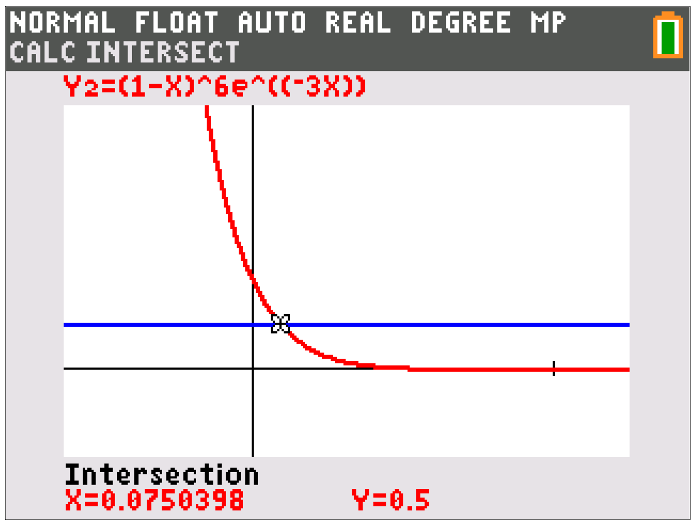
2019, Época especial, caderno 2

21. $z = (\cos x + i \sin x)^{10} = (e^{ix})^{10} = e^{ix \times 10} = e^{i10x} = \cos(10x) + i \sin(10x)$

Sabendo que o número complexo z verifica a condição $Im(z) = \frac{1}{3}Re(z)$, vem que:

$$Im(z) = \frac{1}{3}Re(z) \;\Leftrightarrow\; \sin(10x) = \frac{1}{3}\cos(10x)$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Tendo em conta que $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, temos que $x =\approx 0,03$.

Opção(B)

2018, 1ª fase, caderno 1

22. Vamos começar por simplificar e escrever o número complexo w na forma algébrica.

$w = 1+\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}i^5}{1+2i} = 1+\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}i}{1+2i} = 1+\frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{3}i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = 1+\frac{2\sqrt{3}-4\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i^2}{1^2+2^2} = 1-\frac{5\sqrt{3}i}{5} =$
$= 1-\sqrt{3}i$

Escrevendo o número complexo w na forma trignométrica:

$$\begin{cases} tg\ \theta = -\frac{\sqrt{3}}{1} \\ \theta \in 4^o Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = -\sqrt{3} \\ \theta \in 4^o Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} \text{ e } |w| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

Logo, $w = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Sabendo que w é uma raiz quarta de um certo complexo z, vem que:

$$z = w^4 = (2\,e^{-i\frac{\pi}{3}})^4 = 2^4\,e^{-i\frac{4\pi}{3}} = 16\,e^{-i\frac{4\pi}{3}}$$

As quatro raízes quartas de z são:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16\,e^{-i\frac{4\pi}{3}}} = \sqrt[4]{16}\,e^{i\frac{-\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}} = 2\,e^{i\frac{-4\pi+6k\pi}{12}} = 2\,e^{i\frac{-2\pi+3k\pi}{6}},\ \ k \in \{0,1,2,3\}$$

Para $k = 0$, $z_1 = 2e^{i(\frac{-2\pi}{6})} = 2e^{i(\frac{-\pi}{3})}$ $(-\frac{\pi}{3} \notin]0, \frac{\pi}{2}[)$

Para $k = 1$, , $z_2 = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ $(\frac{\pi}{6} \in]0, \frac{\pi}{2}[)$

Assim temos que a raiz quarta de z, cuja representção geométrica pertence ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$ é $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2018, 1ª fase, caderno 2

23. Consideremos z_2 o número complexo cujo afixo é o ponto C. De acordo com a figura 3, o ponto C pertence ao semieixo real negativo bem como à circunferência de raio igual a 1, logo $z_2 = -1$.

Como z e z_2 são ambos raízes de índice 5 do mesmo número complexo, vem que:

$$z^5 = z_1^5 = (-1)^5 = -1$$

Opção(A)

2018, 2ª fase, caderno 1

24. Vamos começar por simplificar e escrever o número complexo z na forma algébrica.

$z = \frac{(2-i)^2+1+i}{1-2i} + 3i^{15} = \frac{4-4i+i^2+1+i}{1-2i} + 3i^{15-4\times 3} = \frac{(4-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} + 3i^3 = \frac{4+8i-3i-6i^2}{1^2+2^2} - 3i =$
$= \frac{10+5i}{5} - 3i = 2 + i - 3i = 2 - 2i$

$-\frac{1}{2} \times \overline{z} = -\frac{1}{2}(2+2i) = -1 - i$

Escrevendo o número complexo $-\frac{1}{2} \times \overline{z}$ na forma trignométrica:

$$\begin{cases} \tan\,\theta = \frac{-1}{-1} \\ \theta \in 3^o Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = 1 \\ \theta \in 3^o Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \ \text{ e } \ |-1-i| = \sqrt{2}$$

Logo, $w = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

2018, 2ª fase, caderno 2

25. Sabe-se que:

$$i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1$$

Fazendo a divisão inteira de 2018 por 4, vem que:

Como o resto da divisão inteira de 2018 por 4 é igual a 2 então $i^{2018} = i^2$.

$$\begin{array}{r|l} 2018 & 4 \\ \hline 2 & 504 \end{array}$$

Observando o esquema abaixo percebemos que a soma de quatro em quatro parcelas é igual a zero.

$$\underbrace{\overset{=1}{i^0} + \overset{=i}{i^1} + \overset{=-1}{i^2} + \overset{=-i}{i^3}}_{0} + \ldots + \underbrace{\overset{=1}{i^{2016}} + \overset{=i}{i^{2017}} + \overset{=-1}{i^{2018}}}_{i}$$

Opção(A)

2018, Época especial, caderno 1

26. Vamos resolver a equação complexa:

$$z^4 + 16 = 0 \;\Leftrightarrow\; z^4 = -16 \;\Leftrightarrow\; z^4 = 16e^{i\pi}{}_{(-16=e^{i\pi})} \;\Leftrightarrow\; (r\,e^{i\alpha})^4 = 16e^{i\pi} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r^4 e^{i(4\alpha)} = 16e^{i\pi} \;\Leftrightarrow\; r = \sqrt[4]{16} \;\wedge\; 4\alpha = \pi + 2k\pi,\;\; k \in \{0,1,2,3\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; r = 2 \;\wedge\; \alpha = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{k\pi}{2},\;\; k \in \{0,1,2,3\}$$

Para $k = 0,\;\; \alpha = \frac{\pi}{4}\;\in 1^{\text{o}}$ quadrante

Para $k = 1,\;\; \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}\;\in 2^{\text{o}}$ quadrante

Para $k = 2,\;\; \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}\;\in 3^{\text{o}}$ quadrante

Para $k = 3$, $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4} \in 4^{\text{o}}$ quadrante

As soluções da equação complexa são $\{2e^{i\frac{\pi}{4}}, 2e^{i\frac{3\pi}{4}}, 2e^{i\frac{5\pi}{4}}, 2e^{i\frac{7\pi}{4}}\}$.

Os elementos do conjunto A são todas as soluções da equação complexa tais que a parte real é negativa (ou seja, são os números complexos que pertencem ao 2º e 3º quadrantes).

Assim os elementos do conjunto A são: $\{2e^{i\frac{3\pi}{4}}, 2e^{i\frac{5\pi}{4}}\}$

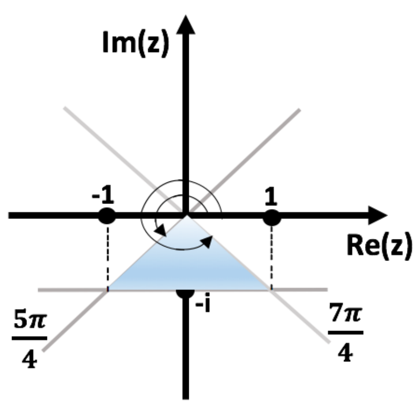
Apresentar os elementos do conjunto A na forma algébrica:

$2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

2018, Época especial, caderno 2

27. Sabendo que $\frac{5\pi}{4} \leq arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \Leftrightarrow \pi + \frac{\pi}{4} \leq arg(z) \leq 2\pi - \frac{\pi}{4}$, vamos representar, no plano complexo, a condição $\frac{5\pi}{4} \leq arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \wedge Im(z) \geq -1$:



A região definida pela condição é um triângulo, calculando a sua área:

$$A_{triângulo} = \frac{b \times a}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

Opção(D)

2017, 1ª fase, grupo I

28. Vamos começar por simplificar e passar para a forma algébrica os números complexos z_1 e z_2.

$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} = \frac{1-3i^3}{1+i} = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+3i-3i^2}{1+1} = \frac{1+2i+3}{2} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$

$z_2 = -3kcis(\frac{3\pi}{2}) = -3k[\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})] = -3k(0-i) = 3ki$

Sabemos que no plano complexo, a distância entre a imagem geométrica de z_1 e a imagem geométrica de z_2 é igual a $\sqrt{5}$, logo vem que:

$|z_1 - z_2| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |2+i-3ki| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |2+i(1-3k)| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{2^2+(1-3k)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{4+1-6k+9k^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5-6k+9k^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5-6k+9k^2 = 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -6k+9k^2 = 0 \Leftrightarrow k(-6+9k) = 0 \Leftrightarrow k=0 \vee -6+9k=0 \Leftrightarrow k=0 \vee k=\frac{6}{9}$

Como $k \in \mathbb{R}^+$, $k = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

2017, 1ª fase, grupo II

29. z é um número complexo da forma: $z = \rho cis(\frac{\pi}{5})$.

- $iz = 1cis(\frac{\pi}{2}) \times \rho cis(\frac{\pi}{5}) = \rho cis(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}) = \rho cis(\frac{7\pi}{10})$
- $-5iz = 5cis(\pi) \times \rho cis(\frac{7\pi}{10}) = 5\rho cis(\pi + \frac{7\pi}{10}) = 5\rho cis(\frac{17\pi}{10})$

$\frac{17\pi}{10} - 2\pi = -\frac{3\pi}{10}$

Opção(A)

2017, 2ª fase, grupo I

30. Vamos começar por determinar a forma algébrica do número complexo z_2.

$z_1 \times \overline{z_2} = 4 - 3i \Leftrightarrow (2+i) \times \overline{z_2} = 4 - 3i \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{4-3i}{2+i} \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{(4-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$
$\Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{8-4i-6i+3i^2}{2^2+1^2} \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{5-10i}{5} \Leftrightarrow \overline{z_2} = 1 - 2i$

Logo, $z_2 = 1 + 2i$

Agora vamos escrever $\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4})$ na forma algébrica:

$\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})] = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}i = 1 + i$

Vamos mostrar que o número complexo $\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4})$ verifica a condição $|z-z_1| = |z-z_2|$:

$|z-z_1| = |z-z_2| \Leftrightarrow |1+i-(2+i)| = |1+i-(1+2i)| \Leftrightarrow |1+i-2-i| = |1+i-1-2i|$
$\Leftrightarrow |-1| = |-i| \Leftrightarrow 1 = 1$

Como $|z - z_1| = |z - z_2|$ então o número complexo $\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4})$ está a igual distância dos números complexos z_1 e z_2, ou seja, $\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4})$ pertence à mediatriz do segmento de reta z_1z_2.

2017, 2ª fase, grupo II

31. Sabemos que $i^3 z = i^2 \times iz = -iz$.

A multiplicação de um número complexo z por i corresponde a uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos da imagem geométrica de z, ou seja, neste caso e observando a figura 4, iz corresponde à imagem geométrica do ponto B.

Como $-iz$ é o simétrico da imagem geométrica de iz, então $-iz$ corresponde a uma rotação de π radianos da imagem geométrica de iz, logo $-iz$ corresponde à imagem geométrica do ponto D.

Opção(D)

2017, Época especial, grupo I

32. Vamos começar por simplificar e passar para a forma trignométrica o número complexo z_1.

O número complexo $1-i$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares (4º quadrante) e $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$.

$z_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}cis\theta} = \frac{\sqrt{2}cis(-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}cis\theta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}cis(-\frac{\pi}{4}-\theta) = cis(-\frac{\pi}{4}-\theta)$

Escrevendo w na forma trignométrica temos:

$w = \overline{z_1} \times z_1^4 = cis(\frac{\pi}{4}+\theta) \times [cis(-\frac{\pi}{4}-\theta)]^4 = cis(\frac{\pi}{4}+\theta) \times 1^4 cis(-\pi-4\theta) = cis(\frac{\pi}{4}+\theta-\pi-4\theta) = cis(-\frac{3\pi}{4}-3\theta)$

Como $\theta \in \left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right[$ vem que:

$\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} < -3\theta < -\frac{3\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} < -\frac{3\pi}{4} - 3\theta < -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{12} \Leftrightarrow$
$-\frac{6\pi}{4} < -\frac{3\pi}{4} - 3\theta < -\frac{9\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{6\pi}{4} < -\frac{3\pi}{4} - 3\theta < -\pi$

Como $Arg(w) \in \left]-\frac{6\pi}{4}, -\pi\right[$ então o número complexo w pertence ao 2º quadrante, ou seja, $Re(w) < 0$, $Im(w) > 0$ e $|w| = 1$.

Logo o número complexo w pertence ao conjunto A.

2017, Época especial, grupo II

33. Como $\theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, o número complexo $3cis\theta$ está no 3ºquadrante do plano complexo.

$z = -3cis\theta$ é o simétrico da imagem geométrica de $3cis\theta$, então z corresponde a uma rotação de π radianos da imagem geométrica de $3cis\theta$, logo, z está no 1ºquadrante do plano complexo.

Opção(A)

2016, 1ª fase, grupo I

34. Vamos começar por escrever o número complexo $-1+\sqrt{3}i$ na forma trignométrica:

$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$$\begin{cases} tg\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} \\ \theta \in 2^{o} Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Logo, $-1+\sqrt{3}i = 2cis(\frac{2\pi}{3})$

Vamos simplificar e escrever na forma trignométrica o número complexo z_1:

$z_1 = \frac{8cis\theta}{-1+\sqrt{3}i} = \frac{8cis\theta}{2cis(\frac{2\pi}{3})} = \frac{8}{2}cis(\theta - \frac{2\pi}{3}) = 4cis(\theta - \frac{2\pi}{3})$

$\overline{z_1} \times z_2 = 4cis(-\theta + \frac{2\pi}{3}) \times cis(2\theta) = 4cis(-\theta + \frac{2\pi}{3} + 2\theta) = 4cis(\theta + \frac{2\pi}{3})$

Para o número complexo $\overline{z_1} \times z_2$ ser um número real então $\text{Arg}(\overline{z_1} \times z_2) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\theta + \frac{2\pi}{3} = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ \theta = -\frac{2\pi}{3} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = -1$, $\theta < 0 \ \notin]0, \pi[$

Para $k = 0$, $\theta = -\frac{2\pi}{3} \ \notin]0, \pi[$

Para $k = 1$, $\theta = -\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3} \ \in]0, \pi[$

Para $k = 2$, $\theta = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3} \ \notin]0, \pi[$

O valor de $\theta \in]0, \pi[$ para o qual $\overline{z_1} \times z_2$ é um número real é $\theta = \frac{\pi}{3}$.

2016, 1ª fase, grupo II

35. O polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 6 do número complexo w é um hexágono regular.

Podemos decompor o hexágono regular em 6 triângulos equiláteros em que o comprimento do lado do hexágono é igual ao raio da circunferência em que o hexágono está inscrito, ou seja, é igual a $|z|$.

Calculando o módulo do número complexo z:

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Logo o perímetro do polígono é igual a:

$$P = 6 \times 5 = 30$$

Opção(C)

2016, 2ª fase, grupo I

36. Vamos simplificar e escrever na forma trignométrica o número complexo z.

O número complexo $-1+i$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares (2º quadrante) e $|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Ou seja, $-1+i = \sqrt{2}cis(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}cis(\frac{3\pi}{4})$

$z = \frac{-1+i}{(\rho cis\theta)^2} = \frac{\sqrt{2}cis(\frac{3\pi}{4})}{\rho^2 cis(2\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{\rho^2}cis(\frac{3\pi}{4} - 2\theta)$

O número complexo $w = -\sqrt{2}i$ pertence ao semieixo imaginário negativo ($\text{Arg}(w) = \frac{3\pi}{2}$) e $|w| = \sqrt{2}$.

$w = -\sqrt{2}i = \sqrt{2}cis(\frac{3\pi}{2})$

Como $z = w$ temos:

$|z| = |w| \iff \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} = \sqrt{2} \iff \rho^2 = 1 \iff \rho = 1 \ \ (\rho > 0)$

Arg(z) =Arg$(w) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ \frac{3\pi}{4} - 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ 2\theta = \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} - 2k\pi,$
$k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ 2\theta = -\frac{3\pi}{4} - 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ \theta = -\frac{3\pi}{8} - k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0,\ \theta = -\frac{3\pi}{8}\ \notin]0, \pi[$

Para $k = 1,\ \theta < 0\ \notin]0, \pi[$

Para $k = -1,\ \theta = -\frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{5\pi}{8}\ \in]0, \pi[$

Para $k = -2,\ \theta = -\frac{3\pi}{8} + 2\pi = \frac{13\pi}{8}\ \notin]0, \pi[$

O valor de $\theta\ \in]0, \pi[$ e ρ para o qual $z = w$ é $\theta = \frac{5\pi}{8}$ e $\rho = 1$.

2016, 2ª fase, grupo II

37. Arg$(3 + 4i) > \frac{\pi}{4}\ \notin [0, \frac{\pi}{4}]$, por isso este número complexo não pertence à região definida pela condição.

Re$(6 + 2i) = 6\ \notin [1, 5]$, logo este número complexo também não pertence à região definida pela condição.

Re$(cis\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \notin [1, 5]$, então este número complexo também não pertence à região definida pela condição.

Opção(C)

2016, Época especial, grupo I

38. Vamos começar por simplificar o número complexo z:

$z = \frac{2i}{1-i} + 2i^{23} = \frac{(2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} + 2i^3 = \frac{2i+2i^2}{1^2+1^2} - 2i = \frac{-2+2i}{2} - 2i = -1 + i - 2i = -1 - i$

O número complexo $z = -1 - i$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares (3º quadrante) e $|-1-i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
Ou seja, $z = -1 - i = \sqrt{2}cis(\pi + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}cis(\frac{5\pi}{4})$

Logo, $\overline{z} = \sqrt{2}cis(-\frac{5\pi}{4})$

Como $w^3 = \overline{z}$, através da fórmula de Moivre:

$w = \sqrt[3]{\sqrt{2}cis(-\frac{5\pi}{4})} \Leftrightarrow w = \sqrt[3]{\sqrt{2}}cis(\frac{-\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}),\ k \in \{0,1,2\} \Leftrightarrow w = \sqrt[6]{2}cis(\frac{-\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3})$, $k \in \{0,1,2\}$

Para $k = 0$, $w_1 = \sqrt[6]{2}cis(-\frac{5\pi}{12})$

Para $k = 1$, $w_2 = \sqrt[6]{2}cis(\frac{-\frac{5\pi}{4}+2\pi}{3}) = \sqrt[6]{2}cis(\frac{3\pi}{12}) = \sqrt[6]{2}cis(\frac{\pi}{4})$

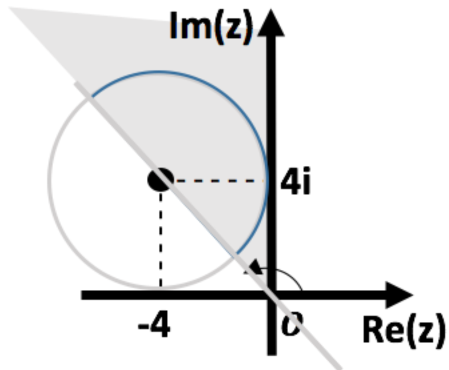
Para $k = 2$, $w_3 = \sqrt[6]{2}cis(\frac{-\frac{5\pi}{4}+4\pi}{3}) = \sqrt[6]{2}cis(\frac{11\pi}{12})$

2016, Época especial, grupo II

39. $|z + 4 - 4i| = 3 \wedge \frac{pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow |z - (-4 + 4i)| = 3 \wedge \frac{pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$

Sabendo que $|z - (-4 + 4i)| = 3$ define uma circunferência de centro no afixo do número complexo $-4+4i$ e raio igual a 3 e que $\frac{pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$ é a região do 3º quadrante limitada pelo semieixo imaginário positivo e a bissetriz dos quadrantes pares, vamos representar no plano complexo a linha definida pela condição $|z-(-4+4i)| = 3$

$\wedge \frac{pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$:



Logo o comprimento da linha definida pela condição anterior, é igual a metade do perímetro da circunferência de raio 3, ou seja, $P = \frac{2\pi \times raio}{2} = \frac{2\pi \times 3}{2} = 3\pi$.

Opção(C)

2015, 1ª fase, grupo I

40. Vamos começar por simplificar e escrever o número complexo z na forma trignométrica.

$z = \frac{-2+2i^{19}}{\sqrt{2}cis\theta} = \frac{-2+2i^{3}}{\sqrt{2}cis\theta} = \frac{-2-2i}{\sqrt{2}cis\theta}$

O número complexo $-2-2i$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares (3º quadrante) e $|-2-2i| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Ou seja, $-2-2i = 2\sqrt{2}cis(\pi + \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}cis(\frac{5\pi}{4})$

Logo, temos que:

$z = \frac{-2-2i}{\sqrt{2}cis\theta} = \frac{2\sqrt{2}cis(\frac{5\pi}{4})}{\sqrt{2}cis\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}cis(\frac{5\pi}{4} - \theta) = 2cis(\frac{5\pi}{4} - \theta)$

Para o número complexo z ser um número imaginário puro então $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$\frac{5\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow \ \theta = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow \ \theta = \frac{3\pi}{4} - k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0, \ \theta = \frac{3\pi}{4} \ \in]0, 2\pi[$

Para $k = 1, \ \theta = \frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4} \ \notin]0, 2\pi[$

Para $k = -1, \ \theta = \frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4} \ \in]0, 2\pi[$

Para $k = -2, \ \theta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4} \ \notin]0, 2\pi[$

Os valores de θ para os quais z é um imaginário puro são $\theta = \{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$.

2015, 1ª fase, grupo II

41. Sabendo que o triângulo $[OAB]$ é equilátero e que o ponto A pertence tem abcissa igual a 1, vem que:

$$\overline{OB} = 1 \ \Leftrightarrow \ |z| = 1$$

Podemos então excluir as opções de resposta A e C.

Dado que o triângulo $[OAB]$ é equilátero e que a imagem geométrica de z pertence ao 4º quadrante, temos que:

$$arg(z) = -\frac{\pi}{3} \ \Leftrightarrow \ arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{3} \ \Leftrightarrow \ arg(z) = \frac{5\pi}{3}$$

Opção(D)

2015, 2ª fase, grupo I

42. Vamos começar por simplificar o número complexo z_1:

$z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{2})}$

O número complexo $-1+i$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares (2º quadrante) e $|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Ou seja, $-1+i = \sqrt{2}cis(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}cis(\frac{3\pi}{4})$

$z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{2})} = \frac{\sqrt{2}cis(\frac{3\pi}{4})}{\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}cis(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12}) = cis(\frac{8\pi}{12}) = cis(\frac{2\pi}{3})$

Logo, $\overline{z_1} = cis(-\frac{2\pi}{3})$

Como $z^4 = \overline{z_1}$, através da fórmula de Moivre:

$z = \sqrt[4]{cis(-\frac{2\pi}{3})} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{1}cis(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}),\ k \in \{0,1,2,3\} \Leftrightarrow z = cis(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4})$, $k \in \{0,1,2,3\}$

Para $k=0$, $z_1 = cis(-\frac{2\pi}{12}) = cis(-\frac{\pi}{6})$

Para $k=1$, $z_2 = cis(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}) = cis(\frac{4\pi}{12}) = cis(\frac{\pi}{3})$

Para $k=2$, $z_3 = cis(\frac{-\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}) = cis(\frac{10\pi}{12}) = cis(\frac{5\pi}{6})$

Para $k = 3$, $z_4 = cis(\frac{-\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}) = cis(\frac{16\pi}{12}) = cis(\frac{4\pi}{3})$

2015, 2ª fase, grupo II

43. De acordo com a figura 6, o centro do quadrado coincide com a origem e cada lado do quadrado é paralelo a um eixo. Os vértices do quadrado estão sobre as bissetrizes dos quadrantes por isso vamos considerar:

$$z_1 = a + bi \quad z_2 = -a + bi \quad z_3 = -a - bi \quad z_4 = a - bi$$

$|z_3 - z_1| = |z_4 - z_2| \Leftrightarrow |-a-bi-(a+bi)| = |a-bi-(-a+bi)| \Leftrightarrow |-a-bi-a-bi| =$
$= |a - bi + a - bi| \Leftrightarrow |-2a-2bi| = |2a-2bi|$ Afirmação verdadeira

$z_1 + z_4 = 2Re(z_1) \Leftrightarrow a + bi + a - bi = 2(a) \Leftrightarrow 2a = 2a$ Afirmação verdadeira

$\frac{z_4}{i} = z_1 \Leftrightarrow a - bi = i \times (a + bi) \Leftrightarrow a - bi = ai - b$ Afirmação falsa

$-\overline{z_1} = z_2 \Leftrightarrow -(a - bi) = -a + bi \Leftrightarrow -a + bi = -a + bi$ Afirmação verdadeira

2015, Época especial, grupo I

44. Sabemos que o ângulo entre duas raízes de índice n consecutivas é igual a $\frac{2\pi}{n}$. Como z_1 e z_2 são vértices consecutivos do polígono regular, basta determinarmos o ângulo entre eles para calcularmos o número de lados n do polígono.

Vamos começar por simplificar e escrever na forma trignométrica os números complexos z_1 e z_2.

O número complexo $1+i$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares (1º quadrante) e $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Logo, $z_1 = (1+i)^6 = (\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4}))^6 = (\sqrt{2})^6 cis(\frac{6\pi}{4}) = 8cis(\frac{3\pi}{2})$

O número complexo $8i$ pertence ao semieixo imaginário positivo ($\text{Arg}(8i) = \frac{\pi}{2}$) e $|w| = 8$. Ou seja, $8i = 8cis(\frac{\pi}{2})$.

$z_2 = \frac{8i}{cis(-\frac{6\pi}{5})} = \frac{8cis(\frac{\pi}{2})}{cis(-\frac{6\pi}{5})} = \frac{8}{1}cis(\frac{\pi}{2} + \frac{6\pi}{5}) = 8cis(\frac{17\pi}{10})$

O ângulo entre z_1 e z_2 é igual a $\text{Arg}(z_2) - \text{Arg}(z_1)$:

$$\frac{17\pi}{10} - \frac{3\pi}{2} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{10} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow n = 10$$

2015, Época especial, grupo II